Lith. 251 gd

Klein

Einleitung

in die

Krystallberechnung

von

Carl Klein.

Mit 196 Holzschnitten und zwölf Tafeln.

STUTTGART.
E. Schweizerbart'sche Verlagshandlung (E. Koch).
1876.

269 F

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck der E. Schweizerbart'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Vorwort.

Nicht ohne Zögern habe ich mich entschlossen, das vorliegende Werk: „Einleitung in die Krystallberechnung" einem grösseren Publikum zu übergeben; musste ich mir doch sagen, dass wir in Deutschland an umfassenden Lehr- und Handbüchern über diesen Gegenstand keinen Mangel haben.

Aber grade der Umstand, dass nur eine reiche Auswahl grösserer Werke vorhanden ist und es an solchen fehlt, welche die Mineralogen und Chemiker beim Beginne ihrer Studien in die Wissenschaft der Krystalle, speciell in die Krystallberechnung, einzuführen geeignet wären, schien eine Aufforderung zur Herausgabe dieses Werkes zu enthalten. — Dazu kam, dass einerseits die auf das Erscheinen dieser Schrift gerichteten Wünsche meiner Freunde und Schüler sich immer lebhafter geltend machten und andererseits die, während einer mehrjährigen Lehrthätigkeit an hiesiger Universität, in den Vorlesungen befolgte Methode sich als zweckmässig erwiesen hatte, somit einigermassen die Garantie geboten war, nichts völlig Unerprobtes zu liefern.

Mit Rücksicht auf die immer grössere Wichtigkeit der Erkenntniss der Beziehungen, welche zwischen Form und Inhalt krystallisirter Körper obwalten, schien es mir schliesslich wünschenswerth, den Versuch zu machen, dem Fache neue Freunde zuzuführen und ein grösseres Publikum zu befähigen, an der gemeinsamen Arbeit Theil zu nehmen.

Aus diesen Gründen musste aber die Behandlung des Stoffs eine elementare, den Bedürfnissen der Anfänger Rechnung tragende sein, und es konnte in Folge dessen nur das für die Zwecke der Praxis Wichtigste geboten werden und dies nur unter Anwendung der einfachsten Hülfsmittel. Was diese selbst anlangt, so ist hauptsächlich von einigen Sätzen aus der analytischen Geometrie und namentlich von den Lehren der ebenen und sphärischen Trigonometrie Gebrauch gemacht worden; zahlreiche, völlig durchgerechnete Beispiele dienen zur Uebung. Die Verhältnisse des Zonenzusammenhangs der Glieder einer Krystallreihe haben ihre Darstellung an der Hand der Quenstedt'schen Projectionsmethode gefunden. Ich bin der Meinung, dass

dieselbe in einem einleitenden Werke, wie dem vorliegenden, ausschliesslich in Betracht zu ziehen ist und glaube, dass derjenige, welcher sich dieser Methode in zweckentsprechender Weise bedient und namentlich, neben der graphischen Darstellung des Zonenzusammenhangs, auch die zum Zwecke der Rechnung und Controle dienenden Formeln berücksichtigt, die Verwendbarkeit der Projection zum Krystallzeichnen nutzbringend verwerthet, in ihr ein vortreffliches Hülfsmittel zum Studium der Krystalle erkennen wird.

Es soll indessen damit nicht gesagt sein, dass andere Methoden der Rechnung und Projection, sowie andere Bezeichnungsweisen, als die in diesem Werke, nach dem Vorgange von Weiss, Naumann und ihren Nachfolgern, gebrauchten, nicht auch ihre grossen Vorzüge hätten; ich möchte im Gegentheil jedem Weiterstrebenden ebenso dringend empfehlen, sich mit denselben eingehend zu beschäftigen, als ich es für die Bedürfnisse des Anfängers geboten halte, vor dem Kennenlernen anderer Anschauungen, erst eine Behandlungsweise gründlich zu erfassen und mit ihr vertraut zu werden.

Zahlreiche Literaturcitate in vorliegendem Werke mögen, zum Zwecke des Weiterstrebens, auf die besonders zu berücksichtigenden Schriften aufmerksam machen; gleichzeitig aber auch erkennen lassen, wie sehr meine Arbeit auf den Leistungen Anderer ruht, was ich an dieser Stelle hervorzuheben für meine Pflicht halte.

Durchdrungen von der grossen Wichtigkeit, welche, namentlich für die präcise Bestimmung des Krystallsystems, die Kenntniss der optischen Eigenschaften der Krystalle für den Mineralogen und Chemiker hat, erlaube ich mir ferner noch auf das soeben erschienene Werk von P. Groth: „Physikalische Krystallographie, Leipzig 1876“ aufmerksam zu machen, in welchem u. A. diesen Verhältnissen eine eingehende Betrachtung gewidmet ist.

Indem ich zum Schlusse dem geehrten Herrn Verleger meinen besten Dank für die Bereitwilligkeit sage, mit der er auf die Erfüllung meiner Wünsche, bezüglich einer würdigen und zweckentsprechenden Ausstattung des Buches, einging, fühle ich mich ferner noch dankbar verpflichtet, einem meiner Schüler, Herrn Dr. Charles Trechmann aus Hartlepool, gegenüber, der mich bei der Herstellung der Tafeln freundlichst unterstützte.

Möge das Buch, das ich somit der Oeffentlichkeit übergebe, in den Kreisen, für die es bestimmt ist, sich nützlich erweisen und auch bei den Fachgenossen eine freundliche Aufnahme finden.

Heidelberg, 1. Januar 1876.

C. Klein.

Inhalt.

Seite.

Allgemeiner Theil 1— 72

Zweck desselben: Zusammenstellung der zur Krystallberechnung nothwendigen Erfordernisse 1

I. Trigonometrische Formeln 1— 6

II. Ueber einige Sätze aus der analytischen Geometrie . 7— 29

III. Zonenlehre. Einsicht in den Zusammenhang der Glieder eines Krystallsystems und graphische Darstellung desselben durch die Projection 29— 54

IV. Von der Krystallwinkelmessung und den dazu dienenden Instrumenten 54— 72

Specieller Theil 73—393

A. Die wichtigsten Grundgesetze der Krystallographie und ihre Anwendung auf Krystallberechnung 73— 80

B. Die Lehre von der Krystallberechnung 81—380

I. Reguläres System 81—144

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse . . . 81— 87
2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen 87— 93
3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss 93—133
4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection 134—144

II. Quadratisches System 145—186

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse . . 145—148
2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen 148—154
3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss. 154—172
4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection 172—186

III. Rhombisches System 187—212

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse . . . 187—189

Seite

2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen 190—191
3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss. 191—199
4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection 199—212

IV. Klinorhombisches System 213—270
1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse . . . 213—216
2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen. Transformation der Winkelformel 216—222
3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Gestalten aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss 222—236
4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection 237—270

V. Klinorhomboidisches System 271—306
1. Allgemeine Bemerkungen über Symmetrieverhältnisse, Axenwahl, Zonenverband und Winkelformel 271—273
2. Berechnung des Axenverhältnisses und der Axenschnitte der verschiedenen Flächen. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten . 273—284
3. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection 285—306

VI. Hexagonales System 307—380
1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse . . . 307—313
2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen. Einführung des Schrauf'schen orthohexagonalen Axenverhältnisses a : a $\sqrt{3}$: c und Reduction der Axenschnitte der Gestalten auf dasselbe zum Zwecke der Winkelberechnung mit der nur für rechtwinkelige Axen abgeleiteten Winkelformel 313—337
3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss. 338—364
4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection 364—380

C. Anhang.

Von der Zeichnung der Krystallformen 381—393

I. Zeichnung der einfachen Formen und deren Combinationen 381—391

II. Zeichnung der Zwillingskrystalle 391—393

Allgemeiner Theil.

Die Lehre von der Krystallberechnung setzt, ausser dem Verständniss der elementaren Krystallographie, mehrere mathematische Kenntnisse voraus, unter denen ebene und sphärische Trigonometrie eine Hauptrolle spielen.

Es möchte daher nicht unzweckmässig sein, diesen allgemeinen Theil mit einer Zusammenstellung der wichtigsten trigonometrischen Formeln in logarithmisch bequemer Weise zu beginnen. Wir lassen derselben folgen einige Sätze aus der analytischen Geometrie, behandeln hierauf die Zonenlehre und widmen zum Schlusse einen eingehenden Abschnitt der Krystallwinkelmessung und den dazu dienenden Instrumenten.

I. Trigonometrische Formeln.

1. Ebene Trigonometrie.

Die drei Grundformeln der ebenen Trigonometrie sind:

$$\left.\begin{aligned} a \,.\, \sin B &= b \,.\, \sin A \\ a \,.\, \sin C &= c \,.\, \sin A \\ b \,.\, \sin C &= c \,.\, \sin B \end{aligned}\right\} \; 1),$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \cos C \end{aligned}\right\} \; 2),$$

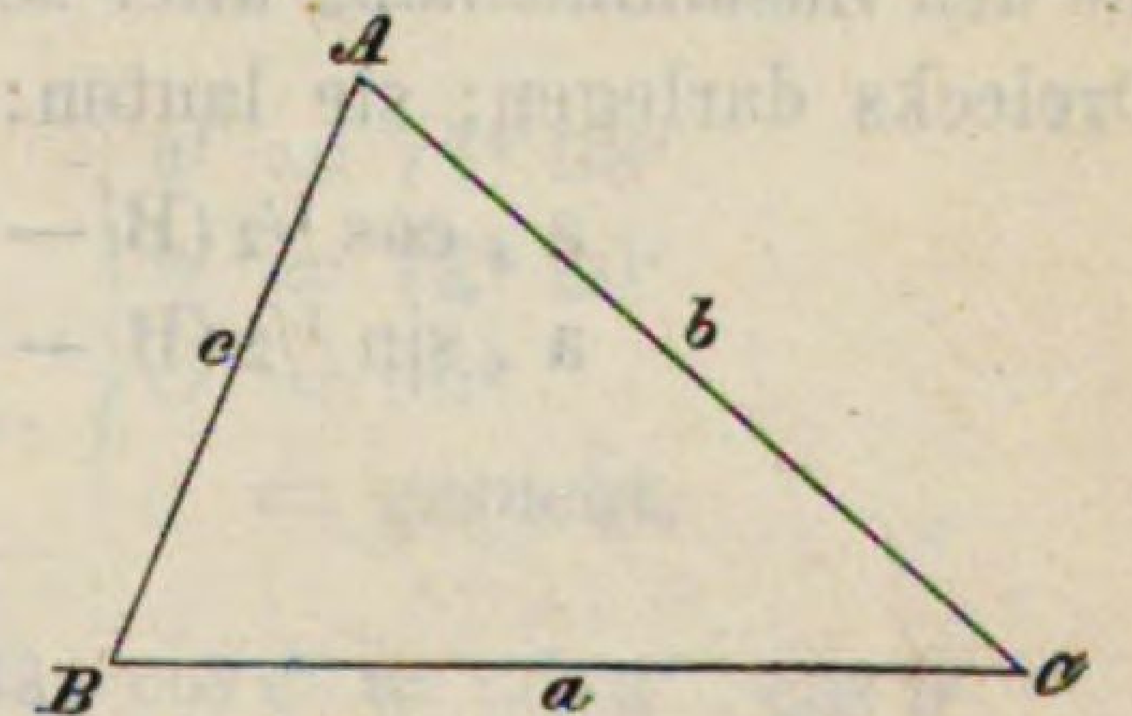


Fig. 1.

$$\left.\operatorname{tg} A = \frac{a \,.\, \sin B}{c - a \,.\, \cos B}; \quad \operatorname{tg} B = \frac{b \,.\, \sin C}{a - b \,.\, \cos C}; \quad \operatorname{tg} C = \frac{c \,.\, \sin A}{b - c \,.\, \cos A}\right\} \; 3).$$

Gestützt auf diese Formeln lässt sich folgende Tabelle aufstellen, die die wichtigsten Aufgaben, welche bei der Berechnung eines ebenen, schiefwinkeligen Dreiecks vorkommen, nebst ihren Auflösungen enthält.

Gegeben	Gesucht	Gefunden
a, b, c,	B	$\cos {}^1/_2 B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)}{4ac}}$ $\sin {}^1/_2 B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4ac}}$
a, c, B	A, C	${}^1/_2 (A + C) = 90^0 - {}^1/_2 B$ $\operatorname{tg} {}^1/_2 (A - C) = \frac{a-c}{a+c} . \operatorname{cotg} {}^1/_2 B$
	b	$b = (a + c) . \cos\varphi$ mit $\sin\varphi = \frac{2\cos {}^1/_2 B . \sqrt{ac}}{a+c}$
a, b, A	B	$\sin B = \frac{b . \sin A}{a}$. Im Allgemeinen zweideutig, da $\sin B = \sin(180^0 - B)$; nur eindeutig, wenn $a > b$.
A, C, b	a c	$a = \frac{b . \sin A}{\sin(A + C)}$ $c = \frac{b . \sin C}{\sin(A + C)}$.

Zuweilen wendet man auch die MOLLWEIDE'schen Gleichungen an, die den Zusammenhang aller sechs Stücke eines ebenen, schiefwinkeligen Dreiecks darlegen; sie lauten:

$$a . \cos {}^1/_2 (B - C) = (b + c) . \sin {}^1/_2 A$$
$$a . \sin {}^1/_2 (B - C) = (b - c) . \cos {}^1/_2 A.$$

2. Sphärische Trigonometrie.

a. Rechtwinkelige sphärische Dreiecke.

α. Ein Winkel, z. B. C ist = 90°.

Alle vorkommenden Aufgaben werden durch den NAPIER'schen Satz gelöst. Um denselben allgemein gültig auszusprechen, denken wir uns den rechten Winkel als nicht vorhanden; es hat dann jedes

Stück des sphärischen Dreiecks (Seite, wie Winkel) zwei anliegende und zwei abgesonderte Stücke. Stellen wir uns ferner vor, dass da, wo in der nun auszusprechenden Gleichung eine Kathete vorkommt, die Cofunction zu setzen ist, so lautet die Regel:

„Der Cosinus eines jeden Stücks ist gleich dem Produkt der Cotangenten der beiden anliegenden und auch gleich dem Produkt der Sinus der beiden abgesonderten Stücke."

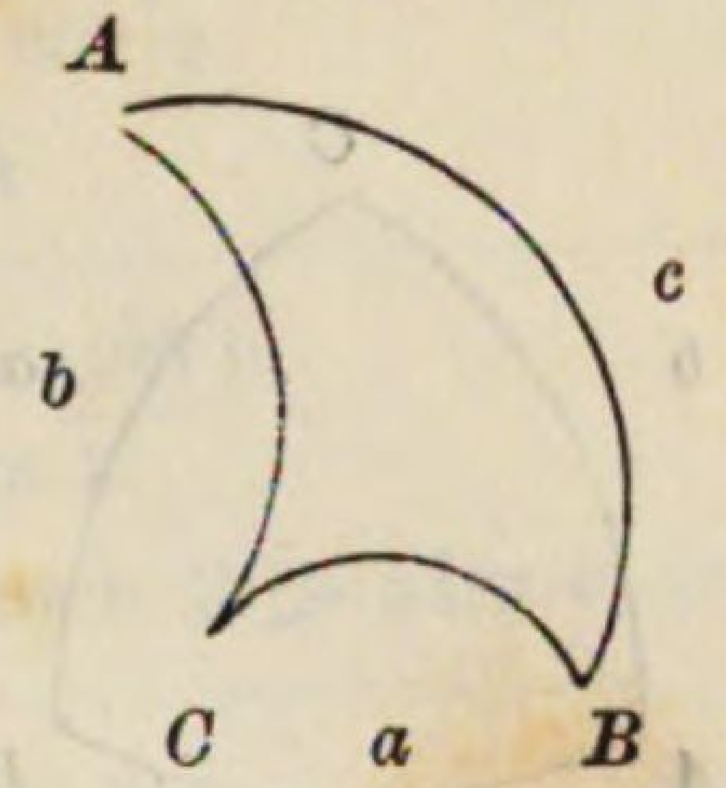


Fig. 2.

β. Eine Seite, z. B. c ist = 90°.

In diesem Falle findet der NAPIER'sche Satz keine unmittelbare Anwendung. Man löst die Aufgabe entweder dadurch, dass man in den später mitzutheilenden Formeln für die schiefwinkeligen, sphärischen Dreiecke c = 90° setzt, wodurch sich dieselben entsprechend reduciren, oder, indem man zum vorhandenen Eck das Polareck sucht und dieses nach der NAPIER'schen Regel behandelt. Die Winkel dieses Polarecks sind, wie bekannt, die Supplemente der Seiten des ursprünglichen Ecks, die Seiten des ersteren die Supplemente der Winkel des letzteren. Indem man also das Polareck nach der NAPIER'schen Regel auflöst, findet man seine gesuchten Winkel und Seiten und hat in den Supplementen dazu die gewünschten Seiten und Winkel des ursprünglichen Ecks.

Es sei z. B. gegeben ein sphärisches Dreieck mit:

$$\left.\begin{array}{l} A = 108^0\ 2' \\ B = 107^0\ 40' \\ c = 90^0 \\ C = \text{gesucht} \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{so hat dessen}\\ \text{Polareck}\\ \text{folgende Stücke:}\end{array} \left\{\begin{array}{l} a' = 71^0\ 58' \\ b' = 72^0\ 20' \\ C' = 90^0 \\ c' = \text{gesucht.} \end{array}\right.$$

Man hat nach dem NAPIER'schen Satz: $\cos c' = \cos a' . \cos b'$
und $180 - c' = C$.

$$\begin{aligned} \log . \cos c' &= \log . \cos 71^0\ 58' = 9{,}4907592 - 10 \\ &+ \log . \cos 72^0\ 20' = 9{,}4821283 - 10 \\ &\qquad\qquad 8{,}9728875 - 10 \\ &\qquad c' = 84^0\ 36'\ 33'' \\ &\qquad C = 95^0\ 23'\ 27''. \end{aligned}$$

b. Schiefwinkelige sphärische Dreiecke.

Die vier Grundformeln lauten:

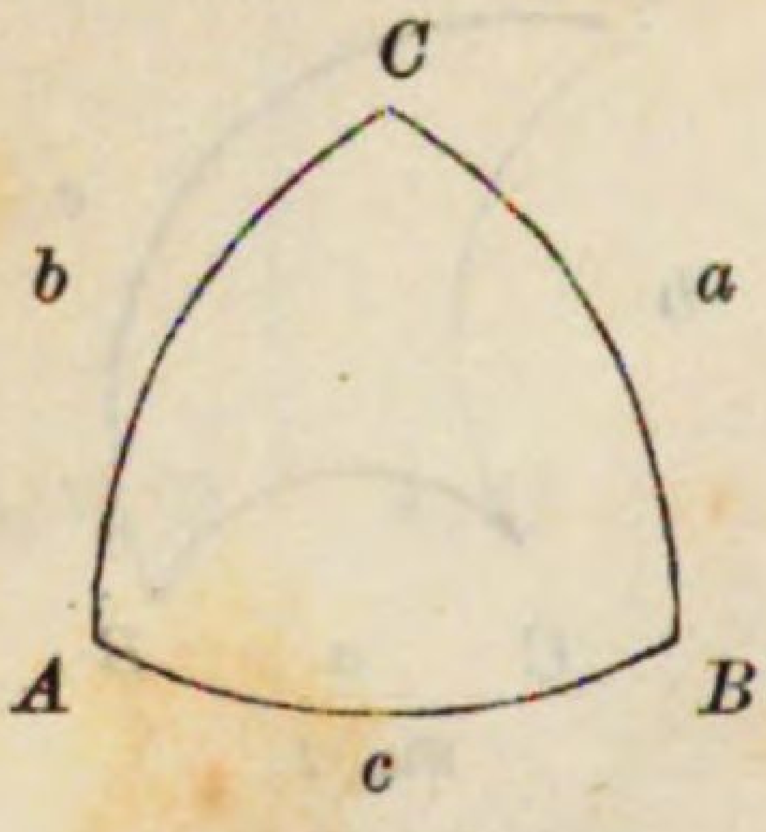


Fig. 3.

$$\left.\begin{array}{l}\sin A . \sin b = \sin a . \sin B \\ \sin A . \sin c = \sin a . \sin C \\ \sin B . \sin c = \sin b . \sin C\end{array}\right\} \quad . . 1),$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A \\ \cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos B \\ \cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos C\end{array}\right\} \quad . . 2),$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{cotg} b . \sin c = \cos a . \cos A + \sin A . \operatorname{cotg} B \\ \operatorname{cotg} c . \sin b = \cos b . \cos A + \sin A . \operatorname{cotg} C \\ \operatorname{cotg} c . \sin a = \cos a . \cos B + \sin B . \operatorname{cotg} C \\ \operatorname{cotg} a . \sin c = \cos c . \cos B + \sin B . \operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg} a . \sin b = \cos b . \cos C + \sin C . \operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg} b . \sin a = \cos a . \cos C + \sin C . \operatorname{cotg} B\end{array}\right\} \quad . . 3),$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos A = - \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a \\ \cos B = - \cos C . \cos A + \sin C . \sin A . \cos b \\ \cos C = - \cos A . \cos B + \sin A . \sin B . \cos c\end{array}\right\} \quad . . 4).$$

In folgender Tabelle sind alle zur Auflösung der schiefwinkeligen Dreiecke nöthigen Formeln, logarithmisch bequem eingerichtet, zusammengestellt.

Gegeben	Gesucht	Gefunden
a, b, c	A	$\sin {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2(a+b-c) . \sin {}^1/_2(a+c-b)}{\sin b . \sin c}}$ $\cos {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2(a+b+c) . \sin {}^1/_2(b+c-a)}{\sin b . \sin c}}$
A, b, c	a	$\cos a = \frac{\cos b . \sin(c+\varphi)}{\sin \varphi}$ mit $\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} b . \cos A$
	B	$\operatorname{cotg} B = - \frac{\operatorname{cotg} A . \cos(c+\varphi)}{\cos \varphi}$ mit $\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} b . \cos A$

Gegeben	Gesucht	Gefunden
A, b, c	C	$\operatorname{cotg} C = -\frac{\operatorname{cotg} A \,.\, \cos(b+\varphi)}{\cos\varphi}$ mit $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} c \,.\, \cos A$
a, b, A ($\sin a > \sin b$)	B	$\sin B = \frac{\sin A \,.\, \sin b}{\sin a}$ (ist $b >$ oder $< 90^0$, so ist auch $B >$ oder $< 90^0$)
	c	$\sin(c+\varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \,.\, \sin\varphi$ mit $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} b \,.\, \cos A$
	C	$\sin(C+\varphi) = \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{tg} b \,.\, \sin\varphi$ mit $\operatorname{tg}\varphi = \cos b \,.\, \operatorname{tg} A$
B, C, c ($\sin C > \sin B$)	b	$\sin b = \frac{\sin B \,.\, \sin c}{\sin C}$ (ist $B >$ oder $< 90^0$, so ist auch $b >$ oder $< 90^0$)
	a	$\cos(a+\varphi) = -\operatorname{cotg} C \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, \cos\varphi$ mit $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} c \,.\, \cos B$
	A	$\sin(A-\varphi) = \frac{\cos C \,.\, \sin\varphi}{\cos B}$ mit $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} B \cos c$
B, C, a	A	$\cos A = \frac{\cos B \,.\, \sin(C-\varphi)}{\sin\varphi}$ mit $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} B \,.\, \cos a$
	b	$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} a \,.\, \sin(C+\varphi)}{\sin\varphi}$ mit $\operatorname{tg}\varphi = \cos a \,.\, \operatorname{tg} B$
	c	$\operatorname{cotg} c = \frac{\operatorname{cotg} a \,.\, \sin(B+\varphi)}{\sin\varphi}$ mit $\operatorname{tg}\varphi = \cos a \,.\, \operatorname{tg} C$

Gegeben	Gesucht	Gefunden
A, B, C	a	$\sin {}^1/_2 a = \sqrt{\frac{-\cos {}^1/_2(A+B+C) \cdot \cos {}^1/_2(B+C-A)}{\sin B \cdot \sin C}}$
		$\cos {}^1/_2 a = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2(A+B-C) \cdot \cos {}^1/_2(A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}}$.

Es verdienen weiter hervorgehoben zu werden die GAUSS'schen Gleichungen, von denen jede alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks enthält und die somit vorzüglich Verwendung zu Controlrechnungen finden:

$$1.\quad \sin {}^1/_2(A + B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \cos {}^1/_2(a - b)$$

$$2.\quad \cos {}^1/_2(A + B) \cdot \cos \frac{c}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \cos {}^1/_2(a + b)$$

$$3.\quad \sin {}^1/_2(A - B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \sin {}^1/_2(a - b)$$

$$4.\quad \cos {}^1/_2(A - B) \cdot \sin \frac{c}{2} = \sin \frac{C}{2} \cdot \sin {}^1/_2(a + b).$$

Dividirt man die vorstehenden Gleichungen paarweise durcheinander, so erhält man die schon von NAPIER gefundenen Gleichungen, auch NAPIER'sche Analogien genannt. Man hat nämlich alsdann:

$$1)\quad \operatorname{tg} {}^1/_2(a + b) = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos {}^1/_2(A - B)}{\cos {}^1/_2(A + B)}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2(a - b) = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \cdot \frac{\sin {}^1/_2(A - B)}{\sin {}^1/_2(A + B)}$$

$$2)\quad \operatorname{tg} {}^1/_2(A + B) = \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \cdot \frac{\cos {}^1/_2(a - b)}{\cos {}^1/_2(a + b)}$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2(A - B) = \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \cdot \frac{\sin {}^1/_2(a - b)}{\sin {}^1/_2(a + b)}.$$

In dieser Form finden die Gleichungen namentlich Verwendung:

1. Wenn gegeben sind 2 Winkel und die dazwischenliegende Seite und es sich darum handelt, die beiden anderen Seiten zu finden.

2. Wenn gegeben sind 2 Seiten und der dazwischenliegende Winkel und die beiden anderen Winkel dargestellt werden sollen.

II. Ueber einige Sätze aus der analytischen Geometrie.

Die nachfolgenden Untersuchungen haben den Zweck auf die Zonenlehre vorzubereiten, ferner aber eine Formel herzuleiten, vermöge deren man den Neigungswinkel zweier Flächen aus gegebenem Axenverhältniss und Axenschnitten der Gestalten bestimmen kann. Oefters bedient man sich zwar mit Vortheil der sphärischen Trigonometrie zur Winkelberechnung, nicht immer sind jedoch die zur Berechnung eines bestimmten Winkels nöthigen Elemente unmittelbar gegeben, so dass in vielen Fällen besagte Winkelformel Anwendung findet, abgesehen von anderen, erst später kennen zu lernenden Verwendungen.

Von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus betrachtet, könnte es geboten erscheinen, die Winkelformel für ein triklines Axensystem abzuleiten, allein so gross auch gewisse, daraus entspringende theoretische Vortheile sein mögen, so wenig lohnt es sich für die Zwecke der Praxis, da im triklinen System die Formel, ihres schwerfälligen Charakters wegen, kaum zur praktischen Verwendung kommt. Wir werden uns daher bescheiden, die Formel für ein rechtwinkeliges Axensystem herzuleiten und dabei im Allgemeinen den Gang verfolgen, den Naumann in seinen Werken* eingeschlagen hat. Die Formel kommt in der abzuleitenden Gestalt für das reguläre, quadratische und rhombische System unmittelbar zur Anwendung und kann, durch später mitzutheilende Transformationen, auch für den Gebrauch in den übrigen Systemen, namentlich im klinorhombischen und hexagonalen, eingerichtet werden.

1. Axensystem, Parameter einer Linie, Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben.

Sei uns in der Ebene der Zeichnung, Fig. 4, ein zweizähliges Axensystem gegeben, in dem sich die Axen unter einem beliebigen Winkel schneiden, bezeichnen wir die von vorn nach hinten ziehende Axe mit X, die von rechts nach links sich erstreckende mit Y, entsprechend unseren später einzuführenden krystallographischen Axen a und b, so entstehen durch diese Axen vier Quadranten, von denen, ein für alle Mal, der Quadrant von rechts der positive sein mag.

Schneidet nun eine beliebige Linie LL die Axen, z. B. den Quadranten der positiven Halbaxen, so heissen die Axenabschnitte, hier

* Vergl. besonders Naumann, Lehrb. d. rein. u. ang. Kryst. 1830. B. I, dann auch Elemente der theoret. Kryst. 1856. —

MA und MB, ihre Parameter. Wählen wir in der Linie einen beliebigen Punkt P und ziehen aus denselben Parallelen mit den Axen, so nennt man dieselben, hier PR und PQ, die Coordinaten des Punktes P. — Wie wir sehen hat die Linie zwei Parameter von constanter Grösse bei wechselnder Grösse der Coordinaten ihrer verschiedenen Punkte. Um die Linie analytisch-geometrisch zu fixiren, ist es nöthig eine Gleichung aufzustellen, welche die Coordinaten eines ihrer Punkte mit ihren constanten Parametern in Relation bringt.

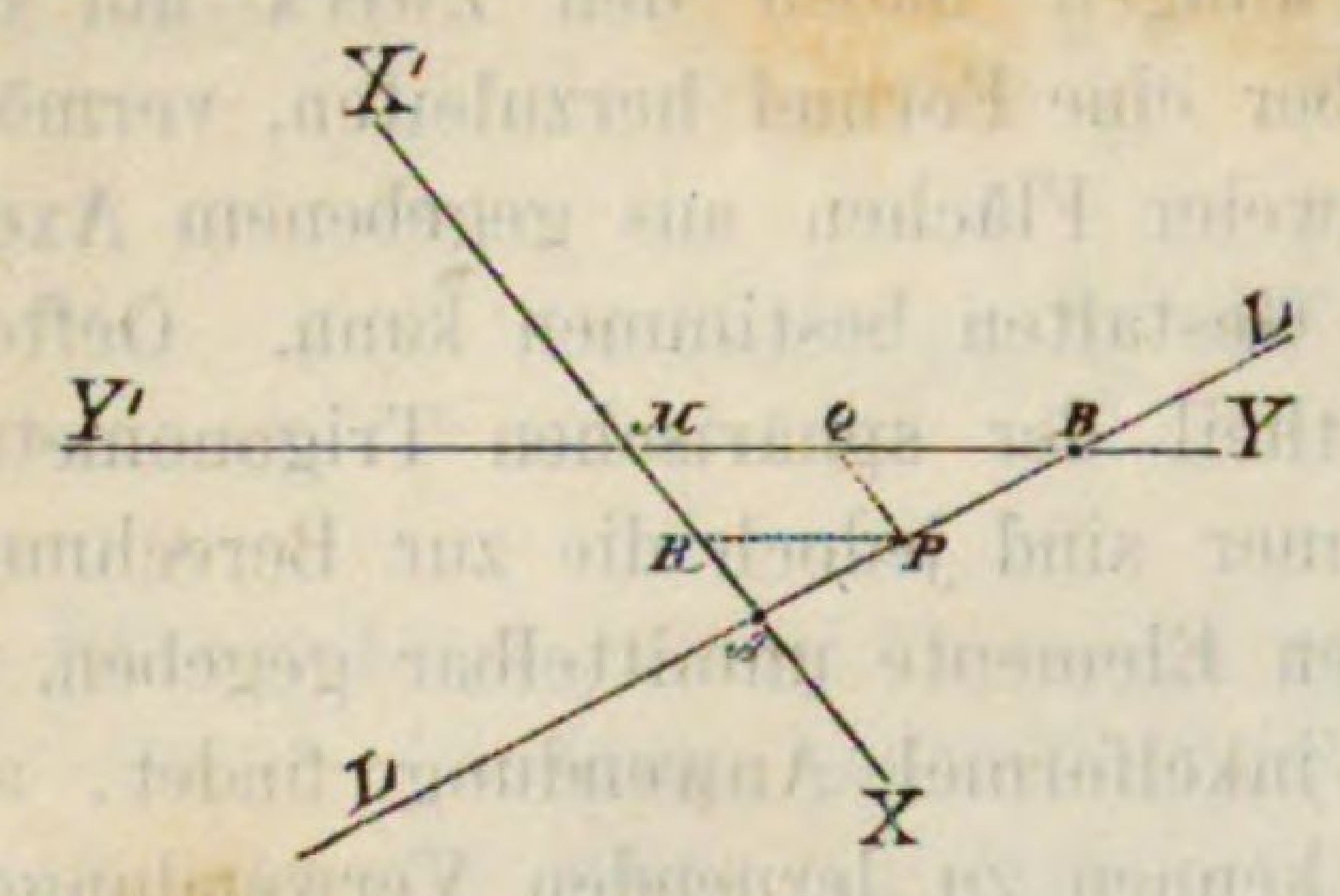


Fig. 4.

2. Gleichung einer Linie ausserhalb des Mittelpunktes.

Sei gegeben die Linie LL mit ihren Parametern:

$$MA = a \text{ und } MB = b.$$

Wählen wir in der Linie den Punkt P mit den Coordinaten

$$PQ = x \text{ und } PR = y,$$

so folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PQB und AMB:

$$b - y : x = b : a$$

$$bx + ay = ab$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots \text{ I}),$$

als Gleichung der Linie ausserhalb des Mittelpunktes, in der die Bedeutung der beständigen Grössen a und b von dem angewandten Axenwinkel völlig unabhängig ist. — Uebrigens sind die Parameter selbst nichts anderes als die Coordinaten derjenigen Punkte, in denen die Linie die Axen schneidet, wie dies auch die Gleichung anzeigt, wenn man x oder y = o setzt. Mann hat dann y = b oder x = a.

Geht die Linie der X-Axe parallel, so wird der in derselben liegende Parameter $a = \infty$ und die Gleichung der Linie zu $\frac{y}{b} = 1$. Ebenso bedeutet aber auch $\frac{x}{a} = 1$... II), eine der Y-Axe parallele Linie.

Diese Gleichungen, zunächst für den Quadranten der positiven Halbaxen bewiesen, gelten, unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, für alle übrigen Quadranten.

3. Gleichung einer durch den Axenmittelpunkt gehenden Linie.

Sei L′L′ die Centroparallele von LL, so sind die Coordinaten von P′.

$$P'Q' = -x \text{ und } P'R' = y.$$

Das Dreieck AMB ist ähnlich dem Dreieck MR′P′, daraus folgt:

$$-x : y = a : b$$

$$-\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \ldots \text{III}),$$

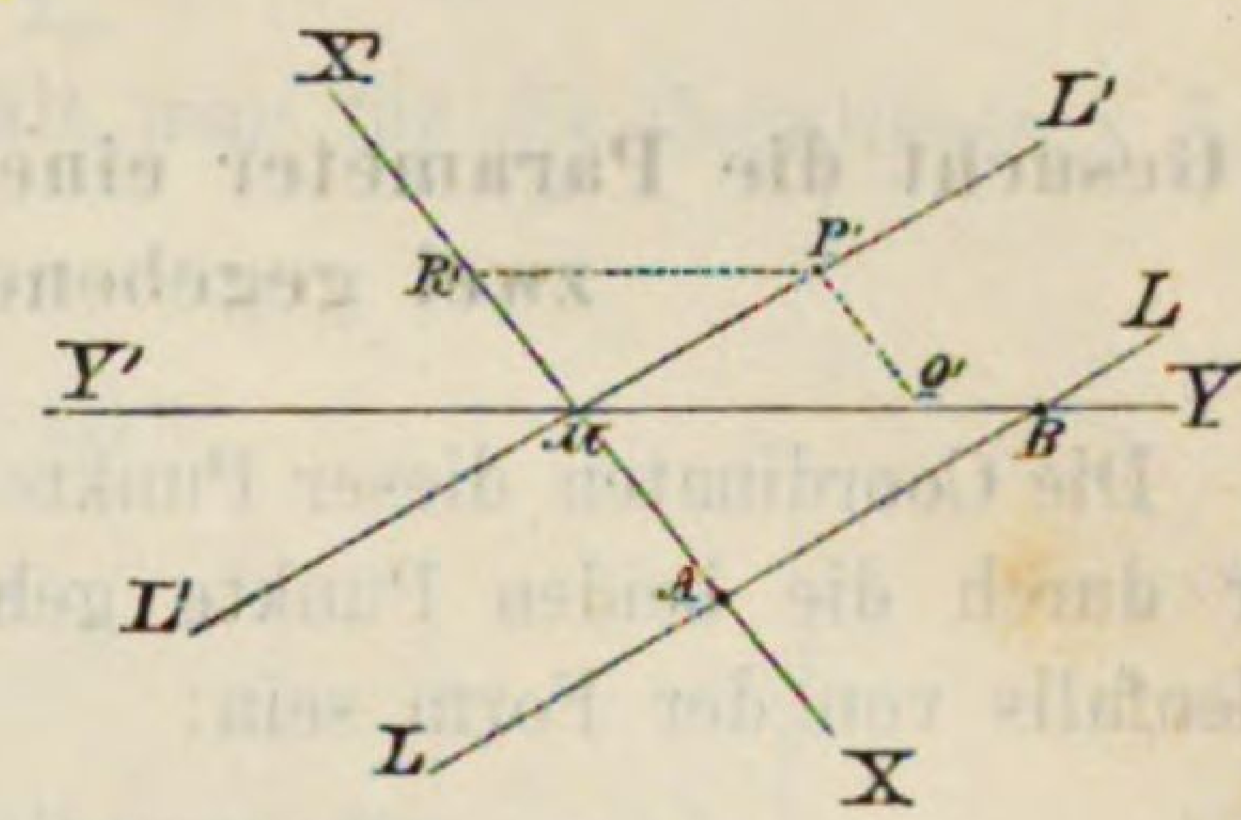


Fig. 5.

als Gleichung der durch den Nullpunkt gehenden Linie. In dieser Gleichung können a und b nur noch uneigentlich Parameter genannt werden, sie drücken in derselben nicht mehr die Grösse, sondern nur noch das Verhältniss der Constanten a und b aus.

Wir wenden uns mit der erlangten Kenntniss der Lösung zweier sehr wichtigen Aufgaben zu.

4. Gegeben die Gleichungen zweier geraden Linien, gesucht die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes.

Seien die beiden Gleichungen:

$$1)\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad 2)\ \frac{x}{a_{,}} + \frac{y}{b_{,}} = 1,$$

so müssen, für den Durchschnittspunkt der Linien, beide ihre Gültigkeit behalten; es kommt daher darauf an ein x und ein y, ausgedrückt in den Parametern der zwei Linien zu finden, das beiden Gleichungen genügt.

Man hat durch Multiplication von 1) mit b, von 2) mit b, und durch Subtraction der Gleichung 2) von der Gleichung 1), sowie durch Multiplication von 1) mit a, von 2) mit a, und durch Subtraction der Gleichung 2) von der Gleichung 1) folgendes:

$$1)\ \frac{xb}{a} + y = b \qquad\qquad 1)\ x + \frac{ya}{b} = a$$

$$2)\ \frac{xb_{,}}{a_{,}} + y = b_{,} \qquad\qquad 2)\ x + \frac{ya_{,}}{b_{,}} = a_{,}$$

$$x\left(\frac{b}{a} - \frac{b_{,}}{a_{,}}\right) = b - b_{,} \quad ; \quad y\left(\frac{a}{b} - \frac{a_{,}}{b_{,}}\right) = a - a_{,}$$

$$x\,(a_{,}b - ab_{,}) = aa_{,}(b - b_{,}) \quad ; \quad y\,(ab_{,} - a_{,}b) = bb_{,}(a - a_{,})$$

$$x = \frac{aa_{,}(b - b_{,})}{a_{,}b - ab_{,}} \quad ; \quad y = \frac{bb_{,}(a - a_{,})}{ab_{,} - a_{,}b} \ . \ \text{IV}).$$

5. Gesucht die Parameter einer geraden Linie, welche durch zwei gegebene Punkte geht.

Die Coordinaten dieser Punkte seien $x_{,}$, $y_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$. Die Gleichung der durch die beiden Punkte gehenden geraden Linie wird alsdann jedenfalls von der Form sein:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ldots 1).$$

In dieser Gleichung sind a und b nicht bekannt und es ist die Aufgabe, diese Parameter in Werthen der Coordinaten der Punkte auszudrücken. Wir bilden aus den gegebenen Coordinaten zwei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_{,}}{a} + \frac{y_{,}}{b} = 1 \ldots 2)$$

$$\frac{x_{,,}}{a} + \frac{y_{,,}}{b} = 1 \ldots 3),$$

Diese Gleichungen enthalten a und b auch als unbekannte Grössen und müssen sich in der vorstehenden Form aufstellen lassen, da die neue Linie in beiden Punkten liegt.

Nun zeigt eine einfache Ueberlegung, dass die Gleichung einer jeden geraden Linie: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ auch geschrieben werden kann:

$$Ax + b = y, \text{ wenn } A = -\frac{b}{a} \text{ gesetzt wird.}$$

Führt man dies für die drei Gleichungen aus und subtrahirt 3) von 2) so entsteht:

$$Ax_{,} + b = y_{,} \ldots 2)$$

$$Ax_{,,} + b = y_{,,} \ldots 3)$$

$$A(x_{,} - x_{,,}) = y_{,} - y_{,,} \ ; \ A = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}}.$$

Ferner erhält man durch Subtraction der Gleichung 2) von der Gleichung 1):

$$\begin{array}{l} Ax + b = y \ldots 1) \\ Ax_{,} + b = y_{,} \ldots 2) \\ \hline A(x - x_{,}) = y - y_{,}. \end{array}$$

Durch Substitution des vorigen Werthes von A in letztere Gleichung entsteht:

$$y - y_{,} = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}} (x - x_{,})$$

Setzt man hierin $y = o$, so erhält man für die Coordinate x des auf der Axe gelegenen Punktes a:

$$o - y_{,} = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}} (x - x_{,})$$

$$x = a = \frac{x_{,,}y_{,} - x_{,}y_{,,}}{y_{,} - y_{,,}}$$

Setzt man ferner $x = o$, so erhält man für $y = b$: ... V),

$$y - y_{,} = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}} (o - x_{,})$$

$$y = b = \frac{x_{,}y_{,,} - x_{,,}y_{,}}{x_{,} - x_{,,}}.$$

Da die Punkte a und b aber geradezu die Axenabschnitte der gesuchten Linie darstellen, so sind dieselben hiernach ausgedrückt in den Coordinaten der zwei Punkte, durch die die gesuchte Linie geht.

6. Tangente des Neigungswinkels zweier Linien in einem rechtwinkeligen Axensystem.

Gegeben seien zwei Linien L L und L′ L′ in einem rechtwinkeligen Axensystem; dieselben sollen, im Felde des positiven Quadranten beispielsweise, zum Schnitt kommen. Für die Linie L L seien die Parameter:

$$AM = a \text{ und } BM = b$$

bekannt, für L′ L′ seien gleichfalls:

$$A'M = a, \text{ und } B'M = b,$$

gegeben. — Der Neigungswinkel der Linien sei ω; φ und $\varphi_{,}$ stellen die Neigungswinkel der Linien gegen die Y-Axe dar.

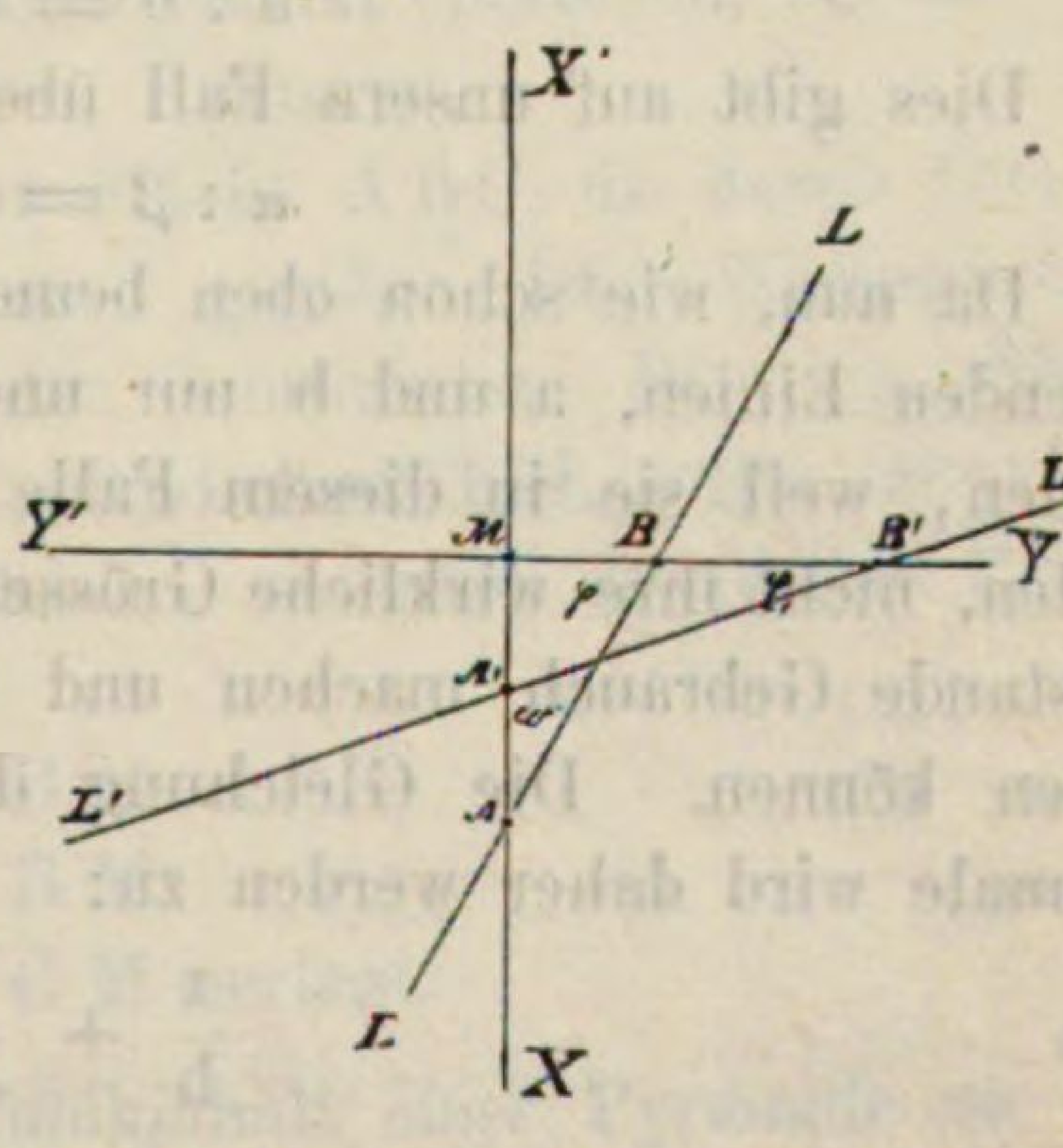


Fig. 6.

Alsdann ist φ als Aussenwinkel $= \omega + \varphi,$ und $\omega = \varphi - \varphi,$.
Ferner $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\varphi - \varphi,) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi,}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi,}$. Nun ist aber $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$ und $\operatorname{tg}\varphi, = \frac{a,}{b,}$. Setzt man diese Werthe ein, so folgt:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{ab, - a,b}{aa, + bb,} \qquad \ldots \text{VI}).$$

Für die Parallelität der Linien wird $\operatorname{tg}\omega = o$, was nur möglich ist, wenn: $ab, - a,b = o$,

$$\text{oder, wenn man hat: } a : b = a, : b, \qquad \ldots \text{VII}).$$

Für die Rechtwinkeligkeit der Linien muss $\operatorname{tg}\omega = \infty$ werden; dies kann nur stattfinden, wenn:

$$aa, + bb, = o \text{ ist, d. h. wenn man hat:}$$

$$a : b = b, : - a, \qquad \ldots \text{VIII}).$$

7. Normale aus dem Mittelpunkt der Axen auf eine gegebene Linie in einem rechtwinkeligen Axensystem.

Gegeben sei die Gleichung der Linie:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die Gleichung der Normale muss, da sie durch den Nullpunkt geht, von der Form sein:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = o,$$

eine Gleichung, worin α und β zu bestimmen sind. Nach VIII) findet für die Parameter zweier zu einander normalen Linien das Verhältniss statt:

$$a : b = b, : - a,.$$

Dies gibt auf unsern Fall übertragen:

$$\alpha : \beta = b : - a.$$

Da nun, wie schon oben bemerkt, bei den durch den Nullpunkt gehenden Linien, a und b nur uneigentlich noch Parameter genannt werden, weil sie in diesem Falle nur das Verhältniss derselben darstellen, nicht ihre wirkliche Grösse, so wird man auch hier von diesem Umstande Gebrauch machen und für $\alpha : \beta$ das Verhältniss $b : - a$ setzen können. Die Gleichung der durch den Nullpunkt gehenden Normale wird daher werden zu:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{-a} = o,$$

$$\text{d. h. } \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = o \qquad \ldots \text{IX}).$$

8. Dreizähliges, rechtwinkeliges Axensystem im Raum. Gleichung einer Fläche ausserhalb des Mittelpunkts.

Gegeben sei ein dreizähliges, rechtwinkeliges Axensystem, von dem wir im Raume ein für alle Male ausgehen wollen. Wir bezeichnen, entsprechend unseren später einzuführenden krystallographischen Axen a, b, c die von vorn nach hinten ziehende Axe mit X, die von rechts

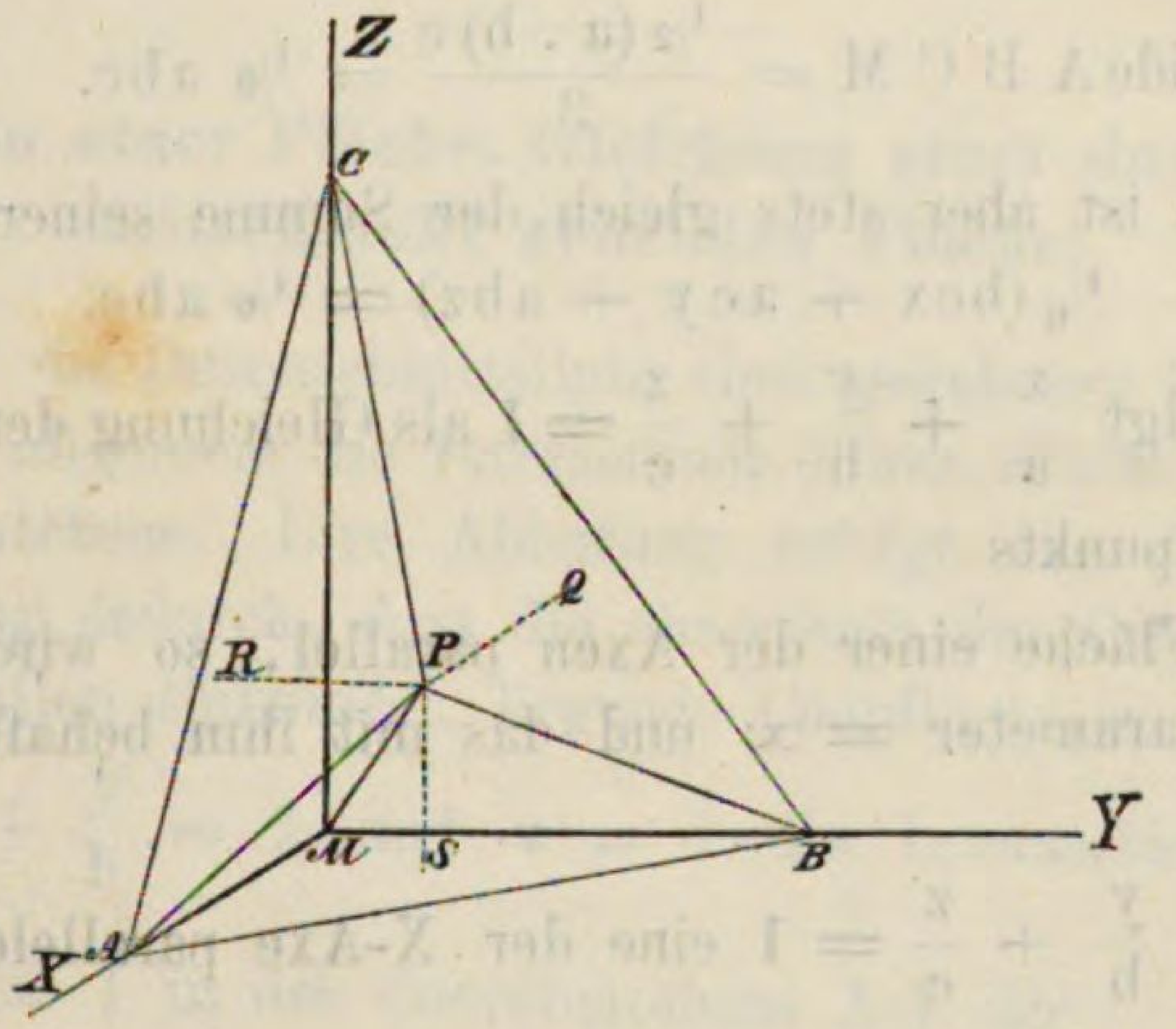


Fig. 7.

nach links sich erstreckende mit Y, die von oben nach unten gehende mit Z. Eine durch zwei Axen gelegte Ebene heisse Axen- oder Coordinatebene. Von den acht Octanten, die durch den Durchschnitt der drei Coordinatebenen um den Axenmittelpunkt entstehen, sei der Octant vorn, rechts, oben der der positiven Halbaxen.

Gesucht sei die Gleichung der Fläche ABC, die durch ihre Parameter MA = a, MB = b, MC = c gegeben ist. Wählen wir im Flächenfelde einen Punkt P mit den Coordinaten: PQ = x, PR = y, PS = z und ziehen hierauf die Centrodistanz PM, legen ferner durch PM und je einen Parameter Flächen, so wird die ganze Pyramide MABC in 3 Theilpyramiden:

PABM
PCBM
PACM zerlegt.

Nun ist, wie bekannt, der Cubikinhalt einer Pyramide $= \frac{G \cdot H}{3}$, in welcher Gleichung G die Grundfläche und H die Höhe der Pyramide bedeutet.

Also haben wir, wenn für jede Theilpyramide das in der betreffenden Coordinatebene befindliche rechtwinkelige Dreieck als Basis gilt, und die drei Coordinaten die entsprechenden Höhen vorstellen:

$$P\,A\,B\,M = \frac{(\tfrac{1}{2} a\,.\,b)\,z}{3} = \tfrac{1}{6}\,abz$$

$$P\,C\,B\,M = \frac{(\tfrac{1}{2} b\,.\,c)\,x}{3} = \tfrac{1}{6}\,bcx$$

$$P\,A\,C\,M = \frac{(\tfrac{1}{2} a\,.\,c)\,y}{3} = \tfrac{1}{6}\,acy$$

die ganze Pyramide $A\,B\,C\,M = \frac{\tfrac{1}{2}(a\,.\,b)\,c}{3} = \tfrac{1}{6}\,abc.$

Das Ganze ist aber stets gleich der Summe seiner Theile, also:

$$\tfrac{1}{6}(bcx + acy + abz) = \tfrac{1}{6}\,abc.$$

Hieraus folgt $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ als Gleichung der Fläche ausserhalb des Mittelpunkts ... X).

Geht die Fläche einer der Axen parallel, so wird der in dieser Axe liegende Parameter $= \infty$ und das mit ihm behaftete Glied verschwindet.

Hiernach ist $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ eine der X-Axe parallele Fläche

" " $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ " " Y " " "

" " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ " " Z " " " .. XI).

Wir sehen hieraus, dass die Gleichung einer jeden axoparallelen Fläche identisch ist mit der Gleichung ihrer Durchschnittslinie in der Ebene der beiden anderen Axen.

Geht die Fläche zwei Axen, d. h. also einer Axenebene parallel, so werden die in diesen beiden Axen liegenden Parameter $= \infty$ werden.

Hiernach ist $\frac{x}{a} = 1$ eine der Axenebene YZ parallele Fläche

" " $\frac{y}{b} = 1$ " " " XZ " "

" " $\frac{z}{c} = 1$ " " " XY " " .. XII).

Vorstehende Gleichungen können aber auch geschrieben werden:

$$x = a;\quad y = b;\quad z = c;$$

in dieser Form drücken sie den entsprechenden Coordinatebenen parallele Flächen aus, die vom Nullpunkt um die Distanzen a, b, c entfernt

sind. Legt man sich nun die Frage vor, wie möchte die Ebene darzustellen sein, die vom Nullpunkt um die Distanz o entfernt ist, die also in die Coordinatebene der beiden anderen Axen fällt, d. h. sie selbst vorstellt, so lautet die Antwort, diese Ebene wird erhalten, wenn man das Glied rechts vom Gleichheitszeichen in den letzten Gleichungen = o setzt.

Demnach bedeutet $x = o$ die Gleichung der Coordinatebene Y Z
„ „ $y = o$ „ „ „ „ X Z
„ „ $z = o$ „ „ „ „ X Y . XIII).

9. Intersection einer Fläche. Gleichung einer durch den Axenmittelpunkt gehenden Fläche.

Man nennt die Durchschnittslinie einer gegebenen Fläche mit einer Coordinatebene allgemein die Intersection dieser Fläche in der betreffenden Coordinatebene. Ihre Ableitung erfolgt aus der allgemeinen Flächengleichung dadurch, dass die ausserhalb der Coordinatebene, in der die Intersection stattfindet, liegende Coordinate, z. B. $z = o$ wird. Also stellt $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und $z = o$ die Intersection der Fläche $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ in der Coordinatebene X Y dar . . . XIV).

Diese Gleichung ist scheinbar identisch mit der letzten der Gleichungen XI, jedoch ist wohl zu berücksichtigen, dass diese letztere gewonnen wurde durch $c = \infty$, während hier, wo es sich um die Intersection handelt, $z = o$ als Bedingungsgleichung gegeben ist.

Geht die Fläche $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ durch den Nullpunkt, so müssen ihre drei Intersectionen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1; \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

ebenfalls durch den Nullpunkt gehen, d. h. von der Form werden:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = o; \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = o; \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = o.$$

Eine Fläche aber, deren Intersectionen diese Form haben, wird sich selbst offenbar nur durch die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = o \qquad \text{. . . XV),}$$

darstellen lassen. —

10. Punkt und Linie im Raum. Projicirende Ebenen. Projectionen.

Man kann den Punkt im Raum passend als Durchschnitt dreier Ebenen fixiren und die Linie im Raume als Durchschnitt zweier Ebenen auffassen. Diese Ebenen könnte man beliebig wählen, führt sie jedoch, der Einfachheit wegen, als Parallelflächen der Axen ein.

Man nennt nun jede Ebene, die durch eine Linie mit einer der Axen parallel gelegt wird, eine projicirende Ebene dieser Linie und den Durchschnitt dieser Ebene mit der Coordinatebene der beiden anderen Axen die Projection der Linie in dieser Axenebene. Es gibt für eine Linie so viel projicirende Ebenen als das Axensystem Axen zählt, also auch ebenso viel Projectionen; da nun die Gleichung einer projicirenden Ebene (Parallelfläche der Axe) in der Form identisch ist mit der der respectiven Projection (Durchschnitt der projicirenden Ebene mit der Coordinatebene), so wird jede Linie im Raume durch die Gleichungen ihrer drei Projectionen:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1; \quad \frac{x}{\gamma} + \frac{z}{\delta} = 1; \quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 1 \qquad \ldots \text{XVI)}$$

bestimmt sein. — Von diesen 3 Gleichungen sind jedoch schon zwei zur völligen Bestimmung der Linie ausreichend. Geht die Linie durch den Nullpunkt, so müssen dies ihre Projectionen ebenfalls thun, in den vorstehenden Gleichungen werden für diesen Fall die Glieder rechts vom Gleichheitszeichen = o zu setzen sein und die Gleichungen alsdann lauten:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0; \quad \frac{x}{\gamma} + \frac{z}{\delta} = 0; \quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 0 \qquad \ldots \text{XVII)};$$

in ihnen kommt es nicht mehr auf die absoluten Grössenwerthe, sondern nur noch auf das Verhältniss der Parameter α, β, γ, δ u. s. w. an.

11. Centronormale einer gegebenen Fläche.

Die Gleichung der Fläche sei gegeben durch $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Die Centronormale kann man sich entstanden denken aus dem Durchschnitt ihrer drei projicirenden Ebenen, welche in den drei respectiven Coordinatebenen die drei Projectionen von der allgemeinen Form:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0; \quad \frac{x}{\gamma} + \frac{z}{\delta} = 0; \quad \frac{y}{\varepsilon} + \frac{z}{\zeta} = 0 \text{ bilden.}$$

Jede der drei projicirenden Ebenen steht nun auf der Fläche und auf der Coordinatebene, in der ihre Projection sich befindet, senkrecht; es muss also auch jede der Projectionen der Normale (Durchschnittslinie einer der projicirenden Ebenen mit einer der Coordinatebenen) auf der gleichnamigen Intersection der Fläche (Durchschnittslinie der Fläche mit derselben Coordinatebene) senkrecht stehen.

Die Gleichungen der Intersectionen sind aber nach XIV):

$$z = o, \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$y = o, \ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$$
$$x = o, \ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Der Bedingung der Rechtwinkeligkeit zufolge müssen nach VIII) folgende Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\alpha a + \beta b = o$$
$$\gamma a + \delta c = o$$
$$\varepsilon b + \zeta c = o, \text{ daraus folgt aber:}$$
$$\alpha : \beta = b : -a$$
$$\gamma : \delta = c : -a$$
$$\varepsilon : \zeta = c : -b.$$

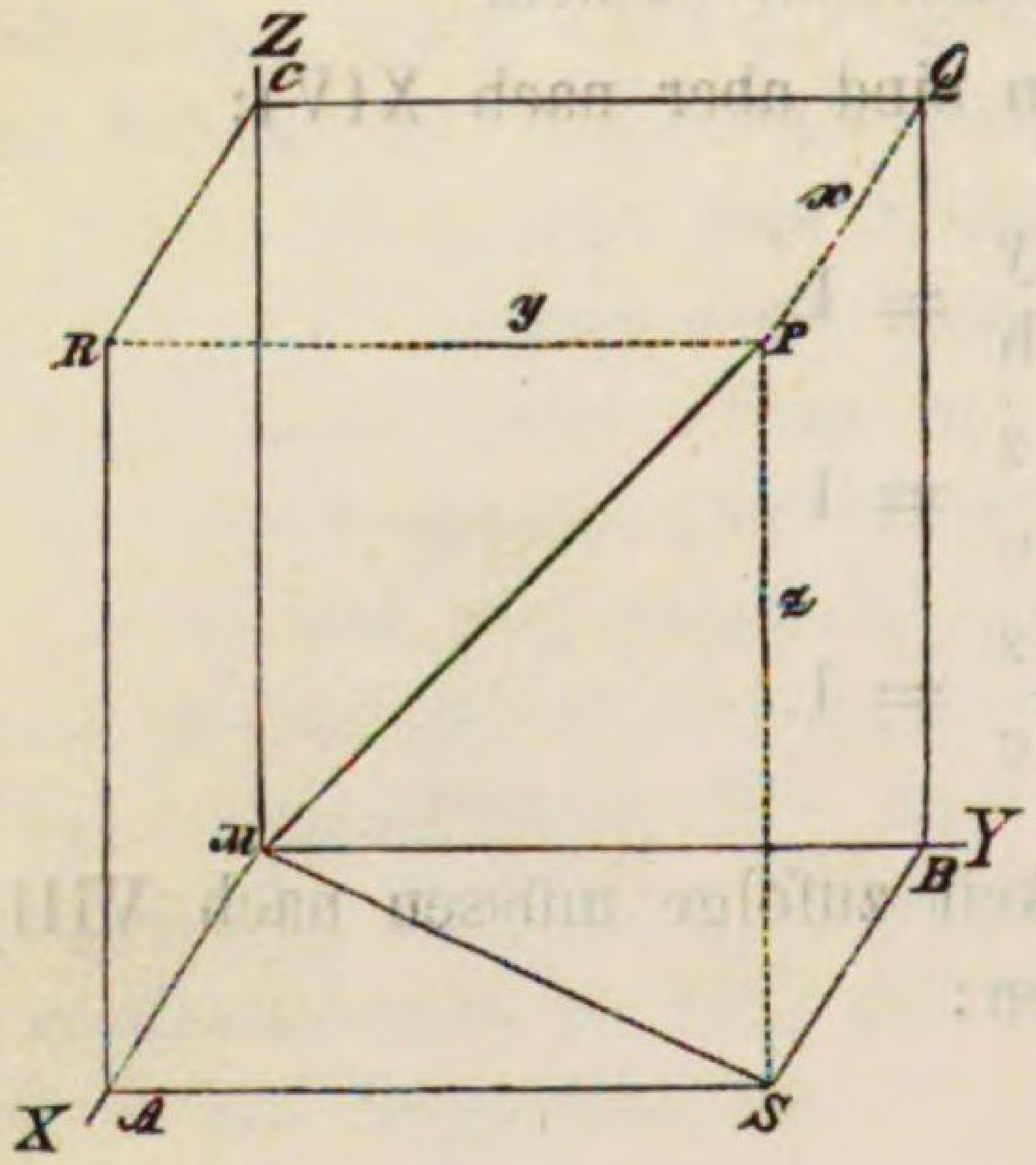
Führt man diese Verhältnisse der Parameter, auf welche es, da die Linien durch den Nullpunkt gehen, allein ankommt, in die obenstehenden Gleichungen ein, so folgen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = o \\ \frac{x}{c} - \frac{z}{a} = o \\ \frac{y}{c} - \frac{z}{b} = o \end{array}\right\} \quad \ldots \text{XVIII)}$$

als Gleichungen der Normale, von denen indessen wieder zwei zu ihrer völligen Bestimmung genügen.

12. Centrodistanz eines Punktes.

Es sei die Centrodistanz von P zu bestimmen, PM = D. Die Coordinaten von P sind:



$$PQ = AM = SB = x$$
$$PR = BM = SA = y$$
$$PS = CM = QB = z.$$

Zieht man nun MS, so ist

$$(AM)^2 + (AS)^2 = (MS)^2 = x^2 + y^2,$$

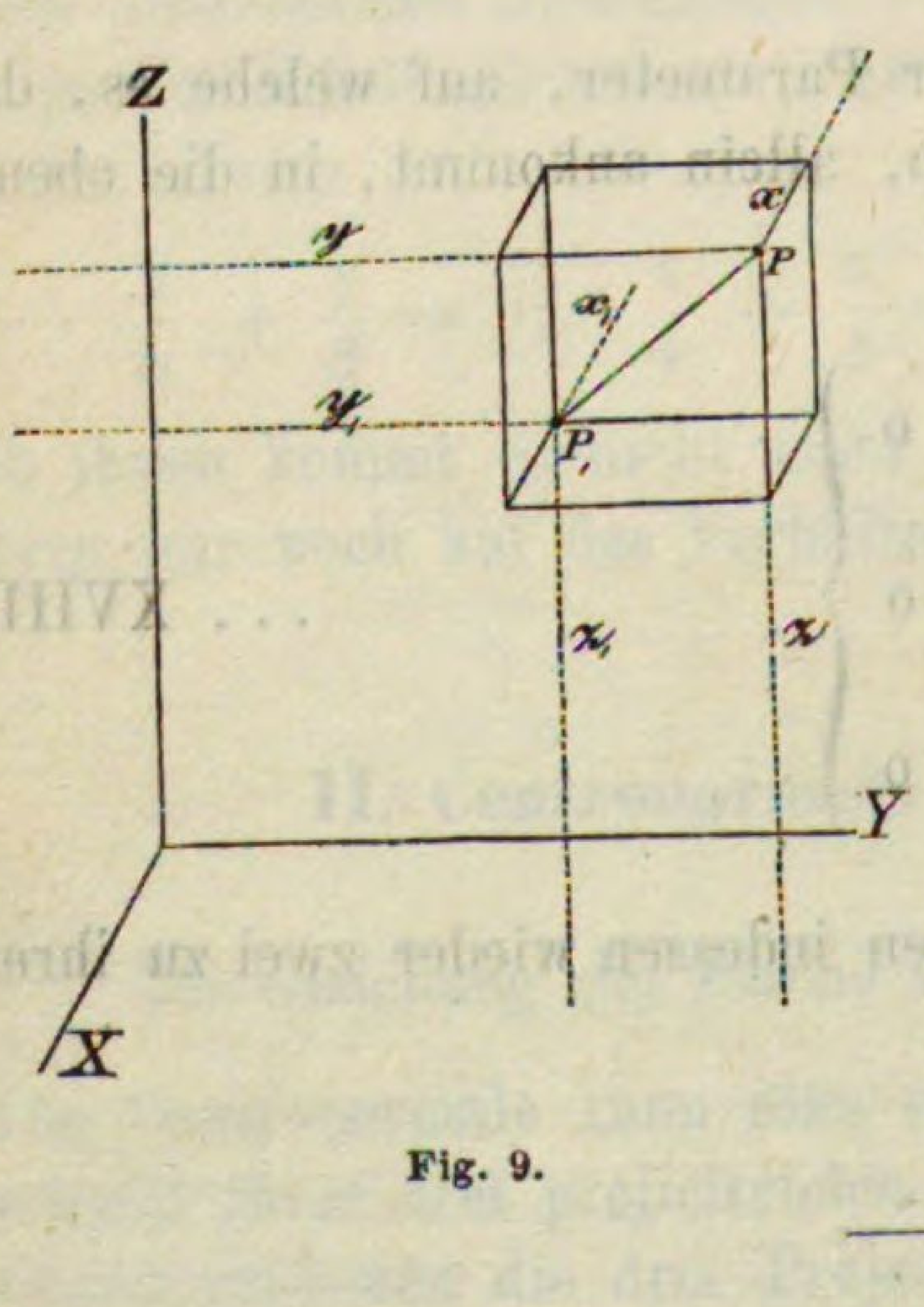
ferner $(MS)^2 + (PS)^2 = (MP)^2$,

daher $x^2 + y^2 + z^2 = D^2$

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots \text{XIX}).$$

Fig. 8.

13. Intervall zweier Punkte.



Gegeben sei ein Punkt P mit den Coordinaten x, y, z und ein Punkt $P_,$ mit den Coordinaten $x_,$, $y_,$, $z_,$, wobei letztere kleiner sein mögen, als erstere.

Das Intervall der beiden Punkte ist dann:

$$J = \sqrt{(x-x_,)^2 + (y-y_,)^2 + (z-z_,)^2} \text{. XX}).$$

Man sieht nämlich ohne Mühe ein, dass der Abstand $PP_,$ die Diagonale des Parallelopipedons ist, dessen drei Kanten von den drei Differenzen der gleichnamigen Coordinaten beider Punkte gebildet werden.

Fig. 9.

Mit den bis jetzt erlangten Kenntnissen können wir zur Ableitung der Winkelformel schreiten.

14. Ableitung der Winkelformel.

Ist uns ein dreizähliges, rechtwinkeliges Axensystem gegeben und berücksichtigen wir darin den Neigungswinkel w zweier im positiven Oktanten liegenden Flächen, so werden die Centronormalen dieser Flächen einen Winkel v einschliessen, der $= 180^0 - w$ ist.

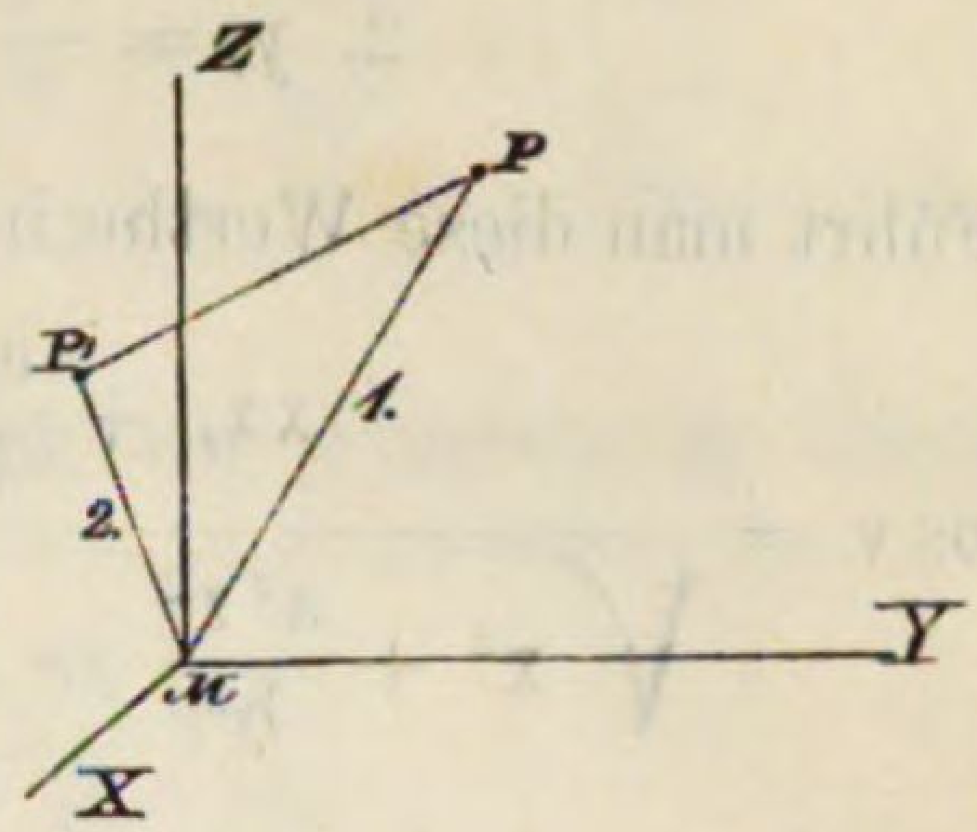


Fig. 10.

Seien gegeben die Gleichungen der Flächen:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;\quad \frac{x_{,}}{a_{,}}+\frac{y_{,}}{b_{,}}+\frac{z_{,}}{c_{,}}=1,$$

so sind nach XVIII) die Gleichungen der Centronormalen:

$$1.\ \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=o;\quad \frac{x}{c}-\frac{z}{a}=o.$$

$$2.\ \frac{x_{,}}{b_{,}}-\frac{y_{,}}{a_{,}}=o;\quad \frac{x_{,}}{c_{,}}-\frac{z_{,}}{a_{,}}=o.$$

Wählen wir in der Normale 1. einen Punkt P mit den Coordinaten x, y, z, in der Normale 2. einen Punkt $P_{,}$ mit den Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} PM=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ P_{,}M=\sqrt{x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2}\end{array}\right\}\ \ldots\ \text{n. XIX)}$$

$$PP_{,}=\sqrt{(x-x_{,})^2+(y-y_{,})^2+(z-z_{,})^2}\ \ldots\ \text{n. XX).}$$

Ferner hat man:

$$(PP_{,})^2=(PM)^2+(P_{,}M)^2-2(PM)(P_{,}M)\,.\cos v$$

$$\cos v=\frac{(PM)^2+(P_{,}M)^2-(PP_{,})^2}{2(PM)(P_{,}M)}$$

Setzt man hierin für PM, $P_{,}M$ und $PP_{,}$ die Werthe ein, so folgt:

$$\cos v=\frac{x^2+y^2+z^2+x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2-[(x-x_{,})^2+(y-y_{,})^2+(z-z_{,})^2]}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\sqrt{x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2}}$$

$$\cos v=\frac{xx_{,}+yy_{,}+zz_{,}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\sqrt{x_{,}^2+y_{,}^2+z_{,}^2}}.$$

Aus den Gleichungen der Centronormale folgen aber für y und z, sowie für $y_{,}$ und $z_{,}$ die Werthe:

$$1.\ y = -\frac{ax}{b};\quad z = -\frac{ax}{c}.$$

$$2.\ y_{,} = -\frac{a_{,}x_{,}}{b_{,}};\quad z_{,} = -\frac{a_{,}x_{,}}{c_{,}}.$$

Führt man diese Werthe in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\cos v = \frac{xx_{,} + \frac{ax}{b}\cdot\frac{a_{,}x_{,}}{b_{,}} + \frac{ax}{c}\cdot\frac{a_{,}x_{,}}{c_{,}}}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{a^2x^2}{c^2}}\cdot\sqrt{x_{,}^2 + \frac{a_{,}^2x_{,}^2}{b_{,}^2} + \frac{a_{,}^2x_{,}^2}{c_{,}^2}}} =$$

$$= \frac{xx_{,}\left(1 + \frac{aa_{,}}{bb_{,}} + \frac{aa_{,}}{cc_{,}}\right)}{xx_{,}\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1 + \frac{a_{,}^2}{b_{,}^2} + \frac{a_{,}^2}{c_{,}^2}}}$$

Für den wahren Winkel beider Flächen $w = 180 - v$ folgt endlich:

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{aa_{,}} + \frac{1}{bb_{,}} + \frac{1}{cc_{,}}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_{,}^2} + \frac{1}{b_{,}^2} + \frac{1}{c_{,}^2}}}$$

In dieser Form dient die Winkelformel hauptsächlich zur Ausrechnung von Zahlenbeispielen; während sie in der unten folgenden mehr zur Ermittelung allgemeiner Werthe in Buchstabenausdrücken verwandt wird. XXI) a u. b.

$$\cos w = -\frac{aa_{,}bb_{,} + aa_{,}cc_{,} + bb_{,}cc_{,}}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}\,.\,\sqrt{a_{,}^2b_{,}^2 + a_{,}^2c_{,}^2 + b_{,}^2c_{,}^2}}$$

Beide Formeln gelten für zwei Flächen:

$a : b : c$ und $a_{,} : b_{,} : c_{,}$.

Wollen wir die Axenschnitte der Flächen von den Axen unterscheiden, so müssen wir die Bezeichnung:

$ma : nb : pc$ und $m_{,}a : n_{,}b : p_{,}c$

einführen, alsdann erhalten wir:

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{mm_{,}a^2} + \frac{1}{nn_{,}b^2} + \frac{1}{pp_{,}c^2}}{\sqrt{\frac{1}{m^2a^2} + \frac{1}{n^2b^2} + \frac{1}{p^2c^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m_{,}^2a^2} + \frac{1}{n_{,}^2b^2} + \frac{1}{p_{,}^2c^2}}} \quad \text{XXII}^{a})$$

oder:

$$= -\frac{mm_{,}nn_{,}a^2b^2 + mm_{,}pp_{,}a^2c^2 + nn_{,}pp_{,}b^2c^2}{\sqrt{m^2n^2a^2b^2 + m^2p^2a^2c^2 + n^2p^2b^2c^2}\,.\,\sqrt{m_{,}^2n_{,}^2a^2b^2 + m_{,}^2p_{,}^2a^2c^2 + n_{,}^2p_{,}^2b^2c^2}} \quad \text{XXII}^{b})$$

oder:

$$= -\frac{\frac{a^2b^2}{pp,} + \frac{a^2c^2}{nn,} + \frac{b^2c^2}{mm,}}{\sqrt{\frac{a^2b^2}{p^2} + \frac{a^2c^2}{n^2} + \frac{b^2c^2}{m^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^2}{p,^2} + \frac{a^2c^2}{n,^2} + \frac{b^2c^2}{m,^2}}} \quad \ldots \text{XXII}^{c})$$

Wird in diesen Gleichungen $p = p, = c = 1$ gesetzt, so vereinfachen sie sich entsprechend.

Zuweilen bezeichnet man aber auch die Flächen in Bezug auf Axenschnitte und Axen durch:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi} \text{ und } \frac{a}{\mu,} : \frac{b}{\nu,} : \frac{c}{\pi,}$$

worin $\mu = \frac{1}{m}$, $\nu = \frac{1}{n}$, $\pi = \frac{1}{p}$ ist u. s. w.

Es nehmen alsdann die Winkelformeln auch andere Gestalten an und namentlich wird XXII[a]) zu

$$\cos w = -\frac{\pi\pi, a^2b^2 + \nu\nu, a^2c^2 + \mu\mu, b^2c^2}{\sqrt{\pi^2a^2b^2 + \nu^2a^2c^2 + \mu^2b^2c^2} \cdot \sqrt{\pi,^2a^2b^2 + \nu,^2a^2c^2 + \mu,^2b^2c^2}} \,.\, \text{XXII}^{a}).$$

Wird hierin $\pi = \pi, = c = 1$ gesetzt und nach μ und ν geordnet, so ergibt sich:

$$\cos w = -\frac{a^2b^2 + \mu\mu, b^2 + \nu\nu, a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2b^2 + \nu^2a^2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + \mu,^2b^2 + \nu,a^2}} \quad \ldots \text{XXIII}^{b}).$$

Von den vorstehend aufgeführten Schreibweisen der Winkelformel wird namentlich die Formel XXI[a]) sich leicht behalten lassen; aus ihr können dann zu jeder Zeit die anderen Schreibweisen abgeleitet werden.

15. Uebungsbeispiele zum Gebrauch der Formeln XXI a und b.

Die Formeln XXI[b]) kann dazu dienen, zu ermitteln, welche Beziehungen zwischen den Neigungswinkeln einer Fläche gegen die Coordinatebenen eines dreizähligen, rechtwinkeligen Axensystems und den Axen, respective Axenabschnitten stattfinden.

Nehmen wir an, die Fläche schneide die Axen a, b, c im positiven Oktanten in der Einheit, der Neigungswinkel gegen die Coordinatebene *XZ* heisse X, der gegen die Coordinatebene *YZ* heisse Y und der gegen *XY* habe die Bezeichnung Z. Alsdann wird man zu setzen haben:

	vorn —	rechts —	oben.
für die Axenschnitte der Fläche:	a :	b :	c.
für die Coordinatebene *XZ*:	∞ :	o :	∞.

$$\cos X = \frac{a.\infty\, b.o + a.\infty.c.\infty + b.o.c.\infty}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \cdot \sqrt{\infty^2.o^2 + \infty^2.\infty^2 + o^2.\infty^2}}.$$

Die Grösse ∞ tritt im rechten Theil vorstehender Gleichung als Factor im Quadrat auf; es werden demnach alle Glieder, die diese

Grösse nicht in derselben Potenz enthalten, gegen sie verschwinden müssen und es wird resultiren:

$$\cos X = \frac{ac}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

Weiter ist zu setzen:

	vorn	—	rechts	—	oben.
Fläche:	a	:	b	:	c.
Coordinatebene *YZ*:	o	:	∞	:	∞.

$$\cos Y = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}. \qquad \ldots \text{XXIV)}.$$

Endlich hat man:

	vorn	—	rechts	—	oben.
Fläche:	a	:	b	:	c.
Coordinatebene *XZ*:	∞	:	∞	:	o.

$$\cos Z = \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

In den vorstehenden drei Gleichungen für cos X, cos Y und cos Z fehlt das negative Vorzeichen. Man sieht leicht ein, warum. Da nämlich die Neigung der Fläche zu den Coordinatebenen in Betracht kommt, kann der Winkel nie grösser als 90^0 werden, folglich muss der Cosinus immer positiv sein.

Aus den Gleichungen XXIV) folgt:

$$\cos X : \cos Y : \cos Z = ca : bc : ab.$$

$$\cos X : \cos Y = a : b;\ \cos Z : \cos X = b : c;\ \cos Y : \cos Z = c : a\,.\ \text{XXV)}.$$

Ferner ergibt sich:

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1 \qquad \ldots \text{XXVI)},$$

eine Gleichung, die von beträchtlicher Wichtigkeit ist und namentlich auch zur Controle der Messungen verwendet wird.

Die Formel XXI[a]) wollen wir zur Uebung an einigen Beispielen des regulären, quadratischen und rhombischen Systems zur Anwendung bringen.

a. Reguläres System.

1. Gesucht der Neigungswinkel zweier Flächen von O von der Lage:

	vorn	—	rechts	—	oben;	vorn	—	links	—	oben.
Axenschnitte:	1	:	1	:	1 ;	1	:	—1	:	1.

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{1\,.\,1} + \frac{1}{1\,.\,-1} + \frac{1}{1\,.\,1}}{\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2}}\,.\sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{-1^2} + \frac{1}{1^2}}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \log. \text{num. } 1 = 0{,}0000000$$
$$- \log. \text{num. } 3 = 0{,}4771213$$
$$9{,}5228787 - 10.$$

Dazu findet sich der Winkel mit 70° 31′ 44″, von dem jedoch, wegen des negativen Vorzeichens, die Ergänzung zu 180° zu nehmen ist, um w zu erhalten; daher w = 109° 28′ 16″.

2. Gesucht der Neigungswinkel zweier Flächen von O von der Lage: vorn — rechts — oben; hinten — links — oben.
Axenschnitte: 1 : 1 : 1 ; —1 : —1 : 1.

$$\cos w = -\frac{-1 - 1 + 1}{\sqrt{1 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 1}} =$$
$$= -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}.$$ Dazu ist der Winkel = 70° 31′ 44″ und direct gleich w, des positiven Vorzeichens wegen.

3. Gesucht der Neigungswinkel zweier Flächen von O von der Lage: vorn — rechts — oben; hinten — links — unten.
Axenschnitte: 1 : 1 : 1 ; —1 : —1 : —1.

$$\cos w = -\frac{-1 - 1 - 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{-3}{3} = 1.$$

w = o, d. h. die Flächen bilden gar keinen Winkel und gehen einander parallel.

4. Gesucht der Neigungswinkel zweier Flächen von ∞O.
vorn — rechts — oben; vorn — rechts — oben.
Axenschnitte: 1 : ∞ : 1 ; ∞ : 1 : 1.

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{1 \cdot \infty} + \frac{1}{\infty \cdot 1} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty^2} + 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{\infty^2} + 1 + 1}} =$$
$$= -\frac{1}{2}; \log. \text{num. } 1 = 0{,}0000000$$
$$- \log. \text{num. } 2 = 0{,}3010300$$
$$9{,}6989700 - 10.$$

Dazu ist der Winkel 60° und folglich w = 120° 0′.

5. Gesucht ist der Neigungswinkel zweier Flächen von ∞O∞.
Die Lage ist: vorn — rechts — oben; vorn — rechts — oben.
Axenschnitte: 1 : ∞ : ∞ ; ∞ : ∞ : 1.

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{1 \cdot \infty} + \frac{1}{\infty \cdot \infty} + \frac{1}{\infty \cdot 1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^2} + 1}} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Zu einem Cosinus von o ist aber der Winkel, hier w = 90°.

6. Gesucht ist der Neigungswinkel zweier Flächen von $\infty O2$ in den längeren Kanten.

	vorn		rechts		oben;	vorn		rechts		oben.
Axenschnitte:	1	:	∞	:	2 ;	2	:	∞	:	1.

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{\infty.\infty}+\frac{1}{2.1}}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{2^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{\infty^2}+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}.\ \log.\ \text{num.}\ 4 = 0{,}6020600$$

$$-\ \log.\ \text{num.}\ 5 = 0{,}6989700$$

$$9{,}9030900 - 10.$$

Dazu ist der Winkel $= 36^0\ 52'\ 12''$ und $w = 143^0\ 7'\ 48''$.

7. Gesucht ist der Neigungswinkel der Flächen derselben Gestalt in den kürzeren Kanten.

	vorn		rechts		oben;	vorn		rechts		oben.
Axenschnitte:	2	:	∞	:	1 ;	∞	:	2	:	1.

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{2.\infty}+\frac{1}{\infty.2}+1}{\sqrt{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{\infty^2}+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{\infty^2}+\frac{1}{2^2}+1}} =$$

$$= -\frac{4}{5},$$ daher w ebenfalls $= 143^0\ 7'\ 48''$.

$\infty O2$ ist also die merkwürdige Varietät, deren Kanten gleiches Winkelmass besitzen, ein Umstand, den zu kennen uns von Interesse sein wird.

8. Gesucht ist der Neigungswinkel der Flächen von $4O2$ in den längsten Kanten.

	vorn		rechts		oben;	vorn		rechts		oben.
Axenschnitte:	1	:	2	:	4 ;	1	:	4	:	2.

$$\cos w = -\frac{1+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2^2}}} =$$

$$= -\frac{\frac{5}{4}}{\frac{21}{16}} = -\frac{20}{21}\ .\ \log.\ \text{num.}\ 20 = 1{,}3010300$$

$$-\ \log.\ \text{num.}\ 21 = 1{,}3222193$$

$$9{,}9788107 - 10.$$

Dazu ist der Winkel $= 17^0\ 45'\ 10''$, also $w = 162^0\ 14'\ 50''$.

9. Gesucht ist der Neigungswinkel der Flächen von 4O2 in den mittleren Kanten.

	vorn — rechts — oben;	vorn — rechts — unten.
Axenschnitte:	1 : 2 : 4;	1 : 2 : —4.

$$\cos w = -\frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{21}{16}}\cdot\sqrt{\frac{21}{16}}} = -\frac{19}{21}.$$

log. num. 19 = 1,2787536
— log. num. 21 = 1,3222193
9,9565343 — 10.

Dazu ist der Winkel = 25° 12′ 32″, also w = 154° 47′ 28″.

10. Gesucht ist der Neigungswinkel der Flächen von 4O2 in den kürzesten Kanten.

	vorn — rechts — oben;	vorn — rechts — oben.
Axenschnitte:	1 : 2 : 4;	2 : 1 : 4.

$$\cos w = -\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{21}{16}}\cdot\sqrt{\frac{21}{16}}} = -\frac{17}{21}.$$

log. num. 17 = 1,2304489
— log. num. 21 = 1,3222193
9,9082296 — 10.

Dazu ist der Winkel = 35° 57′ 2″, also w = 144° 2′ 58″.

b. Quadratisches System.

1. Gesucht ist am Zirkon (Axenverhältniss a:a:c = 1:1:0,640373) die Neigung von 3P3 : ∞P.

vorn — rechts — oben; vorn — rechts — oben.
1 : 3 : 1,921119; 1 : 1 : ∞.

$$\cos w = -\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{1{,}921119\,.\,\infty}}{\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{(1{,}921119)^2}}\cdot\sqrt{1+1+\frac{1}{\infty^2}}} =$$

$$= -\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{10}{9}+\frac{1}{(1{,}921119)^2}}\cdot\sqrt{2}}.$$

Ausrechnung des Zählers.

log. num. 4 = 0,6020600
— log. num. 3 = 0,4771213
0,1249387 log. des Zählers.

Ausrechnung des Nenners. Linker Theil.

log. num. 1,921119 = 0,2835543.
In's Quadrat erhoben = 0,5671086.
Ab von log. num. 1 = 9,4328914 — 10.
num. dazu = 0,2709514.

$$\text{Hierzu } \frac{10}{9} = 1{,}1111111$$

1,3820625.

Dazu der log. = 0,1405277.
Daraus die Wurzel = 0,0702638.

Ausrechnung des Nenners. Rechter Theil.

log. num. 2 = 0,3010300.
Daraus die Wurzel = 0,1505150.

log. des Nenners. Linker Thl. 0,0702638
log. des Nenners. Rechter Thl. 0,1505150
log. des Nenners 0,2207788.

log. des Zählers 0,1249387
— log. des Nenners 0,2207788
9,9041599 — 10.

Dazu der Winkel 36° 40′ 52″.
Also w = 143° 19′ 8″.

2. Gesucht am Anatas (a : a : c = 1 : 1 : 1,77713) die Neigung von ¼ P zu $^5/_{19}$ P5.

vorn — rechts — oben; vorn — rechts — oben.
1 : 1 : ¼c; 1 : 5 : $^5/_{19}$c.

log. ¼c = 9,6476592 — 10; log. $^5/_{19}$c = 9,6699356 — 10;
log. 5 = 0,6989700.

$$\text{Ausrechnung des Zählers} . \frac{1}{aa,} + \frac{1}{bb,} + \frac{1}{cc,} .$$

$$\frac{1}{aa,} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$+ \frac{1}{bb,} = \frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}2$$

$$+ \frac{1}{cc,} = \text{log. } 9{,}6476592 - 10$$

\+ log. 9,6699356 — 10
9,3175948 — 10.

Ab von log. 1 = 0,6824052

num. dazu 4,812882

6,012882

log. des Zählers 0,7790827.

Ausrechnung des Nenners. Linker Theil. $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$.

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} =$ 2

$\frac{1}{c^2} =$ log. 9,6476592 — 10

In's Quadrat erhoben = 9,2953184 — 10

Ab von log. 1 = 0,7046816

num. dazu = 5,066192

7,066192

log. dazu 0,8491854.

Daraus die Wurzel 0,4245927

log. des Nenners. Linker Theil.

Ausrechnung des Nenners. Rechter Theil. $\sqrt{\frac{1}{a_,^2} + \frac{1}{b_,^2} + \frac{1}{c_,^2}}$.

$\frac{1}{a_,^2} =$ 1

$\frac{1}{b_,^2} = \frac{1}{25}$ 0,04

$\frac{1}{c_,^2} =$ log. 9,6699356.

In's Quadrat erhoben = 9,3398712 — 10

ab von log. 1 = 0,6601288

num. dazu 4,572238

5,612238.

Der log. dazu ist 0,7491361

Daraus die Wurzel = 0,3745680

Hierzu der log. des

link. Thl. d. Nenners = 0,4245927

log. des Nenners = 0,7991607

log. des Zählers = 0,7790827

— log. des Nenners = 0,7991607

9,9799220 — 10.

Dazu ist der Winkel =

= 17° 17′ 18″.

Also w = 162° 42′ 42″.

c. Rhombisches System.

Gesucht ist am Chrysoberyll ($\breve{a} : \bar{b} : \acute{c}$ = 0,469979 : 1 : 0,579956) die Neigung von P zu P$\breve{2}$.

vorn	— rechts —	oben;	vorn	— rechts —	oben.
0,469979 :	1	: 0,579956;	0,939958 :	1	: 0,579956.

log. a = 9,6720785 — 10; log. 2a = 9,9731085 — 10;

log. c = 9,7633950 — 10.

Ausrechnung des Zählers. $\frac{1}{aa_{,}} + \frac{1}{bb_{,}} + \frac{1}{cc_{,}}$.

$\frac{1}{aa_{,}}$ = log. 9,6720785 — 10

\+ log. 9,9731085 — 10

9,6451870 — 10

Ab von log. 1 = 0,3548130, dazu num. = 2,263669

$\frac{1}{bb_{,}}$ 1

$\frac{1}{cc_{,}}$ = log. 9,5267900 — 10

Ab von log. 1 = 0,4732100; num. dazu . . 2,973103

6,236772

log. des Zählers = 0,7949599

Ausrechnung des Nenners. Linker Theil $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$.

$\frac{1}{a^2}$ = log. 9,6720785 — 10

In's Quadrat 9,3441570 — 10.

Ab von log. 1 = 0,6558430; num. dazu 4,527339

$\frac{1}{b^2}$ = ... 1

$\frac{1}{c^2}$ = ... 2,973103

8,500442

log. dazu = 0,9294415.

Daraus die Wurzel = 0,4647027 . log. des Nenners. Linker Theil.

Ausrechnung des Nenners. Rechter Theil $\sqrt{\frac{1}{a_{,}^2} + \frac{1}{b_{,}^2} + \frac{1}{c_{,}^2}}$.

$\frac{1}{a_{,}^2}$ = log. 9,9731085 — 10

In's Quadrat 9,9462170 — 10.

Ab von log. 1 = 0,0537830; num. dazu . . . 1,131835

$\frac{1}{b_{,}^2}$ = ... 1

$\frac{1}{c_{,}^2}$ = ... 2,973103

5,104938

log. dazu = 0,7079904.

Daraus die Wurzel 0,3539952 log. des Nenners Rechter Theil.
Dazu 0,4647207 log. des Nenners Linker Theil.
0,8187159 log. des Nenners.
log. des Zählers 0,7949599 Dazu ist der Winkel 18° 46′ 43″.
— log. des Nenners 0,8187159 Also w = 161° 13′ 17″.
9,9762440 — 10.

Wie diese beiden Formen der Winkelformel, werden auch die anderen Schreibweisen Verwendung finden können. Wenn man die Winkel eines ganzen Systems berechnet, wird man sich bald der Winkelformel, bald der Trigonometrie mit grösserem Vortheil bedienen. Letztere wird namentlich da vortheilhaft angewandt, woselbst Kanten berechnet werden sollen, die in den Richtungen der Krystallhauptschnitte oder senkrecht dazu verlaufen.

III. Einsicht in den Zusammenhang der Glieder eines Krystallsystems und graphische Darstellung desselben durch die Projection.

Hat man einfache, wenig flächenreiche Körper vor sich, so ist es schon nicht leicht, den Zusammenhang der einzelnen Glieder zu übersehen, die Sache wird immer schwieriger, je complicirter die Formen werden, bald tritt die Unmöglichkeit ein, auch nur noch einen annähernden Ueberblick zu gewinnen. Das Bedürfniss hier abzuhelfen lösen die Projectionsmethoden in befriedigendster Weise; durch sie werden alle Flächen einer complicirten Form, oder auch eines ganzen Systems, in einem geometrischen Bilde dem Beobachter vorgeführt, und es tritt alsdann der Zusammenhang aller Glieder klar zu Tage.

Das Verdienst, uns mit den Projectionen zuerst vertraut gemacht zu haben,* gebührt Prof. Neumann in Königsberg. Seine „Beiträge zur Krystallonomie 1823“, in denen dies geschehen, werden für alle Zeiten ein klassisches Werk bleiben.

Neumann hat zwei Methoden der Projection angegeben. Die eine berücksichtigt die aus dem Mittelpunkt eines Krystalls auf seine Flächen gefällten Normalen, welche sich entweder auf einer beliebigen, nicht durch den Mittelpunkt des Krystalls gehenden Ebene in Punkten darstellen (Neumann's graphische Punktmethode) oder, indem wir uns den Krystall im Mittelpunkt einer Kugel denken, von der Kugelober-

* Die erste Idee dazu findet sich bei Bernhardi, vergl. Marx, Geschichte der Krystallkunde 1825, p. 242 und 243.

fläche aufgefangen werden (NEUMANN's Kugelprojection namentlich von MILLER angewandt und vervollkommnet).

Die andere Methode, ebenfalls von NEUMANN angedeutet (l. c. p. 117 u. 118) wendet sich den Krystallflächen selbst zu. Sie ist von Prof. QUENSTEDT in Tübingen ausgebildet und in Anwendung gebracht worden und verdient, da sie die einfachste und unmittelbarste aller Projectionsmethoden ist, ganz vorzugsweise Beachtung. In unserer Darlegung werden wir uns ausschliesslich an diese QUENSTEDT'sche Projectionsmethode halten; für das erste Bedürfniss lassen sich durch sie die Verhältnisse des Zusammenhangs der Glieder eines Krystallsystems am einfachsten darstellen, und der Weiterstrebende schreitet durch sie am zweckmässigsten zu den anderen Methoden fort.

1. Allgemeine Betrachtungen.

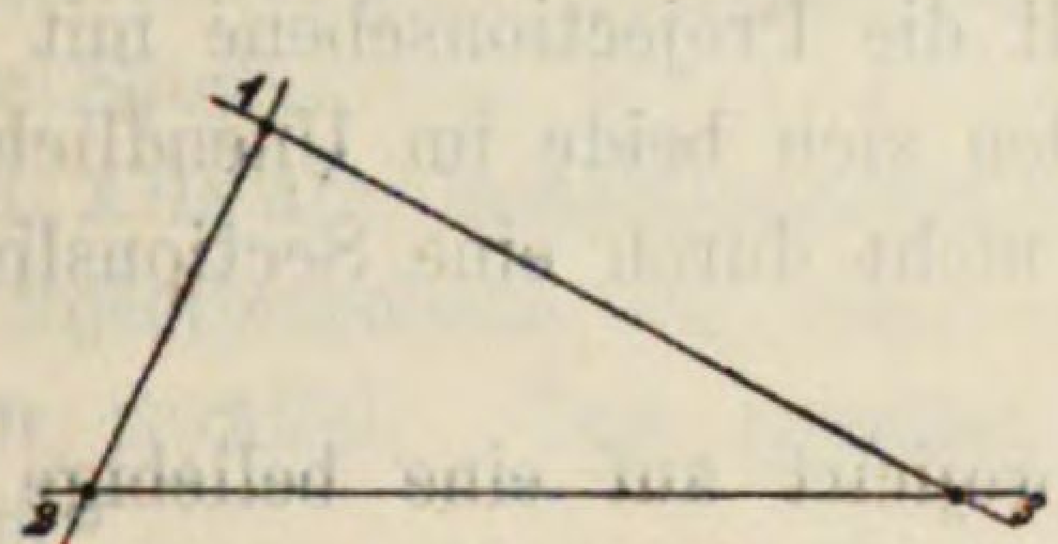
Man nennt, nach QUENSTEDT, den von zwei parallelen Flächen begrenzten Raum eines Krystalls, den Parallelraum oder Reductionsraum. Zum Zwecke der Projection lässt man an einem Krystallcomplex die die Reductionsräume begrenzenden Flächen zusammenfallen und so die Reductionsebenen entstehen. Diese werden nun, parallel sich selbst, so lange verrückt, bis sie alle durch einen gemeinsamen Punkt, den sog. Scheitelpunkt gehen; hierauf lässt man sie eine beliebige Ebene ausserhalb dieses Punktes schneiden und erhält in dieser Ebene, der Projectionsebene, die Schnitte der Reductionsebenen durch Linien angedeutet. Diese Linien führen den Namen Sectionslinien.

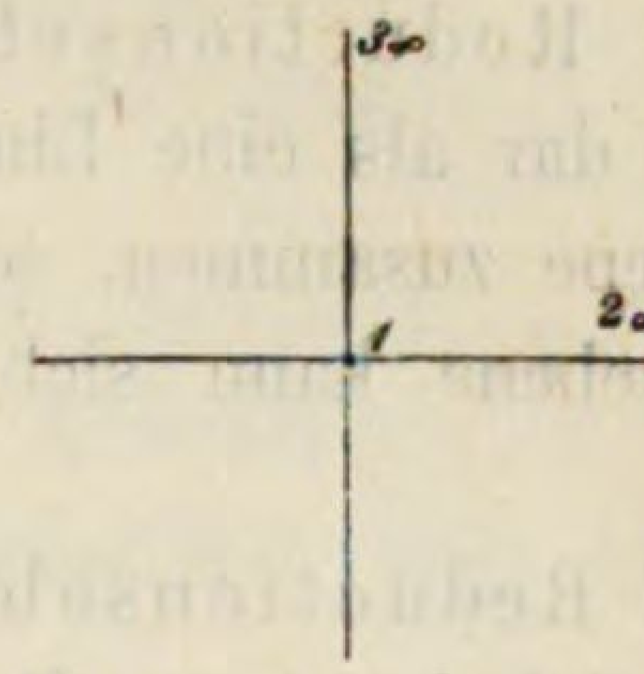
Ist die Projectionsebene eine ganz beliebige, d. h. keinem der Parallelräume des zu projicirenden Krystalls parallel, so werden sich auf ihr sämmtliche Reductionsebenen durch Sectionslinien anzeigen.

Ist dagegen die Projectionsebene einem Parallelraum des Formencomplexes parallel, so wird dessen Reductionsebene der Projectionsebene parallel gehen, d. h. sie erst im Unendlichen schneiden. Weiter liegen aber auch alle die Schnittpunkte im Unendlichen, welche die Sectionslinie der Reductionsebene, parallel der jetzt die Projectionsebene zieht, mit anderen Sectionslinien bildete, als die Projectionsebene noch eine beliebige war.

Beispiel. $\infty O \infty$, projicirt auf eine beliebige Ebene, stellt sich dar, wie es Fig. 11 zeigt, wir beobachten drei Sectionslinien, die in drei Punkten zum Schnitt kommen. Die drei Sectionslinien entsprechen den drei Reductionsebenen der drei Parallelräume der Gestalt. Wird $\infty O \infty$

dagegen auf eine Ebene projicirt, die parallel der Reductionsebene eines der drei Parallelräume der Gestalt ist, so werden sich in der Projection, Fig. 12, nur noch 2 Sectionslinien mit einem Schnittpunkt im Endlichen darstellen. Die beiden anderen Schnittpunkte werden da


Fig. 11.


Fig. 12.

liegen, wo die der Projectionsebene parallel gehende Reductionsebene dieselbe schneidet, nämlich in der Unendlichkeit.

Haben Flächen des Formencomplexes* die Lage, dass sie der Verbindungslinie des Scheitelpunktes mit der Projectionsebene parallel gehen, so werden ihre Reductionsebenen, wenn man sie projicirt, parallel sich selbst, so lange verrückt, bis sie durch die Linie gehen, welche Scheitelpunkt und Projectionsebene verbindet. Ihre Sectionslinien schneiden sich alsdann im Projectionsmittelpunkt.

Man sagt von allen Flächen, die sich in lauter parallelen Geraden schneiden, mit ihren Combinationskanten also einer und derselben Linie im Raume parallel gehen, sie lägen in einer Zone. Flächen, denen diese Eigenschaft zukommt, zeigen, dass ihre im Scheitelpunkt liegenden Reductionsebenen sich in demselben in einer geraden Linie, der Zonenaxe, schneiden. Ist die Projectionsebene eine beliebige, so ist die Zonenaxe einer Zone im Allgemeinen gegen sie geneigt und trifft sie in einem Punkte, dem Zonenpunkte. Durch diesen Punkt hindurch müssen aber auch nothwendig in der Projectionsebene die Sectionslinien sämmtlicher Reductionsebenen der betreffenden Zone gehen. Der Schnittpunkt zweier oder mehrerer Sectionslinien in der QUENSTEDT'schen Projection zeigt daher an, dass die diesen Sectionslinien entsprechenden Flächen in einer Zone liegen.

Ist die Projectionsebene einer Fläche des Zonenverbandes parallel, so geht die Zonenaxe der Projectionsebene parallel; sämmtliche in der Zone gelegenen Flächen, d. h. also die Reductionsebenen der Flächen und ihrer parallelen Gegenflächen, stellen sich als ein System paralleler

* Das Wort Fläche ist hier gebraucht für Fläche und Gegenfläche, respective für den zwischen beidenb efindlichen Parallelraum.

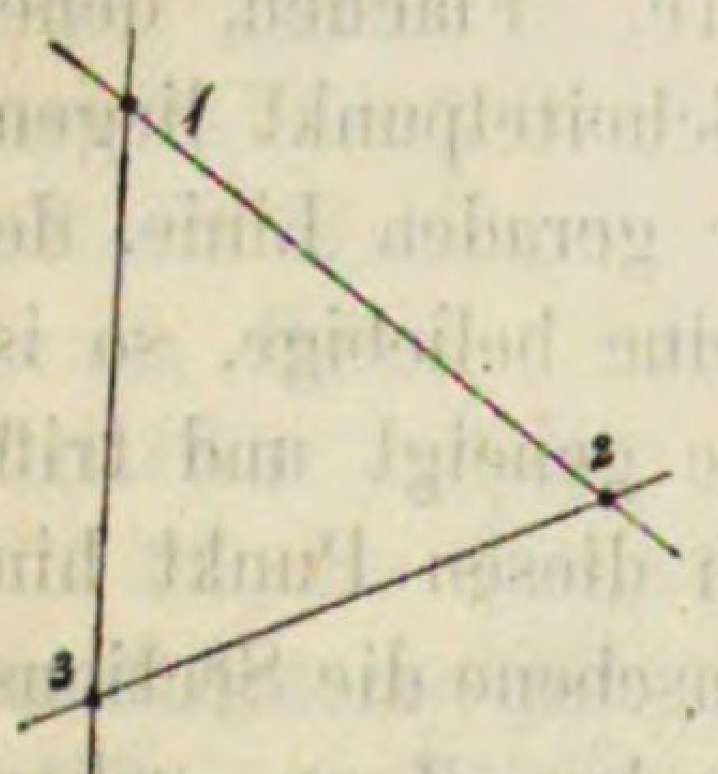
Sectionslinien dar, deren gemeinsame Richtung parallel der Zonenaxe ist.

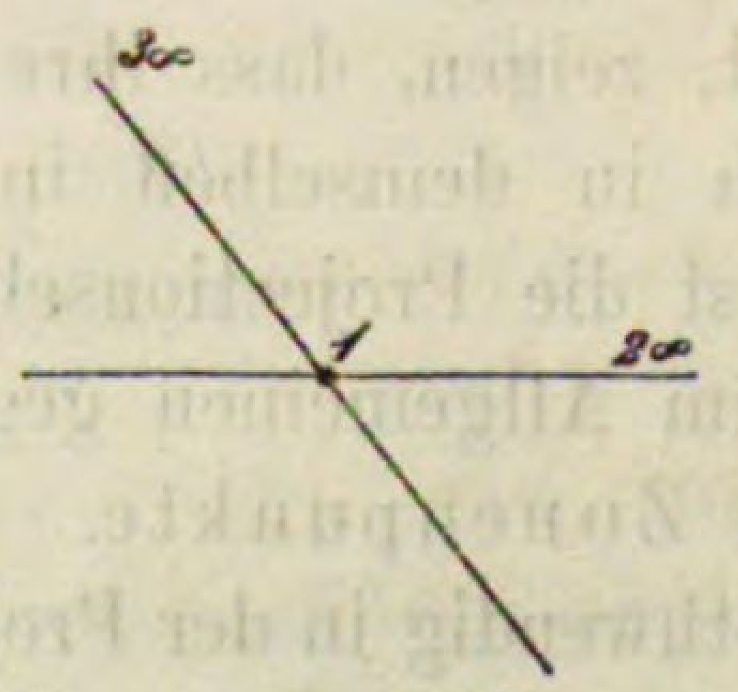
2. Uebungen im Projiciren.

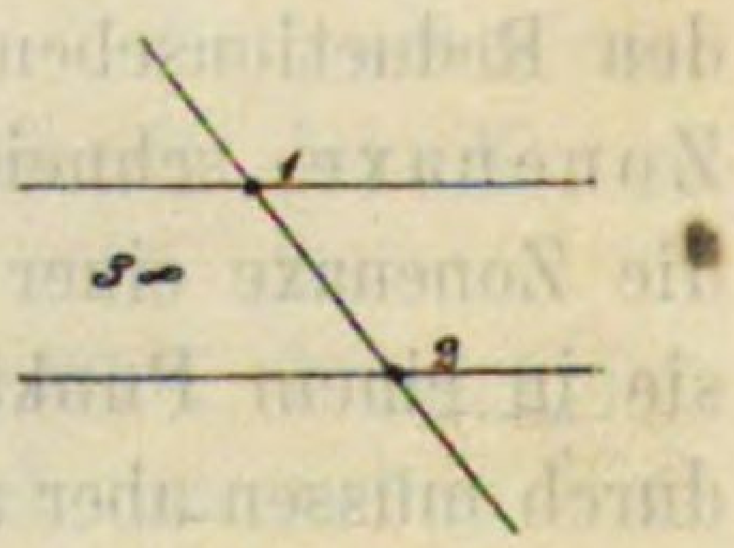
Eine Reductionsebene, projicirt auf eine beliebige Ebene, stellt sich dar als eine Linie. Fällt die Projectionsebene mit der Reductionsebene zusammen, so schneiden sich beide im Unendlichen, die Reductionsebene kann sich daher nicht durch eine Sectionslinie darstellen.

Zwei Reductionsebenen, projicirt auf eine beliebige Ebene, schneiden sich in einem Punkt. Fällt die Projectionsebene mit einer Reductionsebene zusammen, so projicirt sich nur eine Reductionsebene durch eine Sectionslinie. Geht die Projectionsebene der Zonenaxe beider Reductionsebenen parallel, so stellen sich dieselben als zwei parallele Sectionslinien dar.

Drei Reductionsebenen, projicirt auf eine beliebige Ebene, schneiden sich in drei Punkten; lässt man die durch die Sectionslinien und den Scheitelpunkt gehenden Reductionsebenen sich zu Parallelräumen entfalten, so entsteht der allgemeine Sechsflächner, das Hexaid. Aus seiner Projection, Fig. 13, ist ersichtlich, dass dieser Körper drei Zonen besitzt, je zwei seiner Sectionslinien schneiden sich in einem Punkte.


Fig. 13.


Fig. 14.


Fig. 15.

Von weiteren Fällen wollen wir untersuchen:

a. Es liegen je zwei Reductionsebenen in einer Zone, die Projectionsebene gehe einer Reductionsebene parallel.

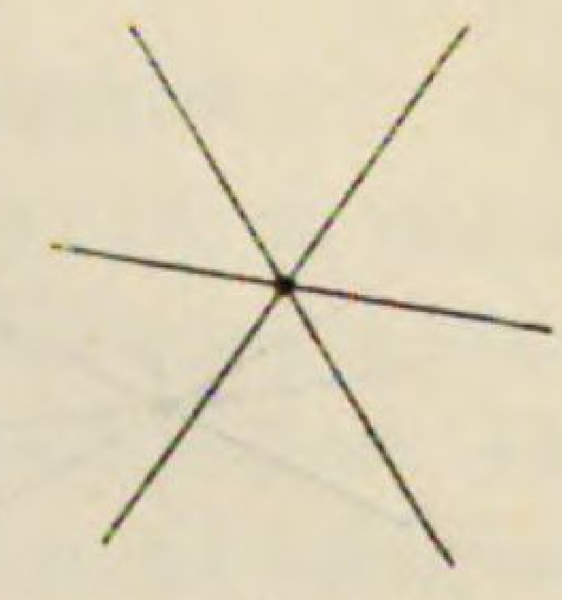
Wir erhalten als Projection zwei sich schneidende Linien, ein Zonenpunkt liegt im Endlichen, zwei im Unendlichen. Fig. 14.

b. Je zwei Reductionsebenen liegen in einer Zone, die Projectionsebene sei der Zonenaxe zweier Reductionsebenen parallel.

Als Projection erhalten wir, Fig. 15, zwei parallele Linien, von einer Geraden durchschnitten. Ein Zonenpunkt liegt im Unendlichen, zwei in der Endlichkeit.

c. Alle drei Reductionsebenen liegen in einer Zone, die Projectionsebene sei eine beliebige vierte Ebene.

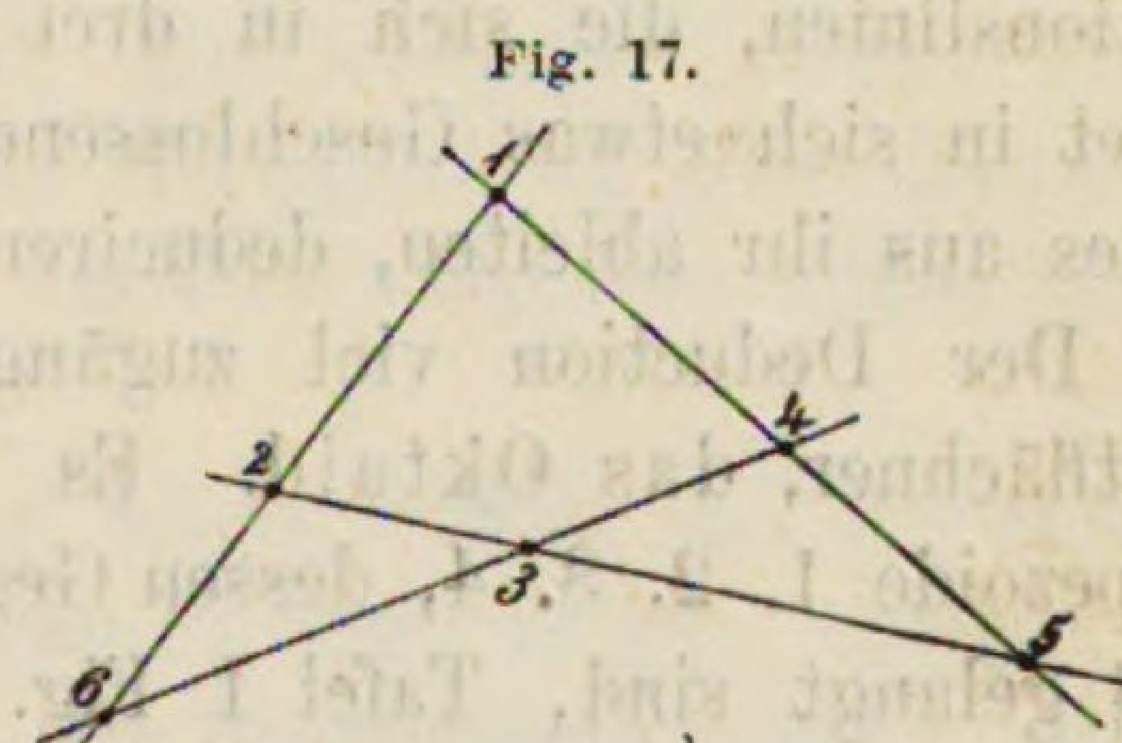
Die Projection, Fig. 16, gibt drei Linien, die sich in einem Punkte schneiden. Lässt man die den Sectionslinien entsprechenden Reductionsebenen sich zu Parallelräumen entfalten, so entsteht eine sechsseitige Säule.


Fig. 16.

d. Alle drei Reductionsebenen liegen in einer Zone, die Projectionsebene sei einer der drei Reductionsebenen parallel. Das Resultat der Projection sind zwei parallele Linien.

e. Alle drei Reductionsebenen liegen in einer Zone. Die Projectionsebene sei der Zonenaxe parallel. Es entstehen als Projectionsfigur drei parallele Linien.

V i e r R e d u c t i o n s e b e n e n bilden, auf eine beliebige Ebene projicirt, ein Trapezoid, dessen Gegenseiten sich bei der Verlängerung schneiden. Es resultiren somit sechs Zonenpunkte, von denen die, durch Verlängerung der Gegenseiten entstehenden, im Unendlichen liegen können. Entfalten sich die durch die Sectionslinien und den Scheitelpunkt gehenden Reductionsebenen zu Parallelräumen, so entsteht d e r a l l g e m e i n e A c h t f l ä c h n e r, d a s O k t a i d.

Fig. 17.


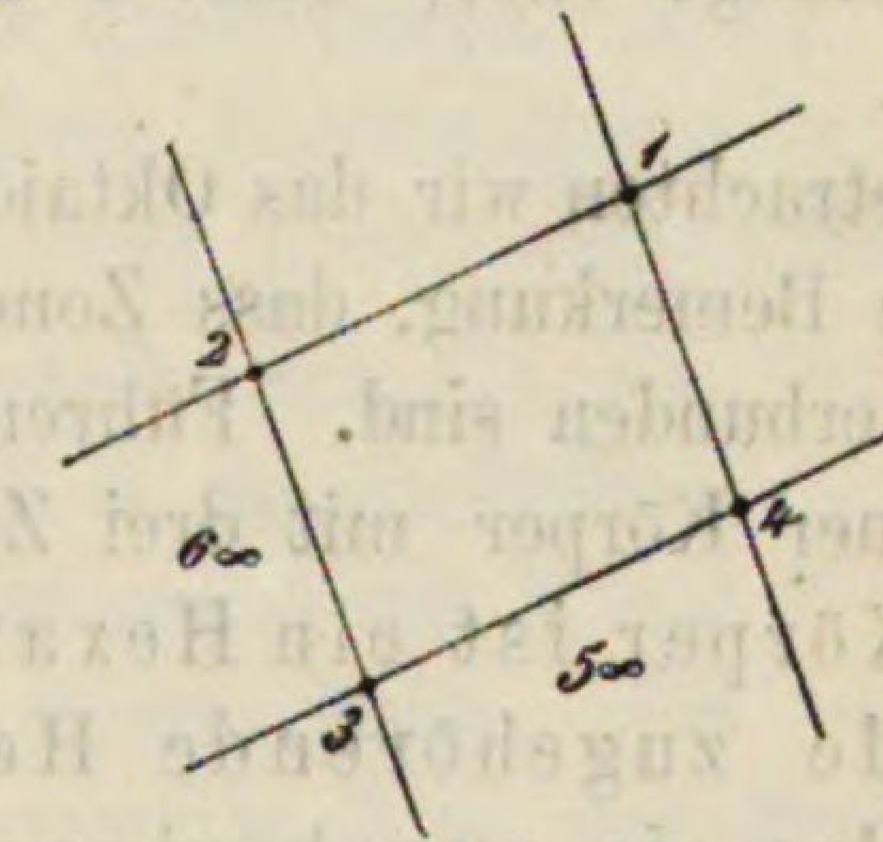


Fig. 18.

Fig. 17 stellt die Projection des allgemeinen Achtflächners mit endlichen Zonenpunkten dar, Fig. 18 zeigt uns dieselbe mit vier Zonenpunkten im Endlichen und zwei im Unendlichen.

Von Unterfällen wollen wir hier nur untersuchen:

a. Vier Reductionsebenen liegen in einer Zone, die Projectionsebene sei eine fünfte hinzutretende Ebene. — Es entstehen vier Linien, die sich in einem Punkte schneiden, die Projection der achtseitigen Säule.

b. Vier Reductionsebenen liegen in einer Zone, die Projectionsebene sei der Zonenaxe parallel. — Es entstehen vier parallele Linien.

c. Drei Reductionsebenen liegen in einer Zone, die vierte bilde mit jeder der ersteren eine weitere Zone, so dass zusammen eine drei-

flächige und drei zweiflächige Zonen entstehen; die Projectionsebene sei beliebig.

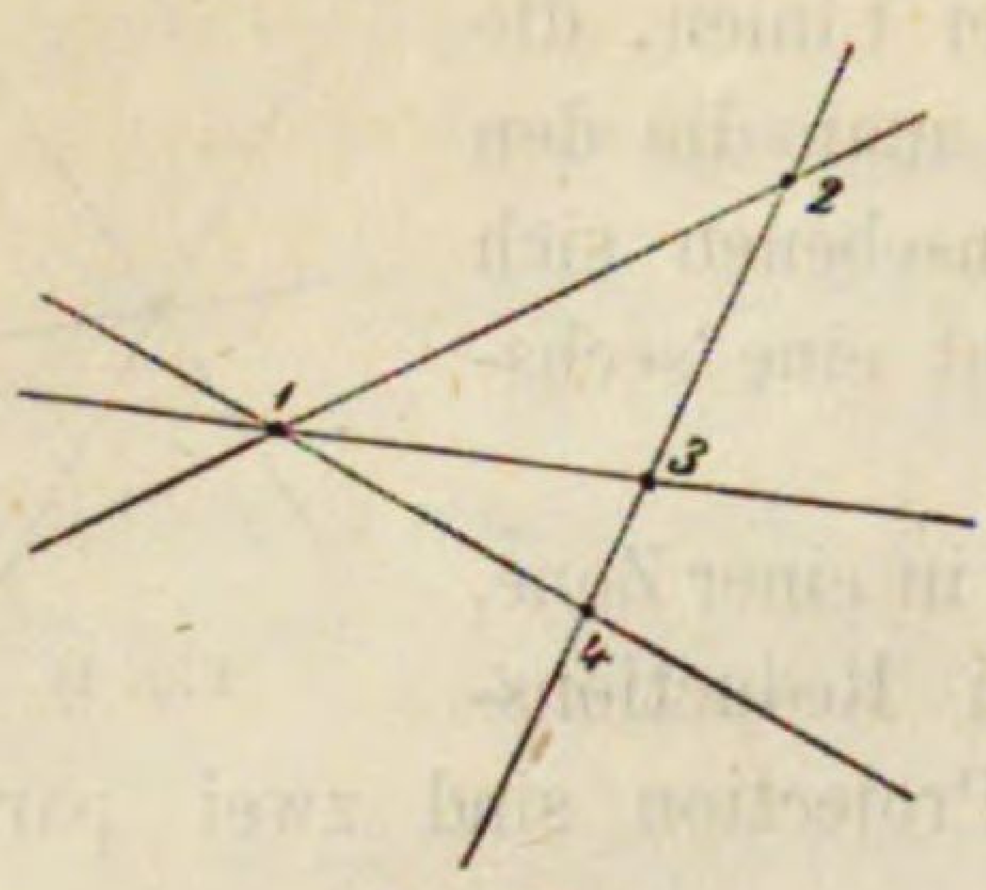


Fig. 19.

Es entsteht eine Projection, wie sie Fig. 19 zeigt, den sogenannten Vierzonenkörper darstellend. Lässt man die den Sectionslinien entsprechenden Reductionsebenen sich zu Parallelräumen entfalten, so resultirt eine sechsseitige Säule mit Endfläche.

3. Ableitung neuer Körper aus dem Oktaid. Deduction.

Der erste geschlossene Körper, der allgemeine Sechsflächner, das Hexaid, projicirt sich, wie wir sahen, auf eine beliebige Ebene mit drei Sectionslinien, die sich in drei Punkten schneiden. Die Projection bietet in sich etwas Geschlossenes, Vollendetes und man kann nichts Neues aus ihr ableiten, deduciren.

Der Deduction viel zugänglicher erweist sich der allgemeine Achtflächner, *das Oktaid*. Es besteht, wie wir sahen, aus einem Trapezoide 1. 2. 3. 4, dessen Gegenseiten noch zu den Schnittpunkten 5. 6 gelangt sind, Tafel I Fig. 1, und hat demnach sechs Zonenpunkte.

Betrachten wir das Oktaid in seiner Projection genauer, so machen wir die Bemerkung, dass Zonenpunkt 1 mit 3, 2 mit 4, 5 mit 6 noch nicht verbunden sind. Führen wir diese Verbindung aus, so resultirt ein neuer Körper mit drei Zonenpunkten, nämlich 7. 8. 9. *Dieser neue Körper ist ein Hexaid und zwar das dem vorliegenden Oktaide zugehörende Hexaid. Aus jedem Oktaide lässt sich also ein zugehöriges Hexaid deduciren.*

Man nennt nun die sechs Zonenpunkte 1. 2. 3. 4. 5. 6, in denen je zwei Oktaidsectionslinien sich treffen, die *Kantenzonenpunkte des Oktaids* und zeichnet die Zonenpunkte 7. 8. 9, in denen je zwei Sectionslinien des Hexaids liegen, als *Kantenzonenpunkte des Hexaids* aus.

Eine weitere Untersuchung lehrt, dass stets noch ein Hexaidkantenzonenpunkt mit zwei Oktaidkantenzonenpunkten verbunden werden kann, also: 7 mit 5 und 6; 8 mit 2 und 4; 9 mit 1 und 3. Führt man diese Verbindungen aus, so erhält man sechs neue Sectionslinien,

die besonders verzeichnet, ein Oktaid mit abgestumpften Seitenecken, das allgemeine zugehörige Dodekaid ergeben. Tafel I. Fig. 2.

Wir gelangen dadurch zu folgenden neuen Zonenpunkten:

Zuerst ergeben sich vier Zonenpunkte: 10. 11. 12. 13, in denen je drei Dodekaidsectionslinien sich treffen; es sind die Kantenzonenpunkte des Dodekaids, weiter finden wir zwölf Zonenpunkte: 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25 vor, in denen die Sectionslinien des Oktaids von denen des Dodekaids geschnitten werden, es sind die Diagonalzonenpunkte des Oktaids.

Der Gang der Deduction lieferte uns aus dem Oktaid sein zugehöriges Hexaid und Dodekaid; hiermit ist jedoch die Möglichkeit, noch andere Körper zu deduciren, durchaus nicht erschöpft, lehrt doch ein Blick auf die Figur, dass z. B. die Oktaidkantenzonenpunkte noch nicht mit allen Dodekaidkantenzonenpunkten verbunden sind u. s. w. Wir sehen gleichzeitig aber auch ein, dass bei fortschreitender Zonenpunktverbindung gewisse Schnittpunkte immer weiter hinausfallen, die Uebersicht dadurch sehr erschwert wird. Um diesem Uebelstande zu begegnen, gehen wir von der Projection des Oktaids aus, in der sich die Gegenseiten im Unendlichen schneiden. Tafel I Fig. 3.

Wir können dies unbeschadet der Allgemeinheit des Verfahrens thun und werden eine sehr übersichtliche Projectionsfigur erhalten, in welcher nunmehr einige Zonenpunkte in die Unendlichkeit fallen. Demzufolge müssen sich Flächen, die mit ihren Sectionslinien in diesen Zonenpunkten liegen, als ein System paralleler Linien darstellen.

Das Oktaid, mit dem wir beginnen, stellt sich als ein Parallelogramm dar, das die Zonenpunkte 1. 2. 3. 4 im Endlichen, 5 und 6 im Unendlichen besitzt. Durch Verbindung von 1 mit 3 und 2 mit 4, entsteht das zugehörige Hexaid, das, in diesem Falle, sich nur mit zwei Sectionslinien und einem Kantenzonenpunkt 7 in der Projection darstellt, während die dritte Sectionslinie, als Verbindungslinie der beiden im Unendlichen gelegenen Kantenzonenpunkte des Oktaids 5 und 6, ebenfalls im Unendlichen liegt. Mit ihr liegen aber ferner in der Unendlichkeit die Schnittpunkte, welche sie mit den zwei in der Projection auftretenden Sectionslinien des Hexaids bilden würde, die Kantenzonenpunkte 8 und 9 desselben. Da nun die Reductionsebene, welche der im Unendlichen liegenden dritten Sectionslinie des Hexaids entspricht, auch durch den Scheitelpunkt der Projection geht, so verläuft sie der Projectionsebene selbst parallel und die ganze

Projection des Oktaids, Tafel I Fig. 3, ist folglich auf eine Hexaidfläche, d. h. parallel einer solchen erfolgt.

Um nun noch das zugehörige Dodekaid zu erhalten, verbinden wir die im Unendlichen liegenden Oktaidkantenzonenpunkte 5 und 6 mit dem endlichen Hexaidkantenzonenpunkt 7 und thun das Gleiche mit den zwei im Unendlichen liegenden Hexaidkantenzonenpunkten 8 und 9 und den endlichen Oktaidkantenzonenpunkten 2 und 4, 1 und 3. In dem so entstehenden Projectionsbild des Dodekaids liegen sowohl die vier Dodekaidkantenzonenpunkte: 10. 11. 12. 13 als auch die zwölf Oktaiddiagonalzonenpunkte: 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25 im Endlichen.

Aus den bisher gemachten Betrachtungen können wir Nutzen ziehen. Zuerst ersehen wir aus der Ableitung des Hexaids und Dodekaids aus dem Grundkörper, dem Oktaide, dass, wenn man zwei bekannte Zonenpunkte durch eine Sectionslinie verbindet, diese Sectionslinie einem ganz bestimmten Körper angehört. Ferner lehrt uns ein Blick auf die Projection, dass die Sectionslinien des Hexaids die passendsten Axen des Oktaids abgeben. Sie sind, wie es der allgemeine Fall erfordert, ungleich gross und schiefwinkelig; die zugehörige dritte Axe ist die Schnittlinie der diesen beiden Axen entsprechenden Reductionsebenen, welche durch die Verbindungslinie des Scheitelpunktes mit dem Projectionsmittelpunkt dargestellt ist. Diese dritte Axe ist in ihrer Grösse im Allgemeinen von den in der Projectionsebene liegenden Axen verschieden und schiefwinkelig gegen beide geneigt. Nach Weiss bezeichnen wir die von vorn nach hinten ziehende Axe mit a, die von rechts nach links sich erstreckende mit b und die von oben nach unten verlaufende mit c. Vorzugsweise mögen a, b, c die vom Mittelpunkt ihren Ursprung nehmenden Halbaxen heissen. Mit Bezug auf dieselben erhalten die drei Hauptkörper die Bezeichnungen:

das Oktaid $=$ a : b : c,
das Hexaid $= \infty$ a : ∞ b : c,
das Dodekaid $=$ a : ∞ b : c.

Eine, zwei bekannte Zonenpunkte verbindende Sectionslinie schneidet die in der Projectionsebene liegenden Axen in ganz bestimmten Verhältnissen, ist also ihrer Axenlage nach bestimmt. Zwei ihrer Lage nach bekannte Sectionslinien ergeben einen Zonenpunkt von bestimmter Position. Die Ermittelung dieser und anderer Verhältnisse ist Gegenstand des folgenden Abschnitts, nach dem wir dann erst wieder die Betrachtungen über die Ableitung neuer Körper aus dem Oktaide aufnehmen werden.

4. Rechnung mit der Projection.

In Bezug auf ein dreizähliges Axensystem, dessen Axen a, b, c beliebig gross sind und sich unter beliebigen Winkeln schneiden mögen, ist eine Fläche ihrer Lage nach völlig bestimmt durch ihr Zeichen: ma : nb : pc. Dies Zeichen bringen wir auf die Form:

$$\frac{a}{{}^1/m} : \frac{b}{{}^1/n} : \frac{c}{{}^1/p} = \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{\pi},$$

in welcher Gestalt es für viele Betrachtungen sehr förderlich ist.

In der Projection denken wir uns alle Flächen durch den Scheitelpunkt gelegt und wählen den Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkt = 1. Die Verbindungslinie des Scheitelpunktes mit dem Projectionsmittelpunkt, die verticale Halbaxe c also, sei im Allgemeinen schief gegen die in der Projectionsebene liegenden Axen a und b geneigt, die ebenfalls unter einem von 90° abweichenden Winkel zu einander stehen, zur Darstellung des allgemeinsten Falls.

Da nun c = 1 allen Reductionsebenen gemeinsam ist, so kann man es bei Angabe des Zeichens der Sectionslinien in Gedanken weglassen. Sorgfältig muss jedoch darauf geachtet werden bei allen Multiplicationen und Divisionen, die sich auf alle drei Axen beziehen, also dem vollständigen Zeichen gelten.

Die Angabe des Zeichens einer die Axen a und b ausserhalb des Mittelpunktes schneidenden Sectionslinie macht sonach keine Schwierigkeiten, dasselbe wird $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ sein. Schneiden sich zwei solcher Sectionslinien, z. B. im Flächenfeld des positiven Quadranten, so bilden sie daselbst einen Zonenpunkt mit den Coordinaten ua : vb. An Stelle dieser Form führen wir ein $\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$, worin m = $^1/u$ und n = $^1/v$ ist.

Geht aber eine Sectionslinie durch den Mittelpunkt, so ist ihre Formel = oa : ob = $\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty}$. In dieser Gestalt ist die Formel nicht zu Rechnungszwecken zu verwenden, da aus ihr nicht ersichtlich ist, wie die Linie, parallel sich selbst aus dem Mittelpunkt gerückt, die Axen schneidet, in welcher Richtung sie also verläuft. Um daher von diesem Zeichen zu einem calculativen Zeichen einer durch den Mittelpunkt gehenden Sectionslinie überzugehen, denkt man sich die Linie, parallel sich selbst aus dem Mittelpunkt herausgerückt; sie wird alsdann die Axen in einem gewissen Verhältniss schneiden und das Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ erhalten. Hat man die Sectionslinie in der

angegebenen Weise aus dem Mittelpunkt gerückt, so wird nun aber auch die derselben entsprechende Reductionsebene c nicht mehr in der Einheit schneiden, sondern parallel c gehen, d. h. den Axenschnitt $\frac{c}{0}$ erhalten. Das Zeichen der Reductionsebene wird also werden:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : \frac{c}{0}.$$

Um diesem Zeichen wieder eine Form zu geben, in der c = 1 ist, berücksichtigen wir wiederum, dass $\frac{1}{0} = \infty$, alsdann kann der Ausdruck geschrieben werden:

$$\frac{a}{\mu \cdot \infty} : \frac{b}{\nu \cdot \infty} : c.$$

In dieser Form kann c, weil = 1, wieder in Gedanken fortgelassen werden und $\frac{a}{\mu \cdot \infty} : \frac{b}{\nu \cdot \infty}$ stellt alsdann eine Sectionslinie dar, die durch den Mittelpunkt geht, und welche nunmehr das Verhältniss derjenigen Axenschnitte enthält, die die Linie, parallel sich selbst aus dem Mittelpunkt gerückt, bildet.

Was nun schliesslich die Rechnung mit der Grösse ∞, die in diesem und in anderen Ausdrücken vorkommt, betrifft, so ist zu bemerken, dass mit derselben nicht zu rechnen ist, wie mit ganzen Zahlen. Vielmehr ist es zweckmässig, um Widersprüche zu vermeiden, für ∞ stets eine Hülfsgrösse $\varkappa$ einzuführen, über deren Werth man beliebig verfügen kann. Mit dieser Hülfsgrösse sind die Rechnungen zu führen, die Ausdrücke, in denen $\varkappa$ als Factor auftritt, durch Division mit $\varkappa$ davon zu befreien und schliesslich $\varkappa = \infty$ zu setzen. Alsdann werden natürlich alle Grössen, die $\varkappa$ als Divisor enthalten, verschwinden. Im Wesentlichen kommt die Operation darauf hinaus, die Glieder, welche kein ∞ besitzen, gegen die mit ∞ behafteten verschwinden zu lassen.

Die nun auseinander zu setzenden Rechnungsmethoden sind in ihren Grundzügen bereits von Weiss, Abh. d. Berl. Acad. 1820—21, p. 169 dargelegt worden, wie denn dieser berühmte Krystallograph auch der Erste war, der schon 1806 (Uebersetzung d. Lehrb. d. Min. v. Haüy 1804—1810. B. III p. 141) erkannte, dass eine Fläche durch das Fallen in zwei Zonen mathematisch bestimmt sei. — Pfaff hat in seinem Grundriss der mathematischen Verhältnisse der Krystalle 1853 p. 237 sich der Weiss'schen Behandlung angeschlossen.

Zum Zwecke der Rechnung mit der Projection hat Quenstedt in seinen verschiedenen Abhandlungen und Schriften Formeln hergeleitet, die mit den Weiss'schen identisch sind. Dieser Forscher wendet mehr

die directe, QUENSTEDT vorzugsweise die inverse Schreibweise der Formeln an. Beide beruhen auf längst bekannten Sätzen der analytischen Geometrie, die in ihrer Anwendung auf Krystallographie zu so schönen Resultaten führte. — Die genannten QUENSTEDT'schen Formeln finden sich gegeben und hergeleitet in POGG. Annalen B. 34 und 36, Methode der Krystallographie 1840 p. 68 u. f., Beiträge zur rechnenden Krystallographie 1848 p. 5 u. f., Mineralogie 1863 p. 44 u. f. und, neben manchen anderen zu demselben Zweck dienenden Bestimmungsmethoden, in dem neuesten und umfassendsten Werke QUENSTEDT's, dem Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie 1873 p. 188 u. f. — RAMMELSBERG hat, Lehrbuch der Krystallkunde 1852 p. 22 dieselben Formeln angenommen, ebenso SCHRÖDER in seinen Elementen der rechnenden Krystallographie 1852 p. 20 und f.; sie finden sich auch in dem kurzen aber empfehlenswerthen Leitfaden zum Studium der Krystallographie von WERNER 1867 aufgeführt.

Wir werden in der Folge besagte QUENSTEDT'sche Formeln auch annehmen, dieselben aber nicht besonders entwickeln, da sie bereits in unseren Sätzen aus der analytischen Geometrie enthalten sind.

a. Zonenpunktformel, dient zur Lösung der Aufgabe: Gegeben zwei Sectionslinien, gesucht die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes.

Wir erinnern uns diese Aufgabe schon früher gelöst zu haben. Es ergaben von den Sätzen aus der analytischen Geometrie die Gleichungen IV):

$$x = \frac{a a_, (b - b_,)}{a_, b - a b_,}; \qquad y = \frac{b b_, (a - a_,)}{a b_, - a_, b}.$$

Nach diesen Gleichungen kann man die Coordinaten des Zonenpunkts berechnen, wenn die Axenschnitte der den Zonenpunkt bildenden Sectionslinien gegeben sind. Um jedoch Uebereinstimmung mit den Formeln zu erzielen, die QUENSTEDT zumeist verwendet, nennen wir nun die früher mit X und Y bezeichneten Axen jetzt a und b, bezeichnen die Coordinaten des Durchschnittspunktes, die früher in der Form x, y gegeben waren, jetzt mit $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ und stellen endlich die Pa-

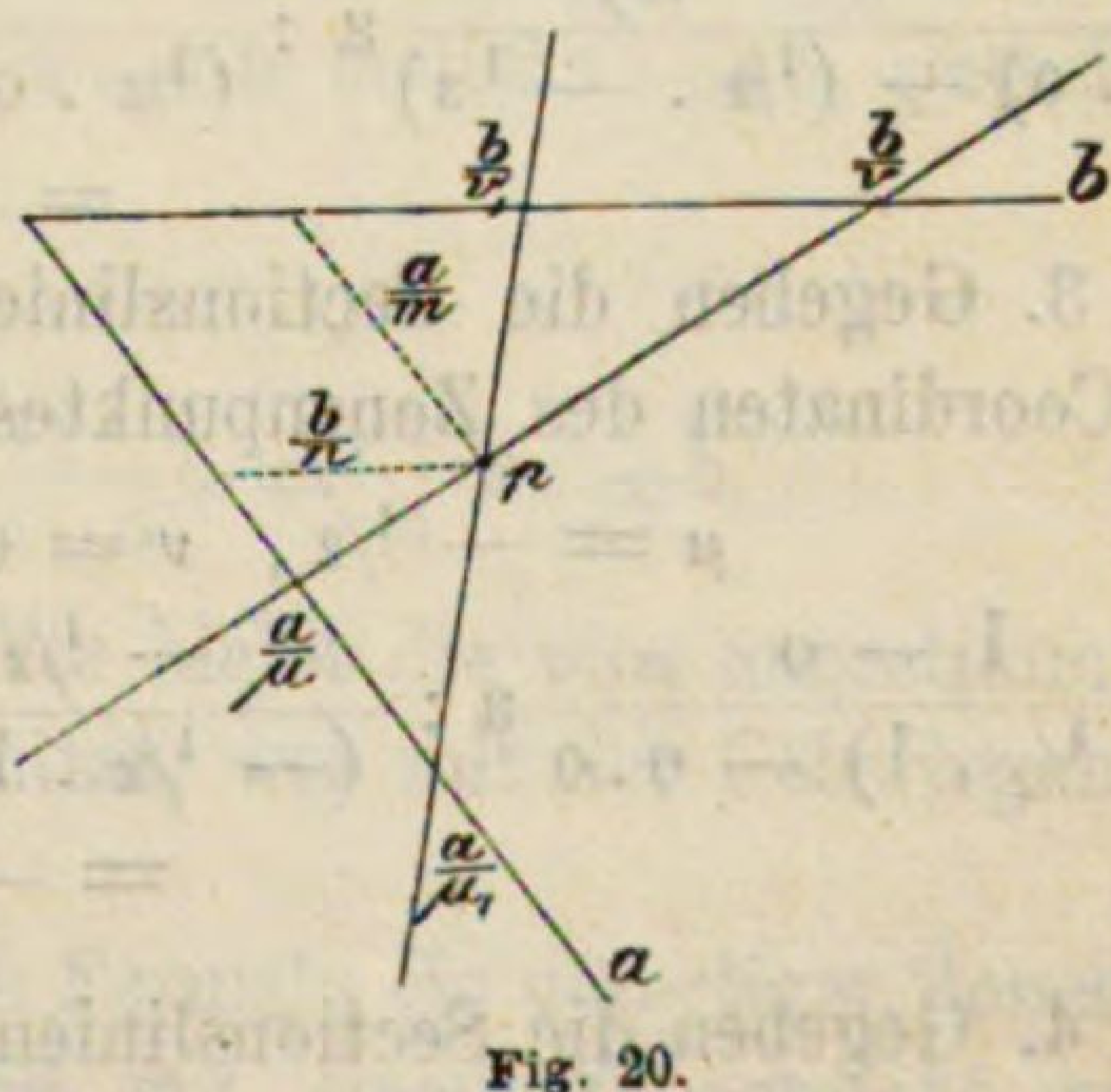


Fig. 20.

rameter beider Linien, früher durch a, b, a,, b, gegeben, jetzt in der Form $\frac{1}{\mu}$, $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{\mu_{,}}$, $\frac{1}{\nu_{,}}$ dar.

Führt man diese Substitutionen in den Gleichungen IV) aus, so folgt:

$$\frac{\frac{1}{\mu\mu_{,}}\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu_{,}}\right)}{\frac{1}{\mu_{,}\nu}-\frac{1}{\mu\nu_{,}}}=\frac{\nu_{,}-\nu}{\mu\nu_{,}-\mu_{,}\nu}\,a$$

$$\text{und}\ \frac{\frac{1}{\nu\nu_{,}}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu_{,}}\right)}{\frac{1}{\mu\nu_{,}}-\frac{1}{\mu\nu_{,}}}=\frac{\mu_{,}-\mu}{\mu_{,}\nu-\mu\nu_{,}}\,b.$$

Dividirt man schliesslich Zähler und Nenner von b mit — 1, so hat man die Nenner von a und b gleichlautend gemacht und es erfolgt für die Coordinaten des Zonenpunkts p:

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{n}=\frac{\nu_{,}-\nu}{\mu\nu_{,}-\mu_{,}\nu}\,a:\frac{\mu-\mu_{,}}{\mu\nu_{,}-\mu_{,}\nu}\,b.$$

Diese Formel heisst die Z o n e n p u n k t f o r m e l.

Beispiele:

1. Gesucht der Zonenpunkt, den die Sectionslinien 2a:2b und $^3/_2$a : 3b bilden.

$$\mu=\tfrac{1}{2},\ \nu=\tfrac{1}{2}\ \ ;\ \ \mu_{,}=\tfrac{2}{3},\ \nu_{,}=\tfrac{1}{3}.$$

$$\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\,a:\frac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}\,b=$$

$$=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}-\frac{2}{6}}\,a:\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}-\frac{2}{6}}\,b=a:b.$$

2. Gegeben die Sectionslinien $^3/_2$a : — 3b und 2a : ∞b, gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

$$\mu=\tfrac{2}{3},\ \nu=-\tfrac{1}{3}\ \ ;\ \ \mu_{,}=\tfrac{1}{2},\ \nu_{,}=0.$$

$$\frac{0-(-\frac{1}{3})}{(\frac{2}{3}\cdot 0)-(\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{3})}\,a:\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{(\frac{2}{3}\cdot 0)-(\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{3})}\,b=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}\,a:\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}\,b=$$

$$=2a:b.$$

3. Gegeben die Sectionslinien — 2a : ∞b und ∞a : b, gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

$$\mu=-\tfrac{1}{2},\ \nu=0\ \ ;\ \ \mu_{,}=0,\ \nu_{,}=1.$$

$$\frac{1-0}{(-\frac{1}{2}\cdot 1)-0\cdot 0}\,a:\frac{-\frac{1}{2}-0}{(-\frac{1}{2}\cdot 1)-0\cdot 0}\,b=\frac{1}{-\frac{1}{2}}\,a:\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\,b=$$

$$=-2a:b.$$

4. Gegeben die Sectionslinien $\frac{a}{\frac{1}{2}\cdot\infty}:\frac{b}{-\infty}$ (entsprechend der

Fläche 2a : — b : ∞c) und $\frac{a}{0} : \frac{b}{1}$ (entsprechend der Fläche ∞a : b : c), gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

$$\mu = \tfrac{1}{2}\varkappa,\quad \nu = -\varkappa \quad ; \quad \mu' = 0,\quad \nu' = 1.$$

$$\frac{1-(-\varkappa)}{(\tfrac{1}{2}\varkappa\,.\,1)-(0\,.\,-\varkappa)}a : \frac{\tfrac{1}{2}\varkappa - 0}{(\tfrac{1}{2}\varkappa\,.\,1)-(0\,.\,-\varkappa)}b.$$

Dividirt mit $\varkappa$:

$$= \frac{\frac{1}{\varkappa}+1}{\tfrac{1}{2}+0}a : \frac{\frac{1}{2}-\frac{0}{\varkappa}}{\tfrac{1}{2}+0}b.$$

$\varkappa = \infty$:

$$\frac{1}{\tfrac{1}{2}}a : \frac{\tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{2}}b = 2a : b.$$

5. Gegeben die Sectionslinien 2a : 2b und a : b, gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

$$\mu = \tfrac{1}{2},\quad \nu = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad \mu_{,} = 1,\quad \nu_{,} = 1.$$

$$\frac{1-\tfrac{1}{2}}{\tfrac{1}{2}\,.\,1 - 1\,.\,\tfrac{1}{2}}a : \frac{\tfrac{1}{2}-1}{\tfrac{1}{2}\,.\,1 - 1\,.\,\tfrac{1}{2}}b = \frac{\tfrac{1}{2}}{0}a : \frac{-\tfrac{1}{2}}{0}b =$$

$$= \infty a : -\infty b,$$

d. h. der Zonenpunkt dieser beiden parallelen Sectionslinien liegt in einer ihrem Verlaufe entsprechenden Richtung in der Unendlichkeit, jedoch ist die unendlich grosse Coordinate b negativ zu nehmen, während die ebenfalls unendlich grosse Coordinate a positiv ist. In der Projection wird daher dieser Zonenpunkt in den Quadranten vorn links fallen, wenn wir von dem Quadranten vorn rechts als dem positiven ausgehen und in diesen die Axenschnitte der beiden Sectionslinien verlegen.

6. Schliesslich wollen wir noch untersuchen, welches Resultat die Formel gibt, wenn man mit ihr den Schnittpunkt zweier einer Axe parallelen Sectionslinien ermitteln, d. h. die Coordinaten desselben darstellen will. Gegeben die Sectionslinien a : ∞b und 2a : ∞b, gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

$$\mu = 1,\quad \nu = 0 \quad ; \quad \mu_{,} = \tfrac{1}{2},\quad \nu_{,} = 0.$$

$$\frac{0-0}{1\,.\,0 - \tfrac{1}{2}\,.\,0}a : \frac{1-\tfrac{1}{2}}{1\,.\,0 - \tfrac{1}{2}\,.\,0}b = \frac{0}{0}a : \infty b,$$

d. h. von den Coordinaten des Zonenpunkts bleibt die eine unbestimmt, die andere wird unendlich gross, ein Resultat, was mit der Ueberlegung im Einklang steht.

— Soll in den später mitzutheilenden Formeln ein derartiger Zonenpunkt benutzt werden, um in Verbindung mit einem Zonenpunkt mit

bestimmter endlicher Coordinate a das Zeichen der durch beide gehenden Sectionslinie zu ermitteln, so ist die bestimmte Coordinate a des zweiten Zonenpunktes als Axenschnitt a der Sectionslinie einzuführen, während die Coordinate b des zweiten Zonenpunktes jedenfalls gegen die unendliche Coordinate des ersteren verschwindet und letztere den Axenschnitt liefert.

Beispiel. Man habe $\frac{0}{0}$ a : ∞b als Coord. des ersten Zonenpunkts, — $^3/_2$ a : 2 b als Coordinaten des zweiten, so wird die in beiden liegende Sectionslinie vom Zeichen — $^3/_2$ a : ∞b sein. — Sind die Coordinaten des ersten Zonenpunkts dieselben, die des zweiten dagegen, z. B. 3 a : o b, so wird wieder die in beiden liegende Linie von 3 a : ∞b gehen.

b. Kantenzonengesetz.

Der Zonenpunkt, den man als Schnittpunkt einer allgemeinen Sectionslinie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ mit der Sectionslinie der Säule $\frac{a}{1 . \infty} : \frac{b}{- 1 . \infty}$

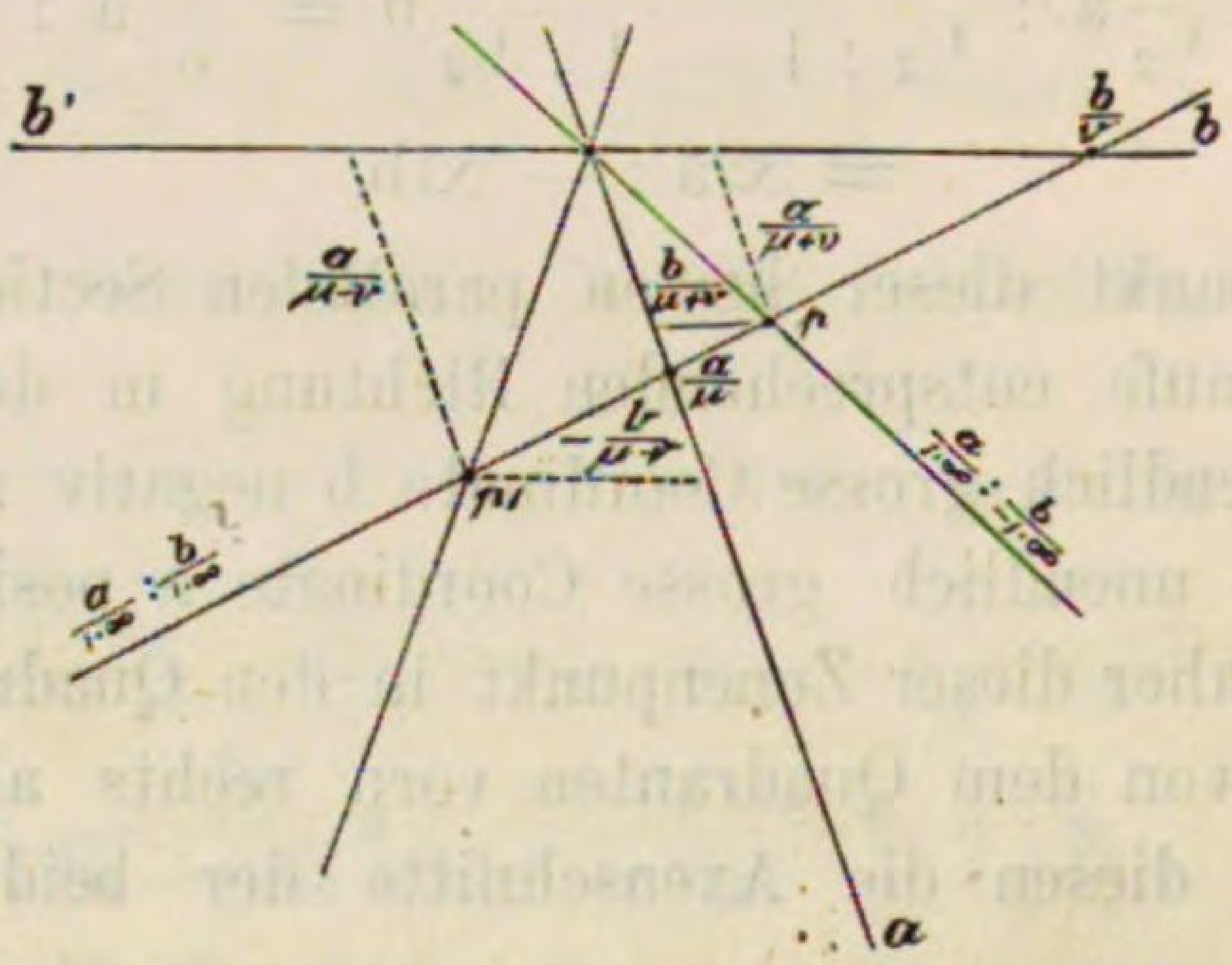


Fig. 21.

erhält, bekommt die einfache Formel $\frac{a}{\mu + \nu} : \frac{b}{\mu + \nu}$.

Um dies zu beweisen, setze man:

$$\mu = \mu, \quad \nu = \nu \quad ; \quad \mu_{,} = \varkappa, \quad \nu_{,} = - \varkappa.$$

Alsdann hat man $\frac{- \varkappa - \nu}{(\mu . - \varkappa) - (\varkappa . \nu)}$ a : $\frac{\mu - \varkappa}{(\mu . - \varkappa) - (\varkappa . \nu)}$ b.

Dividirt mit $\varkappa$, hierauf $\varkappa = \infty$, folgt: $\frac{a}{\mu + \nu} : \frac{b}{\mu + \nu}$.

Ebenso erhält der Zonenpunkt von $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ mit der Sectionslinie der Säule $\frac{a}{1 . \infty} : \frac{b}{1 . \infty}$ die Formel $\frac{a}{\mu - \nu} : - \frac{b}{\mu - \nu}$.

Denn es ist $\mu = \mu, \quad \nu = \nu \quad ; \quad \mu_{,} = \varkappa, \quad \nu_{,} = \varkappa.$

Also hat man: $\frac{\varkappa - \nu}{(\mu \,.\, \varkappa) - (\varkappa \,.\, \nu)}\, a : \frac{\mu - \varkappa}{(\mu \,.\, \varkappa) - (\varkappa \,.\, \nu)}\, b.$

Dividirt mit $\varkappa$, dann $\varkappa = \infty$, folgt: $\frac{a}{\mu - \nu} : - \frac{b}{\mu - \nu}$.

Diese Regeln sind wichtig und verdienen, da sie die Rechnung ersparen, dem Gedächtniss eingeprägt zu werden. Wir können mit der erlangten Kenntniss die folgenden Aufgaben z. B. sofort lösen:

Gegeben die Sectionslinien $4a : 4b$ und $\frac{a}{1 \,.\, \infty} : \frac{b}{1 \,.\, \infty}$, gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

Nach dem zweiten Kantenzonengesetz werden die Coordinaten sein:

$$\frac{a}{{}^1/_4 - {}^1/_4} : - \frac{b}{{}^1/_4 - {}^1/_4} = \frac{a}{0} : - \frac{b}{0} = \infty a : - \infty b.$$

Gegeben die Sectionslinien ${}^3/_2\, a : 3\, b$ und $\frac{a}{1 \,.\, \infty} : - \frac{b}{1 \,.\, \infty}$, gesucht die Coordinaten des Zonenpunktes.

Hier kommt der erste Kantenzonensatz in Anwendung und die Coordinaten sind:

$$\frac{a}{{}^2/_3 + {}^1/_3} : \frac{b}{{}^2/_3 + {}^1/_3} = a : b.$$

c. Sectionslinienformel, dient zur Lösung der Aufgabe: Gegeben die Coordinaten zweier Zonenpunkte, gesucht die Axenschnitte der durch sie gehenden Sectionslinie.

Auch hier erinnern wir uns die Aufgabe bereits durch die Gleichungen V) der analytischen Geometrie gelöst zu haben. Wir fanden:

$$a = \frac{x_{,,}y_{,} - x_{,}y_{,,}}{y_{,} - y_{,,}}; \quad b = \frac{x_{,}y_{,,} - x_{,,}y_{,}}{x_{,} - x_{,,}}.$$

Die Parameter der Linie, die wir früher a, b schrieben, erhalten jetzt die Form $\frac{1}{\mu}$ und $\frac{1}{\nu}$; die Coordinaten, damals mit $x_{,}$, $y_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$ bezeichnet, werden nunmehr $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m_{,}}$, $\frac{1}{n_{,}}$. Nach diesen Substitutionen erhalten wir für die Axenschnitte der Sectionslinie:

$$\frac{\frac{1}{m_{,}n} - \frac{1}{m n_{,}}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n_{,}}} = \frac{m n_{,} - m_{,}n}{m m_{,}(n_{,} - n)}\, a; \quad \frac{\frac{1}{m n_{,}} - \frac{1}{m_{,}n}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m_{,}}} = \frac{m_{,}n - m n_{,}}{n n_{,}(m_{,} - m)}\, b.$$

Dividirt man Zähler und Nenner von b durch — 1, so werden die Zähler beider Brüche gleich und man erhält für die Axenschnitte der Linie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$:

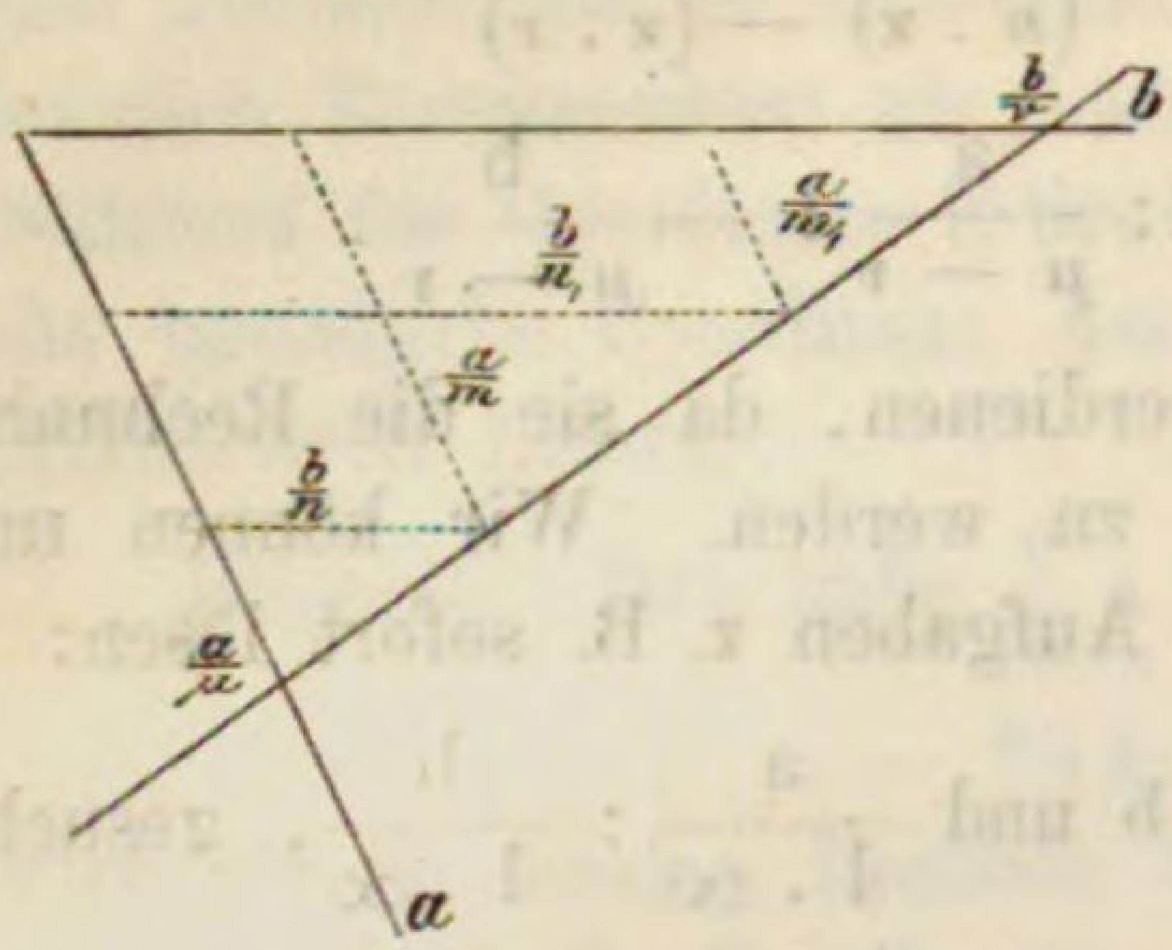


Fig. 22.

$$\frac{m_{,}n - mn_{,}}{mm_{,}(n - n_{,})}\,a : \frac{m_{,}n - mn_{,}}{nn_{,}(m_{,} - m)}\,b.$$

Diese Formel heisst die Sectionsformel.

Beispiele:

1. Gegeben die Zonenpunkte a:b und 2a:—b, gesucht die Axenschnitte der in beiden liegenden Sectionslinie.

$$m = 1\,,\ n = 1\quad ;\quad m_{,} = {}^{1}\!/_{2}\,,\ n_{,} = -1.$$

$$\frac{({}^{1}\!/_{2}.1) - (1.-1)}{1.{}^{1}\!/_{2}(1-[-1])}\,a : \frac{({}^{1}\!/_{2}.1) - (1.-1)}{1.-1\,({}^{1}\!/_{2}-1)}\,b = {}^{3}\!/_{2}\,a:3b.$$

2. Gegeben die Zonenpunkte $a:{}^{1}\!/_{2}b$ und $-{}^{3}\!/_{7}a:{}^{1}\!/_{7}b$, gesucht die Axenschnitte der Linie, welche in beiden liegt.

$$m = 1\,,\ n = 2\quad ;\quad m_{,} = -{}^{7}\!/_{3}\,,\ n_{,} = 7.$$

$$\frac{(-{}^{7}\!/_{3}.2) - (1.7)}{1.-{}^{7}\!/_{3}\,(2-7)}\,a : \frac{(-{}^{7}\!/_{3}.2) - (1.7)}{2.7(-{}^{7}\!/_{3}-1)}\,b =$$

$$= \frac{-\frac{14}{3} - 7}{-{}^{7}\!/_{3}\,(-5)}\,a : \frac{-\frac{14}{3} - 7}{14\left(-\frac{10}{3}\right)}\,b = -\,a:{}^{1}\!/_{4}b.$$

3. Gegeben die Zonenpunkte —a:b und oa:²/₃b (Schnitt von $\infty a:{}^{2}\!/_{3}b$ mit Axe b) gesucht die Axenschnitte der Sectionslinie.

$$m = -1\,,\ n = 1\,,\ m_{,} = \varkappa\,,\ n_{,} = {}^{3}\!/_{2}.$$

$$\frac{(\varkappa.1) - (-1.{}^{3}\!/_{2})}{-1.\varkappa\,(1-{}^{3}\!/_{2})}\,a : \frac{(\varkappa.1) - (-1.{}^{3}\!/_{2})}{1.{}^{3}\!/_{2}\,(\varkappa-1)}\,b.$$

Dividirt mit $\varkappa$, dann $\varkappa = \infty$, folgt: $2a : {}^{2}\!/_{3}b$.

Die besondere Gestalt der Sectionslinienformel mit den inversen Werthen der Coordinaten, in welcher jedes Glied als Factor im Nenner, sei es von a oder von b, erscheint, bringt es mit sich, dass auch für die Null eine Reduction eintreten muss, ähnlich der für ∞. Will man dies vermeiden, so hat man die Sectionslinienformel mit den directen Werthen anzuwenden, wie sie in den Gleichungen V) aus der analytischen Geometrie gegeben ist.

Hierfür dienen folgende Beispiele:

4. Gegeben die Zonenpunkte $\infty a : -\infty b$ und $^1/_5 : {}^1/_5 b$, gesucht die Axenschnitte der darin liegenden Sectionslinie.

α. Die Formel mit den inversen Werthen benützend hat man:

$$m = o,\ n = -o,\ m_, = 5,\ n_, = 5,$$

$$\frac{(5.-o)-(o.5)}{o.5\,(-o-5)}\,a : \frac{(5.-o)-(o.5)}{-o.5\,(5-o)}\,b.$$

Wird jeder Ausdruck von dem unbestimmten Gliede $\frac{o}{o}$ befreit, so folgt:

$$\frac{-5-5}{5(-o-5)}\,a : \frac{-5-5}{-5\,(5-o)}\,b = {}^2/_5\,a : {}^2/_5\,b.$$

β. Die Formel mit den direkten Werthen würde hier liefern:

$$x_, = \varkappa,\ y_, = -\varkappa\ ;\ x_{,,} = {}^1/_5,\ y_{,,} = {}^1/_5.$$

$$\frac{({}^1/_5.-\varkappa)-(\varkappa.{}^1/_5)}{-\varkappa-{}^1/_5}\,a : \frac{(\varkappa.{}^1/_5)-({}^1/_5.-\varkappa)}{\varkappa-{}^1/_5}\,b.$$

Dividirt mit $\varkappa$, dann $\varkappa = \infty$:

$$= \frac{-{}^1/_5-{}^1/_5}{-1}\,a : \frac{{}^1/_5+{}^1/_5}{1}\,b = {}^2/_5\,a : {}^2/_5\,b.$$

5. Gegeben die Zonenpunkte $\infty a : -\infty b$ und $^1/_5 a : o b$, gesucht die Axenschnitte der darin liegenden Sectionslinie.

α. Nach der Formel mit den inversen Werthen ist:

$$m = o,\ n = -o\ ;\ m_, = 5,\ n_, = \varkappa.$$

$$\frac{(5.-o)-(o.\varkappa)}{o.5\,(-o-\varkappa)}\,a : \frac{(5.-o)-(o.\varkappa)}{-o.\varkappa\,(5-o)}\,b.$$

Wird der Ausdruck zuerst von dem unbestimmten Gliede $\frac{o}{o}$ befreit, so folgt:

$$\frac{-5-\varkappa}{5(-o-\varkappa)}\,a : \frac{-5-\varkappa}{-\varkappa(5-o)}\,b.$$

Wird nun mit $\varkappa$ dividirt, dann $\varkappa = \infty$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{-1}{-5}\,a : \frac{-1}{-5}\,b = {}^1/_5\,a : {}^1/_5\,b.$$

β. Nach der Formel mit den directen Werthen ist:

$$x_, = \varkappa,\ y_, = -\varkappa\ ;\ x_{,,} = {}^1/_5,\ y_{,,} = o.$$

$$\frac{({}^1/_5.\varkappa-)-(\varkappa.o)}{-\varkappa-o}\,a : \frac{(\varkappa.o)-({}^1/_5.-\varkappa)}{\varkappa-{}^1/_5}\,b.$$

Wird mit $\varkappa$ dividirt, dann $\varkappa = \infty$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{{}^1/_5}{1}\,a : \frac{{}^1/_5}{1}\,b = {}^1/_5\,a : {}^1/_5\,b.$$

6. Gegeben die Zonenpunkte $o a : 3 b$ und $2 a : o b$, gesucht die Axenschnitte der Sectionslinie, welche in beiden liegt.

α. Nach der Formel mit den inversen Werthen ist:

$$m = \varkappa,\ n = {}^1\!/_3 \quad ; \quad m_{,} = {}^1\!/_2,\ n_{,} = \varkappa.$$

$$\frac{({}^1\!/_2 \,.\, {}^1\!/_3) - (\varkappa.\varkappa)}{\varkappa \,.\, {}^1\!/_2\,({}^1\!/_3 - \varkappa)}\, a : \frac{({}^1\!/_2 \,.\, {}^1\!/_3) - (\varkappa.\varkappa)}{{}^1\!/_3 \,.\, \varkappa\,({}^1\!/_2 - \varkappa)}\, b =$$

$= \frac{{}^1\!/_6 - \varkappa^2}{{}^1\!/_6\,\varkappa - {}^1\!/_2\,\varkappa^2}\, a : \frac{{}^1\!/_6 - \varkappa^2}{{}^1\!/_6\,\varkappa - {}^1\!/_3\,\varkappa^2}$. Wird in dieser Formel mit $\varkappa^2$ dividirt, dann $\varkappa = \infty$ gesetzt, so folgt: $\frac{-1}{-{}^1\!/_2}\, a : \frac{-1}{-{}^1\!/_3}\, b = 2a:3b$.

β. Nach der Formel mit den directen Werthen ist:

$$x_{,} = o,\ y_{,} = 3 \quad ; \quad x_{,,} = 2,\ y_{,,} = o.$$

$$\frac{(2.3) - (o.o)}{3 - o}\, a : \frac{(o.o) - (2.3)}{o - 2}\, b = 2a:3b.$$

Von den Beispielen 4, 5, 6 sind 5 und 6 eigentlich selbstverständlich und ohne Rechnung direct aus der Projection ersichtlich. Es sollte durch diese Beispiele nur gezeigt werden, wie sich die Formeln in den speciellen Fällen verhalten und wie zu reduciren ist.

Wir begnügen uns mit der allgemeinen Form der Sectionslinienformel und leiten Vereinfachungen derselben, wie sie sich ergeben würden, wenn ein Zonenpunkt in einer Axe oder in einer Kantenzone sich befände, nicht ab, ausgenommen den einen nun zu betrachtenden Fall, in dem ein Zonenpunkt mit dem Projectionsmittelpunkt zusammenfällt.

d. Rechnung mit dem Projectionsmittelpunkt.

Geht eine Sectionslinie durch einen Zonenpunkt mit den Coordinaten $\frac{a}{m} : \frac{b}{n}$, ferner aber durch den Mittelpunkt, so ist die ihr entsprechende Fläche vom Zeichen:

$$-\frac{a}{m} : \frac{b}{n} : \frac{c}{o},$$

wie man sich leicht überzeugt, da die Axenschnitte der Sectionslinie in demselben Verhältniss stehen müssen wie die Coordinaten des Zonenpunktes, auf welches Verhältniss es bei durch den Mittelpunkt gehenden Linien allein ankommt.

Will man dies Resultat aus der allgemeinen Formel ersehen, so müssen dem Mittelpunkt die Coordinaten $oa : ob = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty}$ zukommen, während die des anderen Zonenpunktes, die oben gegebenen sind.

Wir haben demnach zu setzen:

$$m = m,\ n = n \quad ; \quad m_{,} = \varkappa,\ n_{,} = \varkappa.$$

und erhalten $\frac{(\varkappa.\mathrm{n}) - (\mathrm{m}.\varkappa)}{\mathrm{m}\varkappa(\mathrm{n}-\varkappa)}\,\mathrm{a} : \frac{(\varkappa.\mathrm{n}) - (\mathrm{m}.\varkappa)}{\mathrm{n}\varkappa(\varkappa-\mathrm{m})}\,\mathrm{b} =$

$$= \frac{\varkappa\mathrm{n} - \mathrm{m}\varkappa}{\mathrm{mn}\varkappa - \mathrm{m}\varkappa^2}\,\mathrm{a} : \frac{\varkappa\mathrm{n} - \mathrm{m}\varkappa}{\mathrm{n}\varkappa^2 - \mathrm{mn}\varkappa}\,\mathrm{b}.$$

Wird dieser Ausdruck mit $\varkappa^2$ dividirt und dann $\varkappa = \infty$ gesetzt, so folgt: $\frac{0}{-\mathrm{m}}\,\mathrm{a} : \frac{0}{\mathrm{n}}\,\mathrm{b} = \frac{\mathrm{a}}{-\mathrm{m}.\infty} : \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n}.\infty} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{m}} : \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n}} : \frac{\mathrm{c}}{0}$.

Beispiel:

Eine Sectionslinie geht durch einen Zonenpunkt mit den Coordinaten a : — 3b und durch den Mittelpunkt, die Axenschnitte der ihr entsprechenden Reductionsebene sind zu finden.

$$\mathrm{m} = 1\,,\ \mathrm{n} = -\,{}^1\!/_3.$$

$$\text{Daher: } -\frac{\mathrm{a}}{1} : \frac{\mathrm{b}}{-\,{}^1\!/_3} : \frac{\mathrm{c}}{0} = \mathrm{a} : 3\mathrm{b} : \infty\mathrm{c}.$$

e. Zonencontrole.

Wir sahen früher, dass eine Fläche, die mit parallelen Combinationskanten zwischen zwei andere Flächen fällt, mit diesen als in einer Zone liegend betrachtet wird. Die Erkennung eines solchen Verhältnisses ist bei guter Ausbildung von Flächen und Kanten in den meisten Fällen schon mit blossem Auge leicht, da dieses sehr sicher beurtheilt, ob zwei Linien parallel sind oder nicht.

Es kommen jedoch auch Fälle vor, in denen es nicht so leicht ist, zu entscheiden, ob eine Fläche einer bestimmten Zone angehöre. Namentlich ist dies dann der Fall, wenn die Combinationskanten der Fläche zu den beiden anderen entweder zerstört sind, oder die Fläche gar nicht mit ihnen zum Durchschnitt gekommen war, sie etwa nur in je einem Punkte berührte. In diesem letzteren Falle, in dem die Zonen nicht offen darliegen, sondern versteckt sind, bedient man sich mit Vortheil des Reflexionsgoniometers zur Entscheidung der Frage. Wir werden im nächsten Abschnitt bei Beschreibung dieses Instrumentes darauf zurückkommen.

Die meisten zweifelhaften Fälle erledigen sich hierdurch, jedoch nicht alle. Es kommen nämlich zuweilen Flächen vor, die scheinbar so genau mit anderen in einer Zone liegen, dass Auge und Reflexionsgoniometer es zu bestätigen scheinen und doch die aus den Messungen abgeleiteten Zeichen der Flächen damit im Widerspruche stehen. Man sieht sich in solchen Fällen nach einem Mittel um, was die Sache entscheidet und die Zweifel löst. Dies Mittel besteht in einer rechnenden Prüfung, ob die Axenschnitte der Fläche, respective die ihrer

entsprechenden Sectionslinie dem Erforderniss der Zone genügen und heisst die Zonencontrole.

Zum Zwecke derselben kann man sich erinnern, dass zwei Sectionslinien $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und $\frac{a}{\mu_,} : \frac{b}{\nu_,}$ bei ihrem Schnitt einen Zonenpunkt bilden, dessen Coordinaten sind:

$$\frac{\nu_, - \nu}{\mu\nu_, - \mu_,\nu} a : \frac{\mu - \mu_,}{\mu\nu_, - \mu_,\nu} b.$$

Liegt mit diesen Sectionslinien eine weitere Linie $\frac{a}{\mu_{,,}} : \frac{b}{\nu_{,,}}$ in demselben Zonenpunkt, so müssen ihre Werthe $\mu_{,,}$ und $\nu_{,,}$ der obenstehenden Zonenpunktformel genügen, wenn sie entweder für μ und ν oder für $\mu_,$ und $\nu_,$ substituirt werden. Beide Coordinaten des Zonenpunkts müssen in allen drei Fällen denselben Werth erhalten, wenn die drei den Sectionslinien entsprechenden Flächen in einer Zone liegen sollen; natürlich ist es nur nöthig, um die Richtigkeit der Zone zu beweisen, die Uebereinstimmung beider Coordinaten in zwei Fällen festzustellen.

Fallen die Flächen nicht in eine Zone, liegen also die Sectionslinien nicht in einem Punkte, so ersieht man aus dem Resultat, in welchen Richtungen die dritte Sectionslinie aus dem Zonenpunkt der beiden ersteren ausweicht.

Kommt es nicht darauf an, dies Ausweichen anschaulich zu machen, will man nur wissen, ob die Zone vorhanden sei oder nicht, so kann man auch bedenken, dass, wenn eine Sectionslinie in dem Zonenpunkte zweier anderen liegen soll, dieser Punkt auch ein Punkt der neuen Linie sein muss, d. h. für diese die bekannte Relation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ zwischen ihren Axenschnitten und den Coordinaten des Punktes erfüllt sein muss. Man wird daher, wenn die Coordinaten des Zonenpunktes x und y bekannt sind und die Axenschnitte a und b der Sectionslinie, welche im Zonenpunkt liegen soll, gegeben, zuzusehen haben, ob die Gleichung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

erfüllt ist, in welchem Falle dem Erforderniss der Zone genügt ist. Das Nichterfülltsein der Gleichung lässt auf die Nichtexistenz der Zone schliessen.

Quenstedt wendet in seinem Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie 1873 p. 199 dieselbe Gleichung, jedoch in der Form: $m\mu + n\nu = 1$ an, indem für x und y die Bezeichnungen

m und n, für a und b dagegen $\frac{1}{\mu}$ und $\frac{1}{\nu}$ gewählt sind, entsprechend den früheren Auseinandersetzungen.

Beispiele:

α. Anwendung der Zonenpunktformel zur Zonencontrole. Es bilden die Sectionslinien $-{}^{8}/_{15}\,a : {}^{8}/_{15}\,b$ und $7a : 7b$ einen Zonenpunkt mit den Coordinaten ${}^{291}/_{90}\,a : {}^{339}/_{90}\,b$; man wünscht zu wissen, ob $4a : 20b$ in denselben Zonenpunkt falle.

$$\mu = -{}^{15}/_{8},\ \nu = {}^{15}/_{8} \quad ; \quad \mu_{,} = {}^{5}/_{20},\ \nu_{,} = {}^{1}/_{20}.$$

$$\frac{{}^{1}/_{20} - {}^{15}/_{8}}{-{}^{15}/_{8} \cdot {}^{1}/_{20} - {}^{5}/_{20} \cdot {}^{15}/_{8}}\,a : \frac{-{}^{15}/_{8} - {}^{5}/_{20}}{-{}^{15}/_{8} \cdot {}^{1}/_{20} - {}^{5}/_{20} \cdot {}^{15}/_{8}}\,b =$$

$= \frac{8-300}{-90}\,a : \frac{-300-40}{-90}\,b = {}^{292}/_{90}\,a : {}^{340}/_{90}\,b$. Die Zone ist nicht erfüllt, aber es findet eine ausserordentliche Annäherung an das Erforderniss statt.

β. Anwendung der Liniengleichung zur Zonencontrole. Die Sectionslinien $-{}^{1}/_{2}\,a : {}^{1}/_{2}\,b$ und $7a : 7b$ bilden einen Zonenpunkt mit den Coordinaten $\frac{13}{4}\,a : \frac{15}{4}\,b$; es wird zu wissen gewünscht, ob in demselben Zonenpunkte $4a : 20b$ liege.

$$x = {}^{13}/_{4},\ y = {}^{15}/_{4} \quad ; \quad a = 4,\ b = 20.$$

$$\frac{{}^{13}/_{4}}{4} + \frac{{}^{15}/_{4}}{20} = \frac{65 + 15}{80} = 1.$$

Der Zone wird daher genügt. —

5. Fortsetzung der Ableitung neuer Körper aus dem Oktaid. Allgemeine Betrachtungen.

Wenn wir zur Projection der drei allgemeinen Körper auf eine Fläche des Hexaids zurückkehren, so bemerken wir, dass die vier Dodekaidkantenzonenpunkte noch nicht mit allen Oktaidkantenzonenpunkten verbunden sind. In der That können wir jeden Dodekaidkantenzonenpunkt noch mit drei Oktaidkantenzonenpunkten verbinden, von denen jedoch einer immer im Unendlichen liegt.

Wählen wir den Dodekaidkantenzonenpunkt im positiven Quadranten, so hat er die Coordinaten a : b. Wollen wir diesen Punkt mit dem im Unendlichen liegenden Oktaidkantenzonenpunkt b verbinden, Tafel I, Fig. 3, so haben wir durch ihn und parallel der Oktaidsectionslinie a : b eine Sectionslinie zu ziehen (diese und die folgenden Ausführungen sind in Fig. 4, Tafel I geschehen). Es fragt sich, wie

wird diese Sectionslinie die Axen schneiden? Zuvörderst leuchtet ein, dass dieselbe im Dodekaidkantenzonenpunkt liegt, also $m = 1$, $n = 1$ ist, dann liegt sie aber auch im Oktaidkantenzonenpunkt b, dem, nach dem Kantenzonengesetz, die Coordinaten $\frac{a}{o} : -\frac{b}{o}$ zukommen, folglich wird $m = 1$, $n = 1$; $m_{,} = o$, $n_{,} = -o$ und man hat:

$$\frac{(o.1) - (1.-o)}{1.o(1-[-o])} a : \frac{(o.1) - (1.-o)}{1.-o(o-1)} b = 2a : 2b = a : b : {}^1\!/\!_2 c.$$

Verbinden wir ferner unseren Dodekaidkantenzonenpunkt im positiven Quadranten mit dem Oktaidkantenzonenpunkt $o a : -b = = \frac{a}{\infty} : \frac{b}{-1}$, so wird:

$$m = 1, n = 1 \quad ; \quad m_{,} = \varkappa, n_{,} = -1$$

und es folgt, da wir hier nur den Schnitt auf der Axe a zu rechnen haben: $\frac{(\varkappa.1) - (1.-1)}{1.\varkappa(1-[-1])} a = \frac{1}{2} a$ und daraus bilden wir ${}^1\!/\!_2 a : -b : c$. In gleicher Weise folgt weiter noch $-a : {}^1\!/\!_2 b : c$ als Zeichen der Fläche, deren Sectionslinie denselben Dodekaidkantenzonenpunkt mit dem Oktaidkantenzonenpunkt verbindet, dem die Coordinaten $-a : o b = -\frac{a}{1} : \frac{b}{\infty}$ zukommen. Führt man diese Zonenpunktverbindung in allen Quadranten aus, so erhält man zwölf neue Sectionslinien, die einem neuen Körper, dem I k o s i t e t r a i d $a : b : {}^1\!/\!_2 c$, angehören. Dieser Körper ist nicht mehr, wie die drei ersten, einzig in seiner Art; es gibt vielmehr unendlich viele Ikositetraide $a : b : {}^1\!/\!_m c$, so viele als der Bruch ${}^1\!/\!_m$ rationale Werthe annehmen kann. Das hier deducirte Ikositetraid $a : b : {}^1\!/\!_2 c$ ist ein besonders ausgezeichnetes, da es in die Kantenzone des Dodekaids fällt. —

Fahren wir in der Verbindung noch nicht verbundener Zonenpunkte fort, so ergibt uns die Herstellung einer solchen zwischen den Oktaiddiagonalzonenpunkten und den Hexaidkantenzonenpunkten wieder einen neuen Körper. Berücksichtigen wir den einen endlichen Hexaidkantenzonenpunkt, so liegen im positiven Quadranten drei Oktaiddiagonalzonenpunkte. Von diesen kommen jedoch nur zwei in Betracht, da der dritte bereits durch eine Sectionslinie des Dodekaids mit dem Hexaidkantenzonenpunkte verbunden ist. Für alle vier Quadranten ergäbe sonach die Verbindung acht Sectionslinien und für die drei Hexaidkantenzonenpunkte 24 derselben. Allein diese Zahl reducirt sich auf 12, da eine genauere Betrachtung zeigt, dass in einer Sectionslinie immer zwei Oktaiddiagonalzonenpunkte liegen.

Um das Zeichen des neuen Körpers abzuleiten, ziehen wir in Betracht die Sectionslinie, welche durch den Mittelpunkt geht und im Zonenpunkt 2a : — b liegt. Wir setzen m = $^1/_2$, n = — 1 und haben, nach der Rechnung mit dem Mittelpunkt: — $\frac{a}{^1/_2} : \frac{b}{-1} : \frac{c}{0}$ = = 2a : b : ∞c = a : $^1/_2$b : ∞c als Zeichen unseres neuen Körpers. Derselbe ist ein Tetrakishexaid. Wieder gibt es unendlich viele Tetrakishexaide a : $^1/n$b : ∞c, so viele als $^1/n$ rationale Werthe annehmen kann.

Verbinden wir weiter die Oktaiddiagonalzonenpunkte mit den Dodekaidkantenzonenpunkten, so entstehen 24 neue Sectionslinien, die einem Hexakisoktaide angehören. Man sollte zwar zuerst meinen, es müssten, da vier Dodekaidkantenzonenpunkte und zwölf Oktaiddiagonalzonenpunkte vorhanden sind, 48 Sectionslinien entstehen, allein es zeigt sich, bei eingehenderer Betrachtung, dass schon sechs Oktaiddiagonalzonenpunkte mit den Dodekaidkantenzonenpunkten verbunden sind, somit nur 24 neue Sectionslinien übrig bleiben. Das Zeichen unseres Hexakisoktaids leitet sich leicht zu a : $^1/_2$b : $^1/_3$c ab; das allgemeine Zeichen aller möglichen Hexakisoktaide ist a : $^1/n$b : $^1/m$c.

Durch die Verbindung der gegebenen Zonenpunkte der drei Hauptkörper lassen sich nun noch zwei weitere Körper ableiten, die nicht mit ihren Sectionslinien in das Projectionsbild, Tafel I, Fig. 4, aufgenommen sind, und deren Construction der aufmerksam gefolgte Leser wohl mühelos selbst finden wird. Verbindet man nämlich die Oktaiddiagonalzonenpunkte mit den Oktaidkantenzonenpunkten, so folgt ein zweites Ikositetraid a : b : $^1/_3$c; setzt man endlich die noch nicht verbundenen Oktaiddiagonalzonenpunkte unter sich in Verbindung, so ergibt sich ein zweites Hexakisoktaid a : $^1/_3$b : $^1/_5$c.

Hiermit sind alle Zonenpunkte, die Oktaid, Hexaid und Dodekaid durch die Schnitte ihrer Sectionslinien unter sich bilden, mit einander verbunden. Wir sahen, ein Triakisoktaid war nicht aus den gegebenen Zonenpunkten deducirbar. Zur Ableitung eines solchen müsste man zu neuen Zonenpunkten seine Zuflucht nehmen, z. B. die Oktaidkantenzonenpunkte mit den auf den Axen liegenden Kantenzonenpunkten des Ikositetraids vom Zeichen a : b : $^1/_2$c verbinden. Das resultirende Triakisoktaid würde $^1/_2$a : $^1/_2$b : c sein. Das allgemeine Zeichen aller Triakisoktaide wäre $^1/m$a : $^1/m$b : c.

Will man die Zeichen dieser sieben möglichen Hauptkörper so schreiben, dass c = 1 wird und sich die Uebergänge in den Zeichen verfolgen lassen, so hat man folgende Reihe:

1. $a : b : c$, das Oktaid.
2. $ma : mb : c$, die Ikositetraide.
3. $\infty a : \infty b : c$, das Hexaid.
4. $\infty a : nb : c$, die Tetrakishexaide.
5. $\infty a : b : c$, das Dodekaid.
6. $ma : b : c$, die Triakisoktaide.

So würden die Ikositetraide, Tetrakishexaide und Triakisoktaide aufgeführt sein zwischen ihren Grenzgestalten (das Oktaid wäre am Schluss der Reihenfolge nochmals zu setzen, um, mit dem Dodekaid, die Grenzgestalten für die Triakisoktaide zu bilden). — Diesen sechs Körpern reihen sich schliesslich an:

7. $ma : nb : c$, die Hexakisoktaide, die allgemeinsten Körper der ganzen Entwickelung. Ueber die Grenzgestalten derselben wird erst später im speciellen Theile das Nöthige erbracht werden können.

Den Gang der Deduction nochmals uns vorführend, leiteten wir aus dem Oktaid zuerst das zugehörige Hexaid und Dodekaid ab; die Sectionslinien dieser drei Körper lieferten uns 25 Zonenpunkte, mit Hülfe deren wir weitere fünf Körper deducirten. Gehen wir weiter, nehmen wir alle Zonenpunkte zu Hülfe, die sich uns in der Projection als Schnittpunkte der Sectionslinien unserer acht Körper ergeben, so folgt durch Verbindung derselben ein unübersehbarer Reichthum neuer Körper. Die Sectionslinien derselben schneiden aber die schon vorhandenen wiederum, eine Fülle neuer Zonenpunkte bietet sich somit dar; diese, wieder mit einander und den schon vorhandenen Zonenpunkten verbunden, liefern weitere Sectionslinien neuer Körper, welch' letztere sich auf diese Weise in's Unendliche vermehren lassen. Zuletzt werden sich auf der Projectionsebene die Sectionslinien so dicht zusammendrängen, dass kein Winkel mehr denkbar ist, den die Linien nicht annähernd mit einander bildeten, kein Abstand auf den Axen zwischen o und ∞ mehr zu finden, in dem nicht eine Sectionslinie läge: eine unendliche Fülle von Körpern wird somit erschlossen, alle sind sie aus dem Oktaide abgeleitet und stehen zu demselben und zu einander im Deductionszusammenhang.

Mit Recht sieht man daher das Oktaid als den Grundkörper der ganzen Entwickelung an, in dessen Anlage und Bau gewissermassen alle anderen Glieder der Entwickelung schon vorgezeichnet sind.

Umgekehrt wird aber auch ein Flächencomplex, der im Deductionszusammenhang steht, der also die verbindenden Mittelglieder zur stufenweisen Ableitung von Flächen aus gegebenen enthält, entwickelt werden können, wenn ein Oktaid, als Grundkörper, nebst wenigstens zwei

Flächen des zugehörigen Hexaides gegeben sind. Man kann an Stelle dieses Erfordernisses auch setzen, ein Hexaid nebst einer Zonenrichtung, von den Hexaidkantenzonen verschieden, oder überhaupt vier von einander unabhängige Zonenrichtungen.

In der Krystallwelt kommen nun solche Flächencomplexe, die im Deductionszusammenhang stehen, vor und es ist die Aufgabe, dieselben aus einem gegebenen Oktaide zu deduciren. Die Erfahrung zeigt, dass (ächte, wohlgebildete Flächen vorausgesetzt) diese Deduction fast immer gelingt und nur für einzelne Glieder zuweilen nicht ausführbar ist, wenn die verbindenden Mittelglieder zu den bekannten fehlen; sehr häufig beobachtet man aber, dass nach dem Auffinden dieser verbindenden Glieder, die Flächen oder Gestalten, die vorher nicht deducirt werden konnten, sich nun auf's Beste dem Deductionszusammenhang fügen. Die Beobachtung lehrt ferner, dass, bezogen auf die Axen des Oktaides,* die Formen des zu deducirenden Complexes sich in ihren Axenschnitten in rationalen ganzen Zahlen oder Brüchen, o und ∞ eingeschlossen, darstellen. Die Fälle, in denen sehr hohe oder sehr niedrige Ableitungscoëfficienten erfordert werden, dieselben sich wohl auch nur durch complicirte Brüche darstellen, sind (ächte, wohlgebildete und gut messbare Flächen vorausgesetzt) selten und jedenfalls nur Ausnahmen von der Regel, wonach sich die Axenschnitte in einfachen, rationalen Werthen darstellen lassen.

Die Deduction der Formen eines Krystallcomplexes wird unterstützt durch das Auffinden der Zonenverbände am Reflexionsgoniometer und Eintragen der Ergebnisse in eine Projection. In derselben treten dann, schrittweise fortschreitend und nach Massgabe des Eintragens von Sectionslinien, neue Zonenverbände zu Tage, die am Krystalle versteckt waren und gerade hierin liegt einer der schätzenswerthesten Vorzüge dieser Methode.

In einem gegebenen Formencomplexe sind nun eine sehr grosse Zahl von Oktaiden vorhanden. Man kann von jedem ausgehen, aber nicht mit gleichem Vortheil. Je glücklicher vielmehr die Wahl des Grundkörpers ist, desto besser gelingt häufig die Deduction. Mit veränderter Wahl des Grundkörpers ändern sich natürlich die Werthe der Axenschnitte der anderen Flächen und Gestalten des Formencomplexes; diese Aenderung erstreckt sich aber nicht auf die in allem

* In der Projection des Oktaids auf eine beliebige Fläche erkennt der mit der neueren Geometrie Vertraute das vollständige Vierseit und kann all die schönen harmonischen Verhältnisse, die an dieser Figur durch die Untersuchungen von Pappos, Carnot, Steiner u. A. klar gestellt sind, auf die Krystallbetrachtung übertragen.

Wechsel constant bleibenden Zonenverbände. Wir widmen diesem Umstande unsere volle Aufmerksamkeit. —

IV. Von der Krystallwinkelmessung und den dazu dienenden Instrumenten.

Um an dem von der Natur gebotenen Materiale Daten zu seiner Berechnung zu sammeln, durch welche es möglich wird, ein gesetzmässiges Bild desselben zu erlangen, sind die einzigen constanten Elemente der Krystalle, die Neigungswinkel ihrer Flächen zu einander, die sich der Messung darbieten, derselben zu unterwerfen.

Zur Krystallwinkelmessung bedient man sich der Anlege- und der Reflexionsgoniometer.

Indem wir die Kenntniss der ersteren Instrumente, als in der elementaren Krystallographie erbracht, voraussetzen, wenden wir uns direct den Reflexionsgoniometern zu.

1. Grundprincip des Reflexionsgoniometers. Folgerungen aus der Theorie desselben für die Praxis.

Das Reflexionsgoniometer ist von Wollaston im Jahre 1809 erfunden worden und beruht wesentlich auf dem Gesetze der Reflexion des Lichts, bei dessen Anwendung die Krystallflächen als kleine Spiegel dienen.

Denken wir uns, Tafel II, Fig. 1, einen Krystall senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, so werden sich seine Flächen zu den Linien CD und CE verkürzt projiciren, die Kante der Flächen wird in dem Punkte C erscheinen. Von diesem Punkte wollen wir annehmen, er befinde sich in dem Centrum eines getheilten Kreises. Das Auge eines Beobachters, in A befindlich, beobachte auf CD und möglichst dicht an C, die Reflexion eines entfernten Objectes O, während es gleichzeitig den Punkt O′ dabei fixirt, so dass O und O′ sich decken. Der Krystall werde nun in der Richtung des Pfeils mit dem Kreise gedreht bis CE nach CE′ kommt, also in die Lage, welche CD vorher inne hatte. Ist diese Lage genau erreicht, so sieht das unbeweglich gebliebene Auge die Reflexion von O auf CE′ dicht an C, wie vorher auf CD und lässt O wieder mit O′, was unwandelbar bei der ganzen Operation fixirt wurde, zur Deckung kommen.

Bei diesem Verfahren ist CD in die Lage CD′ und CE in die Lage CE′ gekommen, der Winkel ECD befindet sich jetzt also in E′CD′. Offenbar ist aber der Uebergang von der einen Lage in die

andere erreicht worden durch Drehung um einen Winkel DCD′, der die Ergänzung von E′CD′ = ECD zu 180° ist.

Diesen Winkel kann man, da der Kreis mit dem Krystalle gedreht worden ist, an ersterem ablesen und es gibt sonach, zunächst der Supplementwinkel, ein Mass für den Winkel ab, den die beiden einer Kante anliegenden Flächen nach innen zu, einwärts im Krystalle, bilden.

Eine genau durchgeführte mathematische Theorie hat nun die Forderungen ergeben, welche zum Zwecke genauer Winkelmessungen an Krystall, Instrument und Beobachter gestellt werden müssen und die Fehler kennen gelehrt, die aus der Nichterfüllung der Erfordernisse entspringen. Diese Theorie ist zuerst von Kupffer in seiner Preisschrift über genaue Messung der Winkel an Krystallen 1825, dann in seinem Handbuche der rechnenden Krystallonomie 1831 dargelegt worden, sie hat ferner Aufnahme gefunden in Naumann's Lehrb. d. rein. u. angew. Krystallographie 1830. B. II, in welchem Werke auch über die Grösse der Fehler, die aus dem Nichterfülltsein der Erfordernisse entspringen, das Wesentlichste gesagt ist. In ähnlichem Sinne ist die Sache behandelt in der Arbeit Neumann's: das Krystallsystem des Albites und der ihm verwandten Gattungen. Abh. der Berl. Academie 1830, ferner im Lehrbuch der Krystallographie von Miller-Grailich 1856 und im Lehrbuch der physikalischen Mineralogie von Schrauf B. I, 1866.

Wir werden uns hier mit diesen Hinweisen begnügen und im Folgenden die Erfordernisse der Theorie aufstellen.

Zu genauen Messungen sind vorab erforderlich wohlgebaute Krystalle mit ebenen, spiegelnden Flächen. Kleine Krystalle sind aus mehreren Gründen grösseren vorzuziehen, hauptsächlich schon desswegen, weil sie besser als grössere gebildet zu sein pflegen. Abgesehen von diesen Erfordernissen ist ein gut getheilter Kreis Hauptsache, derselbe soll wohl centrirt sein, d. h. sein geometrischer Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte seiner Drehung möglichst coincidiren. Letzteres zu bewirken, ist Sache des Mechanikers. Von den eigentlichen Erfordernissen der Theorie wären nun die folgenden namhaft zu machen:

a. die Kantenlinie, an der die Flächen, deren Neigung gemessen werden soll, anliegen, muss genau justirt sein, d. h. senkrecht stehen auf der Ebene des getheilten Kreises, parallel gehen der Axe des Instrumentes.

b. Die Kantenlinie muss möglichst genau centrirt sein, d. h. zusammenfallen mit dem Mittelpunkte des getheilten Kreises, mit welchem, bei einem gut gearbeiteten Instrument, der Drehungs-

mittelpunkt möglichst coincidirt. Diese Centrirung muss um so genauer vorgenommen werden, je geringer die Entfernungen der beiden Gegenstände O und O' vom Krystalle sind. Je mehr die beiden Gegenstände dagegen vom Krystalle entfernt sind, desto geringer ist der Einfluss einer ungenügenden Centrirung und wird die Entfernung der Gegenstände = ∞, so verschwindet dieser Einfluss völlig.

c. Die beiden Gegenstände O und O' sowohl, als auch das Auge des Beobachters müssen, während der Messung ihre ein Mal eingenommene Position ungeändert beibehalten.

d. Die Gegenstände müssen vom Krystalle weit entfernt sein und, wenn möglich, auch gleich weit vom Krystalle abstehen. Eine grosse Entfernung vernichtet den aus der Excentricität der Kantenlinie entstehenden Fehler, eine gleiche Entfernung hat zur Folge, dass der aus dem Spielraum der Reflexion sich ergebende Fehler verschwindet. Es können, wenn die Gegenstände gleich weit entfernt sind, grosse Krystalle ebensowohl, als kleine, der Messung unterzogen werden, ohne fürchten zu müssen, dass aus dem Spielraum der Reflexion ein Fehler entstünde; es muss nur auf das bestmöglichste Centriren der Kantenlinie Bedacht genommen werden. — Man sieht danach ein, dass, wenn es gelingen würde, beide Gegenstände in die Unendlichkeit zu versetzen, den Erfordernissen der grossen und der gleich weiten Entfernungen zugleich und am vollständigsten genügt wäre.

e. Die Gegenstände müssen passend über dem Horizont gelegen gewählt werden und dürfen nicht zu nahe an demselben angenommen werden.

f. Die Gegenstände müssen mit dem Krystalle in einer Ebene liegen, die der Ebene des getheilten Kreises parallel geht. Sind die Gegenstände gleich weit vom Krystalle entfernt, so ist es gleichgültig, ob der Krystall und die beiden Gegenstände in einer mit der Ebene des getheilten Kreises parallelen Ebene liegen oder nicht. — Würde sich die Gleichheit der Entfernungen beider Gegenstände vom Krystalle nicht realisiren lassen, so könnten nur kleine Krystalle zu Messungen verwendet werden, oder man müsste die Flächen grösserer Krystalle derartig mit Schwärze überziehen, dass die Reflexion nur nahe an der Kantenlinie stattfinden könnte.

2. Reflexionsgoniometer mit horizontalem und vertikalem Kreis. Mitscherlich'sches Goniometer. Einrichtung des Instrumentes, um den Forderungen der Theorie zu genügen. Verbesserungen am Instrumente. Vereinfachungen zum Zwecke der Herstellung eines minder kostspieligen Instrumentes.

Die im Gebrauche der Krystallographen sich befindenden Reflexionsgoniometer sind nach zwei verschiedenen Principien construirt. Bei

der einen Construction, der MALUS-BABINET'schen, ist der Kreis horizontal, die auf ihm senkrechte Krystallkante steht in Folge dessen vertical und ihre Flächen empfangen seitliches Licht; bei der anderen, der WOLLASTON-MITSCHERLICH'schen Construction steht der Kreis vertical, die an der horizontalen Krystallkante anliegenden Flächen empfangen ihr Licht von dem oberen Himmelsgewölbe. Beide Constructionen gewähren Vortheile; für den rein krystallographischen Zweck möchte indessen ein MITSCHERLICH'sches Goniometer den Vorzug verdienen, weil es die Anwendung von Tageslicht gestattet, während die Construction mit horizontalem Kreis nur in Ausnahmsfällen die Anwendung von Tageslicht zulässt, vielmehr die Beschaffenheit der Localitäten zumeist nöthigt, künstliche Beleuchtung anzuwenden und diese, namentlich aber der beim Messen stattfindende Wechsel zwischen hellerer und minder starker Beleuchtung, mit der Zeit auch die besten Augen verdirbt.

Wir werden uns daher vorzugsweise an die Construction mit vertikalem Kreise halten und die Ausführung des Instrumentes im Wesentlichen unserer Betrachtung zu Grunde legen, welche MITSCHERLICH in seiner Abhandlung: Ueber ein Goniometer, Abh. d. Berl. Acad. 1843 angegeben und abgebildet hat. Unsere Figur 2, Tafel II, ist eine Copie der MITSCHERLICH'schen Figur.

Zur Vervollständigung der Einrichtung dieses Goniometers wollen wir annehmen, ein zweites Fernrohr stehe dem ersten gegenüber und wende uns sein Objectiv zu; es sei somit das MITSCHERLICH'sche Goniometer mit 2 Fernrohren dargestellt.

Das erste und Haupterforderniss eines jeden Winkelmessinstrumentes, der getheilte Kreis EE besitzt fortlaufende Theilung von $0^0 - 360^0$ und zwar haben die einzelnen Theilstriche einen Werth von 20′. Von 0^0 an gerechnet, ist jeder dritte Theilstrich länger ausgezogen und zeigt die Grade an, alle 10 Grade stehen Zahlen auf der Theilung und zwischen je 10 Graden markirt ein längerer Theilstrich den Abstand von 5 Graden. Durch zwei diametral gegenüberstehende Nonien C″, die im Gegensatz zum Kreis, unbeweglich sind, werden je 39 Kreistheile in 40 Nonientheile getheilt, die Ablesung mit dem Nonius beträgt also $^1/_{40}$ eines Kreistheilstrichs = 30″. Diese Genauigkeit ist für die meisten krystallographischen Untersuchungen mehr als genügend. Durch die Ablesung des Winkels an zwei diametral gegenüberstehenden Nonien soll der Excentricitätsfehler des Kreises eliminirt werden; dieser Fehler wird, wie bereits bemerkt, veranlasst durch das Nichtzusammenfallen des geometrischen Kreismittelpunkts mit seinem Drehungsmittelpunkt. — An einem von BREITHAUPT in Kassel mir

gelieferten grossen Goniometer ist der Kreis so vollkommen centrirt, dass ich, trotz zahlreicher Ablesungen an beiden Nonien keinen bemerkbaren Excentricitätsfehler constatiren konnte.

Die Ablesung des Nonius geschieht in der Weise, dass die Loupe g, die an dem beweglichen Arme f noch in einer Hülse verschiebbar ist, für das Auge des Beobachters eingestellt und der Strich des Nonius aufgesucht wird, mit dem ein Strich der Theilung coincidirt. Man muss, um dies Zusammenfallen sicher beurtheilen zu können, die Loupe derartig über die in einer geraden Linie liegenden zwei Striche stellen, dass das Gesichtsfeld der Loupe gerade halbirt, also senkrecht auf den Strich gesehen wird.

Man habe z. B. den Nullpunkt des Kreises genau auf den Nullpunkt des Nonius gestellt, alsdann im Sinne der wachsenden Zahlen gedreht und wollte nun ablesen. Man finde, dass der Nullpunkt des Nonius über 60^0 stehe und zwar zwischen dem zweiten und dem dritten der auf 60^0 folgenden Theilstriche des Kreises. Der Winkel wird demnach liegen zwischen $60^0 40'$ und 61^0. Sucht man nun mit der Loupe des Nonius die Coincidenz eines seiner Theilstriche mit einem Theilstriche des Kreises auf, so finde man z. B. den 15. Theilstrich des Nonius mit einem des Kreises zusammenfallen. Der genaue Winkel wird also sein $60^0 47\frac{1}{2}'$. —

Was das Erfülltsein der Erfordernisse der Theorie an dem MITSCHERLICH'schen Goniometer mit zwei Fernrohren anlangt, so wollen wir darüber das Folgende bemerken.

Um die Kante zu centriren und zu justiren dienen die in der Figur 2, Tafel II in Verbindung mit dem Instrument und in Fig. 3 für sich gezeichneten Einstellungsapparate. Die Kante wird centrirt, durch zwei Schlitten, P S' und Q R', die senkrecht auf einander wirken und so die Kante in den Mittelpunkt der Drehung führen. Die Kante wird justirt durch den über den Schlitten befindlichen Einstellungsapparat u u, dessen wesentliche Einrichtung darin besteht, dass ein Kugelschaalensegment in einem anderen in zwei auf einander senkrechten Richtungen gleitend bewegt werden kann. Die Krystallkante ist dabei im Mittelpunkt dieser Bewegung, im Kugelmittelpunkt, angebracht und bleibt mit ihrem Ende, was dem Instrument zugewandt ist, fest und ruhig stehen.

Beide Einstellungen werden durch Zuhülfenahme der Fernrohre in später mitzutheilender Weise bewirkt und controlirt.

Um dem Auge des Beobachters die nöthige Stabilität zu verleihen und die Gegenstände gehörig zu fixiren, dienen zwei astronomische Fernrohre mit nicht zu starker Vergrösserung. MITSCHERLICH gibt an,

dass es gut sei, wenn das Fernrohr fast gar keine Vergrösserung habe; für das Auge des Verfassers jedoch und die der meisten Beobachter ist eine mässige Vergrösserung erwünscht. Man kann sagen, eine 3—5fache Vergrösserung genüge allen Ansprüchen auf's Beste, denn während mit der Vergrösserung die Fähigkeit des genauen Einstellens wächst, nimmt mit derselben aber auch die Lichtstärke des Bildes ab, und, da die meisten Krystallflächen nicht grade übermässig spiegelnd sind, so fällt dieser Umstand schwer in's Gewicht und setzt der Vergrösserung rasch eine Grenze. Beide Fernrohre sind mit Fadenkreuzen versehen, die man bei dieser Vergrösserung am besten aus feinen Coconfäden anfertigt, wenn man keine Fadenkreuze, auf Glas geritzt, zur Verfügung hat.

Bei meinem Instrument haben die Objective 60 Mm. Focus und die Oculare einen solchen von 20 Mm. Der Abstand des Krystalls von den Objectiven beträgt ca. 75 Mm. Ein besonderes Augenmerk ist, bei der schwachen Vergrösserung, diesem Abstande zu schenken, jedenfalls ist sorgfältig zu vermeiden, dass die Distanz des Krystalls von den Objectiven kleiner sei, als deren Brennweite. Man wird sonst vergeblich ein gutes, vollständiges Reflexbild in den Fernrohren suchen. — Beide Fernrohre besitzen Aufsetzloupen, die vor die Objective gesetzt werden; nach deren Anbringen erblickt man, durch die Oculare gesehen, den Krystall selbst im Gesichtsfeld.

Nehmen wir an, die Fernrohre seien derartig justirt, dass die Horizontalfäden ihrer Fadenkreuze genau weisen auf die Verlängerung einer Linie, die man sich im Drehungsmittelpunkt des Instrumentes senkrecht auf die Ebene des Kreises errichtet denken kann. Denken wir uns ferner auf die Objective die Aufsetzloupen aufgesetzt, so wird die Kante dann centrisch und justirt sein, wenn sie bei einer vollen Umdrehung des Kreises nicht aus den Horizontalfäden der Fernrohre ausweicht und unabänderlich darin liegend verharrt. Wir können uns also dadurch überzeugen, ob die Centrirung und Justirung der Kante in Strenge stattfinden. Wird die bei Anbringen an das Instrument bereits beiläufig justirte Kante zuerst centrirt, dann fein justirt, so weicht sie bei letzterer Operation nur ganz wenig aus der Centrirung aus und bleibt jedenfalls im Gesichtsfelde des Fernrohrs. Wie wir oben sahen, befindet sich ja der dem Instrument zugekehrte Theil der Kante im Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche die zwei senkrecht zu einander wirkenden Justirbewegungen vor sich gehen. Nach der Feinjustirung findet schliesslich die letzte Feincentrirung statt.

Sonach wären die Bedingungen a und b erfüllt; die übrigen lassen sich sämmtlich in Strenge vermittelst der zwei Fernrohre realisiren.

Das Fadenkreuz des einen liefert den einen Fixpunkt, das Fadenkreuz des zweiten Fernrohrs verleiht dem Auge des Beobachters die nöthige Stabilität. Die Lage dieser beiden Fixpunkte über dem Horizont kann, da die Fernrohre in der Verticalebene verstellbar sind, passend angenommen werden. Bei Anwendung zweier Fernrohre müssen die Sehweiten beider auf Unendlich gestellt werden, die Fadenkreuze werden daher als unendlich entfernte, folglich auch gleich weit entfernte Gegenstände anzusehen sein. Alle aus der unendlichen und gleich weiten Entfernung fliessenden Vortheile ergeben sich somit. Schliesslich lässt sich auch das letzte Erforderniss, die Parallelität der Ebene, gelegt durch den Krystall und die Gegenstände, mit der des getheilten Kreises auf leichte mechanische Weise herstellen, wie wir später sehen werden.

Das Goniometer mit zwei Fernrohren ist demnach ein sehr vollkommenes Instrument und es brauchen, wie sich von selbst ergibt, nicht alle Bedingungen, die wir als Erfordernisse der Theorie kennen gelernt haben, bei ihm zugleich erfüllt zu sein, da die unendliche Entfernung der Objecte mehrere derselben als hinfällig erscheinen lässt. Immerhin wird es aus praktischen Gründen vortheilhaft sein, allen Bedingungen möglichst zu genügen.

Was am Instrumente anzubringende Verbesserungen anlangt, so kann vor allen Dingen der Kreis feiner getheilt sein, wenngleich selten eine grössere Genauigkeit, als die oben angegebene, erfordert wird. Das eine Fernrohr mit Fadenkreuz kann durch ein Rohr ersetzt werden, das einen Spalt, im Focus einer Linse befindlich, besitzt; diese Vorrichtung gestattet intensivere Beleuchtung und folglich vermehrte Helligkeit. Von wesentlicherer Bedeutung als diese Aenderungen ist jedoch eine neue Justirvorrichtung, bei der der Krystall auch im Drehungsmittelpunkt des Systems steht und mit ausgiebigeren Bewegungen, als sie die Mitscherlich'sche Justirvorrichtung zulässt, nach zwei senkrechten Richtungen verstellt werden kann. Es ist dies die Vorrichtung zum Justiren, welche der Mechaniker Fuess in Berlin an den Groth'schen Instrumenten anbringt; sie besteht im Wesentlichen darin, dass zwei Cylinderabschnitte von ungleichem Durchmesser der Cylinderbasis, aber gemeinsamem Drehungsmittelpunkt in senkrecht zu einander stehenden Richtungen vermittelst Spiralfederwerken verschoben werden können. Letztere Vorrichtung vermeidet namentlich den todten Gang, den die Schrauben der anderen Justirvorrichtung leicht bekommen.

Leider ist nun die Anwendung dieses so vortrefflichen Instrumentes eine beschränkte, da nur wenige Krystalle ebenflächig und spiegelnd genug sind, um die Lichtschwächung, die durch die zwei Fernrohre bewirkt wird, zu ertragen.

Man wird sich daher zumeist genöthigt sehen, das Instrument nur mit einem Fernrohre, welches den Fixpunkt für das Auge abgibt, anzuwenden. Der andere Fixpunkt wird durch einen passend gelegenen, entfernten Gegenstand, etwa eine Kirchthurmspitze, eine Wetterfahne, Blitzableiter, Schornstein u. s. w. ersetzt und auf denselben das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres scharf eingestellt. Bei schwach reflectirenden Krystallen wendet man auch die Sprossen des Fensters im Zimmer als Object an. In diesem Falle sollte das Instrument, wenn es angeht, möglichst weit und nicht unter 3—5 Meter vom Fenster entfernt stehen.

Ein Instrument dieser Art zeigt Fig. 2, Taf. II. Will man dasselbe vereinfachen, so kann zunächst die Theilung so eingerichtet werden, dass der Nonius ganze Minuten gibt, die Mikrometerwerke Ji und Gh können wegfallen, ferner kann das Fernrohr ein einfaches Lager erhalten. Die Centrir- und Justirvorrichtung kann ersetzt werden durch eine Einrichtung, wie sie Fig. 4, Taf. II zeigt. Nach diesen Vereinfachungen wird sich der Preis des Instrumentes auf etwa 150 Mark stellen und so die Hälfte des vorigen ausmachen. Wie dieses vereinfachte Instrument sowohl, als auch das vollkommenere gehandhabt werden, soll später gezeigt werden.

Vorläufig sei nur bemerkt, dass sich die Messungen mit dem vereinfachten Instrument rasch, sicher und hinreichend genau vollziehen lassen, wovon ich mich durch zahlreiche Versuche vollständig überzeugt habe.

An dem vereinfachten Instrumente auch noch das Fernrohr wegzulassen, ist nicht zu rathen, da es recht anstrengend und ermüdend ist, bei der Messung das Auge annähernd unbeweglich zu erhalten. Will man nichtsdestoweniger mit blossem Auge messen, so empfiehlt es sich, am Fussgestell des Goniometers und parallel der Axe desselben drehbar, einen kleinen, ebenen, schwarzen Spiegel zu befestigen und darin nach dem Vorschlag von KUPFFER (Preisschrift 1825, pag. 40) das Object sich spiegeln zu lassen. Man bringt das Spiegelbild auf der Krystallfläche mit dem Bild im Spiegel zur Deckung. Durch den Spiegel wird es bewirkt, dass die beiden Gegenstände: O und sein Spiegelbild O′ im schwarzen Spiegel, gleiche Entfernung vom Krystalle haben. Soweit der Krystall über den schwarzen Spiegel reicht, schützt man das lichtschwächere Bild der Krystallfläche vermittelst einer Blende am Spiegel vor dessen Reflex.

3. Prüfung des Goniometers. Aufstellung und Justirung. Einstellung des Krystalls am Mitscherlich'schen Goniometer und am vereinfachten Instrumente.

Bei der Wahl des Messinstrumentes kommt vor allen Dingen der zur Verfügung stehende Geldbetrag in Betracht, ferner die wesentlichsten Zwecke, die man verfolgen und erreichen will.

Das MITSCHERLICH'sche Goniometer mit 2 Fernrohren gestattet alle Bedingungen, die zu einer guten Messung erforderlich sind, in Strenge zu erfüllen, in seiner hauptsächlichsten Verwendung mit einem Fernrohre ist es ebenfalls noch ein vorzügliches Instrument. Das vereinfachte, billigere Instrument gestattet die Kante zu justiren, auch sehr annähernd zu centriren. Die Gegenstände können auch bei ihm weit und gleich weit entlegen gewählt werden, der Parallelismus der Ebene, die durch die Fixpunkte geht, ist annähernd herzustellen mit der Ebene des getheilten Kreises. Wenn auch die Justirung dieses Instrumentes in sich nicht so vollständig vorgenommen werden kann, wie beim MITSCHERLICH'schen Instrumente, einzelne Theile schon in correcter Stellung vom Mechaniker angebracht werden müssen, so liefert es doch recht befriedigende Resultate und dürfte, seines billigen Preises wegen, sich allgemeinerer Verbreitung erfreuen.

Welches Instrument man auch gewählt haben möge; immer ist es wünschenswerth sich über die correcte Ausführung desselben zu versichern.

Zunächst kommt es darauf an Theilung und Nonius zu untersuchen. Sind beide gut ausgeführt, so muss an jeder Stelle der Nonius dieselbe Anzahl Kreistheile in eine gewisse Anzahl seiner Theilstriche theilen. Es müssen z. B. beim feineren Instrumente stets 39 Theilstriche des Kreises in 40 Theilstriche des Nonius getheilt sein, so dass, wenn 0 des Kreises mit 0 des Nonius zusammenfällt, der 39. Theilstrich des Kreises mit dem 40. des Nonius coincidirt. Findet diese Coincidenz nicht an Stellen des Kreises statt, so ist der Kreis fehlerhaft getheilt, stimmt an allen Stellen des Kreises dies Zusammenfallen nicht, so hat der Nonius einen constanten Fehler. In diesen Fällen ist das Instrument kaum zu feineren Untersuchungen brauchbar; man wird einer solchen Misslichkeit entgehen, wenn man sein Instrument nur von einer renommirten Werkstätte bezieht.

Die richtige Centrirung des Kreises ist Sache des Mechanikers. Sie kann sehr genau bewirkt werden. Der etwaige Fehler wird durch 2 diametral gegenübergestellte Nonien eliminirt; an denselben wird der Winkel doppelt abgelesen und die Hälfte der Summe beider Ab-

lesungen genommen. Hat das Instrument nur einen Nonius und will man wissen, ob es gut centrirt sei und wo ungefähr seine Excentricität liege, so braucht man nur eine grosse Anzahl von Messungsdaten (es setzt dies freilich voraus, dass man schon gut messen könne) in vier Abtheilungen zu bringen, je nachdem sie in den ersten, zweiten, dritten oder vierten rechten Winkel fallen. Ist das Instument schlecht centrirt, so variiren die mittleren Werthe in den vier Quadranten. Der Mittelpunkt der Drehung liegt da, wo der gefundene mittlere Werth der kleinste ist.

Schliesslich kommt es noch darauf an, die Axen zu untersuchen, ob sie gehörig abgeschliffen und eingepasst, auch die durch sie bewirkten Bewegungen sanft und sicher seien. Da, wo Schrauben angebracht sind, ist zu prüfen, ob dieselben zweckentsprechend wirken und keinen sog. todten Gang haben.

Das Fadenkreuz des Fernrohrs ist durch Verschieben des Oculars gegen dasselbe in der Ocularröhre scharf und wohl sichtbar einzustellen, alsdann ist es vermittelst der Ocularröhre, die in der Hauptröhre des Fernrohrs in einer Führung gleitet, genau an die Stelle zu bringen, wohin das vom Objectiv entworfene Bild des Gegenstandes, den man als den einen Fixpunkt wählt, fällt. Steht das Fadenkreuz an der richtigen Stelle, so muss das Bild des Gegenstandes durch das Ocular betrachtet, bei jeder Stellung des Auges auf derselben Stelle des Fadenkreuzes bleiben. Dreht man aber das Auge rechts und es erscheint das Fadenkreuz links vom Bilde, so steht es zwischen dem Ocular und dem Bilde, erscheint es rechts, so steht es zwischen dem Objectiv und dem Bilde. Seine Stellung muss alsdann so lange verbessert werden, bis es bei jeder Stellung des Auges in Bezug auf das Bild ruhig steht.

Sind diese Prüfungen und Einstellungen gemacht, so kann zur Justirung des Instrumentes geschritten werden. Wir berücksichtigen dabei wesentlich nur das MITSCHERLICH'sche Goniometer mit einem Fernrohre, so weit sich die Justirungen dann noch auf das vereinfachte Instrument erstrecken, verstehen sie sich von selbst. Die Justirung des MITSCHERLICH'schen Goniometers geben wir in der Hauptsache nach MITSCHERLICH's oben genannter Abhandlung.

Man stellt das Instrument auf einen schweren, dreibeinigen Tisch mit verstellbarer Platte etwa 3—5 Meter von einem Fenster entfernt auf und richtet es so, dass der vertikale Kreis beiläufig senkrecht steht auf der Ebene des Fensters. Eine nähere Betrachtung des Instrumentes lässt folgende Construction erkennen.

Die starke Hülse A und das Gestell A, Fig. 2, Taf. II, sind aus einem Stück angefertigt und von unten auf die Messingplatte B auf-

geschraubt. An den Ansatz der Hülse, welcher genau centrisch mit dieser abgedreht ist, ist der Ring C mit seiner Platte C', die die Nonien C'' trägt, angeschraubt (in der Figur ist nur der eine Nonius sichtbar). Ueber den Nonien erheben sich Blenden zur Abhaltung des directen Lichtes und Verhinderung des Reflexes der Theilung. Zur Ablesung sind an den Armen f bewegliche und zum Nonius verstellbare Loupen g angebracht.

Durch die Hülse A geht die hohle Axe DD, auf welche der Kreis EE mit Schrauben befestigt ist. Die grobe Bewegung desselben bewirkt die Scheibe F, die Feineinstellung die Micrometerschraube G, nachdem der Kreis durch die Klemmvorrichtung h arretirt worden ist. Durch die Axe DD geht die Axe HH, welche den Krystall mit dessen Einstellungsapparat trägt. Die grobe Einstellung bewirkt hier die Scheibe K, die feine das Mikrometerwerk Jii. Wird die Klemme h angezogen und die Klemme i gelöst, so kann man den Krystall mit seinem Einstellungsapparat vermöge der Scheibe K bewegen, während der Kreis arretirt ist; wird i angezogen und h gelöst, so ist der Kreis mit der Scheibe F beweglich und der Krystall steht still; sind beide Klemmen gelöst, so kann man mit F Krystall und Kreis bewegen; ebenso nach Anziehen der Klemme h mit der Schraube G.

Die nächst vorzunehmende Operation ist, die Axe des Kreises rechtwinkelig zu der Ebene zu stellen, in der sich das Fernrohr bewegen lässt. Annähernd ist dies bereits beim Aufschrauben von Kreis und Fernrohrlager durch den Mechaniker geschehen; in Strenge hat jedoch der Beobachter die Justirung dieser Theile vorzunehmen.

Man stellt zuerst das Fernrohr so ein, dass ein auf die Justirvorrichtung aufgesetzter Krystall im Gesichtsfeld ist; zu diesem Zwecke verrückt man es in den Einschnitten der Platte h'' und schraubt es dann mit den Schrauben m fest. Hierauf wird mit einer auf Z gesetzten Dosenlibelle die Platte Z horizontal gestellt, dann geht ihr auch annähernd parallel die Axe des Instrumentes und die Axe des Fernrohrs ist mit der des Instrumentes ebenfalls annähernd in paralleler Stellung.

Nun wird durch die Schrauben ooo die gegen das Lager O drücken, dem Fernrohre eine solche Stellung gegeben, dass die optische Axe desselben, wenn es um seine horizontale Axe gedreht wird, eine senkrechte Kreisfläche beschreibt. Zu dem Ende befestigt man am Fenster eine mit einem Gewichte beschwerte Darmseite, welche so angebracht ist, dass sie im Mittelpunkt des Gesichtsfelds des Fernrohrs erscheint. Die richtige Stellung des Fernrohrs ist erreicht, wenn beim Drehen desselben um seine horizontale Axe die Darmseite fortwährend im Ver-

ticalfaden des Instrumentes bleibt. Man zieht alsdann durch die Schraube p das Lager O fest an.

Hierauf bringt man die Axe des Goniometers in eine genau horizontale Lage. Zu diesem Zwecke befestigt man am Justirapparat eine 3—4 Mm. dicke planparallele Glasplatte (am besten von Steinheil in München zu beziehen) und bringt unter dieselbe eine Schaale mit Quecksilber. Indem man nun verfährt, wie bei der Krystalleinstellung, die alsbald näher erläutert werden wird, stellt man die eine Fläche der Glasplatte so ein, dass eine bestimmte Stelle der perpendiculären Darmsaite von der Glasplatte sowohl, als auch von der Quecksilberoberfläche reflectirt, an derselben Stelle im Fernrohr erscheint. Hierauf dreht man den Kreis um 180⁰ und bringt das Goniometer vermöge der Anziehungsschrauben xxx und der Abstossungsschrauben yyy in eine solche Lage, dass man auch von der andern Fläche der Glasplatte und von der Oberfläche des Quecksilbers denselben Theil der angespannten Darmsaite im Fadenkreuz erblickt. Durch die Justirung der zweiten Fläche wird die erste etwas in ihrer Lage alterirt werden, man gleicht daher auf der ersten Fläche aus, controlirt die zweite und wiederholt dies Verfahren bis beide Flächen die richtige Lage haben. Sollte schliesslich beim Umdrehen des Kreises das Bild der perpendiculären Darmsaite seiner ganzen Länge nach nicht im Fadenkreuze bleiben, so nimmt man die kleine Abweichung der Axe des Goniometers in der Horizontalebene, von der Verticalbewegung des Fernrohrs, dadurch weg, dass man durch die Schrauben vv die Stellung des Fernrohrlagers etwas ändert, und danach auch das Loth wieder so stellt, dass es im Fadenkreuz erscheint.

Ist dies geschehen, so ist schliesslich noch der Horizontalfaden des Fadenkreuzes derartig zu richten, dass er eine Linie deckt, die man sich senkrecht auf die Kreisfläche im Mittelpunkt der Drehung errichtet denken kann. Zu diesem Zwecke stellt man die Schlitten des Centrirapparates und die Bewegungen des Justirapparates so ein, dass die Ausschläge nach beiden Seiten gleich sind, fügt in die Führung des Justirapparates auf der Platte 2, Fig. 3, Taf. II, ein an einem Stift befestigtes Scheibchen ein, in dessen vorher bestimmten Mittelpunkt man eine sehr feine Nadel, senkrecht zur Fläche des Scheibchens, mit Wachs befestigt hat. Auf das Objectiv des Fernrohrs wird die Aufsetzloupe aufgesteckt, man erblickt alsdann die Nadel, parallel dem Horizontalfaden des Fernrohrs, im Gesichtsfeld desselben. Durch die Schlitten wird die Nadel nun genau in den Horizontalfaden geführt und der Kreis gedreht. Die Nadel wird im Allgemeinen alsdann nicht ruhig stehen bleiben, und man wird mit den Schlitten wirken, viel-

leicht auch noch das Fernrohr etwas heben oder senken müssen, bis man an einer Stellung angelangt ist, in der die Nadel bei der Drehung des Kreises ruhig und nur um ihre eigene Axe gedreht, im Horizontalfaden verharrt. Dies ist die gewünschte Stellung. Man bezeichnet sich dieselbe an den Schlitten durch Marken und stellt auch das Fernrohr in ihr ganz fest, indem man vorn in das Lager eine verstellbare Schraube einlässt, wider die sich das Rohr legt.

Das Einstellen des Krystalls am MITSCHERLICH'schen Goniometer wird in folgender Weise vollführt.

Man befestigt am Krystallträger, einem Scheibchen mit einerseits rauher Oberfläche, andererseits senkrecht aufgesetztem Stiele, den Krystall so, dass seine Kante ungefähr senkrecht auf der Oberfläche des Scheibchens steht und beiläufig im Mittelpunkte desselben sich befindet. Zu diesem Ende drückt man zwischen den Fingern längere Zeit geknetetes Wachs an das Scheibchen an und setzt den Krystall, wenn er klein ist, zuvor noch mit Wachs auf ein Stäbchen, welches letztere man dann mit dem Wachs des Scheibchens in einer Weise verbindet, wie es Fig. 4, Taf. II zeigt. Ist der Krystall grösser, so wird er direct an das Wachs des Scheibchens befestigt. Man vergewissert sich, ob die Einstellung ungefähr die richtige sei, indem man den Krystall am Stiele des Scheibchens vor dem Auge um eine horizontale Axe zwischen den Fingern dreht und dabei zusieht, ob die der Kante anliegenden Flächen ein entferntes Object gleichmässig reflectiren. Nun setzt man den Stiel in die Führung des Justirapparats ein und gibt durch Drehen am Scheibchen dem Krystall eine solche Lage, dass seine Flächen beiläufig senkrecht zu den Schrauben 3 und 4 stehen, Fig. 3, Taf. II, auf dass diese mit dem Maximum ihrer Leistungsfähigkeit wirken können. Alsdann setzt man die Loupe auf das Objectiv des Fernrohrs auf und erblickt den Krystall nunmehr in dessen Gesichtsfeld. Mit Hülfe der Schlitten wird die Kante in den Mittelpunkt geführt, wobei man die Vorsicht befolgt, zuerst den einen Schlitten, z. B. QR' in die Richtung des Fernrohrs zu stellen und mit der Schraube des andern Schlittens PS' die Kante in den Horizontalfaden zu bringen, alsdann den Krystall mit der Scheibe F oder K, Fig. 2, Taf. II, um 90° zu drehen, so dass PS' in die Richtung des Fernrohrs kommt und mit Hülfe der Schraube des Schlittens QR' die Kante in den Horizontalfaden zu stellen. Stossen die Flächen nicht in einer Kante zusammen, so muss eine Fläche genau in die Lage der anderen kommen.

Ist dies geschehen, so wird mit Hülfe der Schrauben 3 und 4 die Kante so gestellt, dass sie genau parallel dem Horizontalfaden des

Fernrohrs geht und die ihr anliegenden Flächen bei der Drehung des Kreises spiegeln. Durch erstere Operation geht die feine Centrirung verloren und wird in eben beschriebener Weise wieder hergestellt. Hiermit ist der Krystall richtig eingestellt, seine Kante weicht bei der Drehung des Kreises aus dem Horizontalfaden nicht aus, und, wenn die Loupe weggenommen und die Scheibe K gedreht wird, so erscheint das Loth im Fadenkreuz, sobald die Flächen des Krystalls in der reflectirenden Stellung stehen. Sollten alsdann noch Abweichungen stattfinden, so könnten sie jedenfalls nur minimale sein und von nicht ganz gelungener Justirung herrühren; sie wären mit Hülfe der Schrauben 3 und 4 wegzunehmen.

Will man am Instrumente ein zweites Fernrohr anbringen, so befestigt man in ähnlicher Weise, wie den Krystall, die STEINHEIL'sche Planparallelplatte am Krystallträger, und bringt das zweite Fernrohr in eine solche Stellung, dass sein Fadenkreuz, wenn man es mit dem ersten Fernrohr durch Reflexion von der oberen und unteren Seite der Platte beobachtet, in beiden Fällen mit dem Fadenkreuz des ersten Fernrohrs scharf und deutlich coincidirt. Die dazu nöthigen Verstellungen führt man am Lager des zweiten Fernrohrs in ähnlicher Weise aus, wie seiner Zeit an dem des ersten und beleuchtet überdies des Fadenkreuz des zweiten Fernrohrs durch eine vor dem Oculare angebrachte Flamme.

Am vereinfachten Instrumente hat der Mechaniker die Axe des Goniometers horizontal und den Kreis vertical gestellt; der Tisch besitzt drei Stellschrauben mit Hülfe deren und einer aufzusetzenden Dosenlibelle man ersteren auf jeder Unterlage horizontal und somit die anderen Theile richtig stellen kann. Das Fernrohr ist mit seiner Axe parallel der Drehaxe des Kreises gerichtet; es ist ferner in einem Schlitten, senkrecht gegen den Kreis verschiebbar und feststellbar, kann auch abgenommen werden. Da die Centrirung und Justirung des Krystalls hier vorzugsweise aus freier Hand geschehen, so dient es nicht mehr zur Unterstützung der Einstellung, sondern nur zur Fixirung des Augenpunktes.

Centrirung und Justirung des Krystalls werden wie folgt bewirkt. An Stelle des complicirten Apparates des MITSCHERLICH'schen Goniometers ist ein bei G beweglicher Bügel BB' mit einer Spitze S angebracht, die so abgedreht ist, dass sie sich im Mittelpunkt der Drehung befindet. Fig. 4, Taf. II. (Ansicht von vorn, der Beobachter sitzt auf der entgegengesetzten Seite, hat also PL zur linken Hand.)

Der Krystall wird am Träger PL ausserhalb der Vorrichtung eingestellt, wie beim MITSCHERLICH'schen Goniometer und es ist hier besonders darauf noch zu achten, dass das Wachs der Scheibe P das Wachs nicht berühre, auf dem der Krystall auf dem Stäbchen H sitzt. Man hat, wie früher, den Krystall bereits mit seiner Kante parallel PL eingestellt und auch die Kante so gerichtet, dass sie auf einen Punkt von P weis't, welcher, wenn man PL in die Hülse einführt und P der Spitze S nähert, mit S zusammenfällt. Indem man diese Operation, unter Entfernung des Fernrohrs, mit dem aufgesetzten Krystall wiederholt, überzeugt man sich, ob seine Kante im Mittelpunkt der Drehung stehe. Hierauf bringt man den Krystall in eine solche Stellung, dass die Mitte seiner Kante in die Verlängerung der Drehaxe von G fällt, das Stäbchen H etwas vom Bügel BB' absteht und zieht alsdann die Schraube R an. Der Krystall ist nun noch zu justiren. Hierzu dienen zwei Bewegungen: die eine wird ausgeführt in der Horizontalebene mit dem Bügel B' durch Drehung um das Gelenk G, die andere mit der Hand durch Drehung in der, parallel der Axe des Instrumentes, vor dem Beobachter gedachten Verticalebene. Diese letztere Bewegung vollführt man, wie folgt. Man bringt sein Auge dem Krystall sehr nahe, fasst mit dem Zeigefinger und dem Daumen der linken Hand das Stäbchen H und das Wachs von P an und drückt mit leicht angelegtem Zeigefinger der rechten Hand etwas auf das Wachs, entweder im Sinne einer Neigung der Krystallkante in einer Richtung nach rechts unten oder links oben. Durch diese zwei Bewegungen stellt man äusserst rasch ein, was man dadurch erkennt, dass ein Gegenstand, auf der einen Fläche reflectirt, in derselben Lage auf der anderen Fläche sich zeigt. Durch die Justirung wird die Centrirung etwas gestört; man schiebt den Krystall am plastischen Wachs parallel sich selbst wieder in den Mittelpunkt und controlirt alsdann nochmals die Justirung. Vor das Objectiv des Fernrohrs kann dann auch eine Loupe aufgesetzt werden, vermöge deren man, wenn Centrirung und Justirung gelungen sind, die Kante im Horizontalfaden des Fadenkreuzes und, bei der Drehung nur um die eigene Axe bewegt, sehen muss.

Durch diese Vorrichtung wird es erreicht, dass die grobe Einstellung ausserhalb des Instrumentes bewirkt und sonach der Druck auf die Axe vermieden wird. Die Anfänger lernen, wie mich eine mehrjährige Praxis überzeugt hat, schon nach kurzer Uebung recht leicht und sicher einstellen und es erlangt die Hand die so nothwendige feine Ausbildung, ohne welche man kostbare Instrumente mit Mikrometerwerken nicht berühren sollte.

Empfehlenswerth als Centrir- und Justirvorrichtung ist auch ein sog. Petzval'scher Träger, dessen hauptsächlichste Theile aus einer Kugelschaale bestehen, in die ein Kugelsegment genau eingeschliffen ist. Dasselbe ist durch Federn angehalten und besitzt einen Stiel derartig angebracht, dass dessen Spitze mit dem Centrum der Kugel zusammenfällt. Jede an diesen Stiel gebrachte Kante ist dadurch bereits centrirt und kann leicht durch Bewegungen des Segmentes in der Schaale justirt werden.

Die Schlittenvorrichtung hat diesen beiden Centrirapparaten gegenüber den Vorzug, dass man jedes Glied des parallelen Kantenverlaufs einer Zone leicht einzeln centriren kann, was bei den anderen Vorrichtungen nicht angeht. Sind die Krystalle klein, so kann man bei passender Wahl der Objective schon einen kleinen Centrirungsfehler begehen; bei grösseren Krystallen muss an dem vereinfachten Goniometer jede Kante für sich centrisch eingestellt werden, da die Bedingungen, welche den Excentricitätsfehler der Kante vernichten würden, doch nicht in Strenge herzustellen sind.

4. Benutzung des Instrumentes zum Auffinden der Zonen und Messen der Neigungswinkel der Flächen. Verfahren dabei. Messungen an unvollkommenen Krystallen und Abdrücken von Krystallen.

Die soeben gemachten Bemerkungen lassen sofort eine Verwendung des Goniometers, die zum Nachweise der Zonen, erkennen. Werden zwei Flächen, die in einer Kante zusammenstossen, oder auch irgend zwei Flächen, deren Schnitt durch dazwischenliegende Flächen gehindert wurde, eingestellt und der Krystall alsdann am Goniometer gedreht, so geben sich die Flächen, welche mit den genannten in einer Zone liegen dadurch zu erkennen, dass die Reflexbilder auf ihnen die gleiche Lage haben, wie die auf den eingestellten Flächen. Man wird dadurch die Angehörigkeit von Flächen zu einer Zone auch dann nachweisen können, wenn die parallelen Kanten ihrer Schnittlinien fehlen, die Zone also versteckt ist; man wird ferner einen scheinbaren Kantenparallelismus von einem wahren zu unterscheiden vermögen.

Der wichtigere Zweck des Instrumentes ist jedoch der zur Winkelmessung. Dabei wird wie folgt verfahren. Man stellt zuerst mit der Scheibe F bei gelösten Klemmen i i und h h den Nullpunkt des Kreises annähernd auf den Nullpunkt des Nonius, zieht alsdann h an und stellt mit G fein ein. Sodann bringt man die dem Beobachter zugekehrte Fläche des Krystalls durch Drehung mit der Scheibe K in

eine solche Lage, dass das entfernte Object im Fadenkreuz des Fernrohrs erscheint, zieht die Klemme ii an und stellt mit J fein ein. Hierauf werden hh und ii gelöst und durch Drehung an F in der Richtung nach dem Beobachter zu, die zweite Fläche in dieselbe Lage, in der die erste sich befand, annähernd gebracht, die Klemme hh angezogen und mit der Mikrometerschraube G die Feineinstellung vollzogen. Der am Kreis und Nonius abzulesende Winkel ist die Ergänzung des Neigungswinkels der Flächen zu 180°.

Bringt man 180° des Kreises mit 0 des Nonius zur Coincidenz, stellt die dem Beobachter abgewendete Fläche ein, dreht in der Richtung vom Beobachter ab, bis die zweite Fläche einsteht, so erhält man den Neigungswinkel direct, indem der Ergänzungswinkel alsdann am Kreise von 180° abgezogen wird.

Beim Messen der Neigungswinkel sehr kleiner Flächen muss die Loupe auf das Objectiv des Fernrohrs aufgesetzt und damit erst die gewünschte Fläche durch ihren Lichtschein ermittelt werden, ehe man, unter Abnahme der Loupe, das reflectirte Bild fein einstellt und zur Messung schreitet.

Um die persönlichen Fehler auszugleichen und den Fehler, der aus mangelhafter Centrirung des Kreises entspringt, zu beseitigen,* werden die Messungen mit Repetition angestellt. Man geht dabei von der Stellung aus, bei der 0 des Kreises mit 0 des Nonius coincidirt und dreht, nachdem die erste Messung gemacht ist, den Krystall, ohne den Kreis zu berühren, in die Anfangsstellung zurück, misst dann, wie das erste Mal und fährt so fort, bis um den ganzen Kreis herum gemessen ist. Der letzte Gesammtwinkel, dividirt durch die Anzahl der Beobachtungen, ist der gewünschte Mittelwerth. Dieser ist von 180° zu subtrahiren, um den wahren Winkel zu geben.

Besondere Aufmerksamkeit ist den Winkeln zu schenken, die der Berechnung der Axenelemente der Krystalle zur Grundlage dienen. Zur Ermittelung derselben sind die bestgebildeten Krystalle auszulesen und die Mittelwerthe aus den Winkeln der betreffenden Kanten zu benützen, wobei dieselben, je nach der Güte der Flächenreflexe, mit verschiedenen Gewichten anzunehmen sind. In manchen Fällen schöpft man auch diese Fundamentalwerthe mit Vortheil aus einem vollkommenen Krystall.

* Sind, wie an unserem Instrument, zwei diametral gegenüberstehende Nonien vorhanden, so eliminirt sich durch dieselben der Excentricitätsfehler des Kreises in bekannter Weise.

Je grösser die Genauigkeit der Fundamentalmessungen ist, desto geringer werden die Differenzen zwischen beobachteten und aus dem Axenverhältniss gerechneten Winkeln sein; in diesen Abweichungen wird man die Abnormitäten im Krystallbau erkennen.

Der Grad der Genauigkeit der Messungen an ebenen, spiegelnden Flächen ist aber ein sehr grosser und liefert, wenn diese Messungen zur Berechnung der Krystallelemente benutzt werden, dieselben nahezu absolut richtig. — Stehen jedoch nur minder gut gebildete Krystalle zur Verfügung, so werden sich aus dem, auf Grund der Messungen derselben gerechneten Axenverhältniss, Winkelwerthe durch Rechnung für die übrigen Kanten ergeben, die mit den gemessenen grössere Differenzen zeigen. Um diese Differenzen zu einem Minimum zu machen, müssen alle gemessenen Winkel herangezogen und mit denselben die Elemente verbessert werden. Es geschieht dies mittelst der Methode der kleinsten Quadrate und es mögen zur Belehrung hierüber die schon erwähnten Werke von Kupffer, Neumann und Schrauf, dann das Werk von Schabus, Best. d. Krystallgest. in chem. Lab. erz. Produkte 1854, die Vorlesungen über Mineralogie von Kokscharow 1865 und die Krystallographie von V. v. Lang 1866 nachgesehen werden. Abgesehen davon finden sich viele andere treffliche Beobachtungen und Anweisungen, niedergelegt in den Arbeiten von Brezina, Dauber, Schrauf, Zepharovich u. s. w.

Was schliesslich die Messung schlecht gebildeter Krystalle anlangt, so ist zu unterscheiden, ob die Flächen nur matt, sonst aber eben gebildet sind, oder, ob sie Streifungen, Knicke und Wölbungen zeigen.

Im ersteren Falle empfiehlt es sich, die Beobachtungen im dunkelen Zimmer vorzunehmen und mittelst eines in passende Entfernung gebrachten leuchtenden Objectes (kleine Gasflamme oder glühender Platindraht) zu beobachten. Sehr schwach reflectirende Flächen werden auch wohl durch Befeuchten mit Oel schimmernd gemacht, oder Deckgläschen aufgesetzt und dann mit diesen gemessen. Letztere Operation muss aber sehr genau vollführt werden, wenn sich nicht beträchtliche Fehler einstellen sollen. In den äussersten Fällen wird vor das Objectiv des Fernrohrs eine Loupe aufgesetzt und auf das Maximum des Schimmers eingestellt.

Im zweiten Falle, in dem man es mit sog. componirten Krystallen zu thun hat, deren Individuen in nicht streng paralleler Lage sich befinden, ist es oftmals wünschenswerth, den Reflex einer sehr kleinen, genau bestimmten Stelle zu erhalten. Zu diesem Zwecke hat Prof. Websky mit Vortheil die Anwendung eines verkleinernden Fernrohrs

vorgeschlagen und ist über das Detail der Operation mit demselben die betreffende Abhandlung in Pogg. Ann. B. 132, p. 623 nachzusehen. —

Bisweilen sieht man sich auch veranlasst, Abdrücke von Siegelwachs an Krystallen zu nehmen und dieselben zu messen, besonders dann, wenn die Krystalle auf Stufen sitzen und weder abzunehmen, noch mit der Stufe auf's Instrument zu bringen sind. Manchmal haben auch sehr grosse Krystalle einzelne gute Stellen, die man dann mit Wachsabdrücken auswerthen kann.

Specieller Theil.

A. Die wichtigsten Grundgesetze der Krystallographie und ihre Anwendung auf Krystallberechnung.

Alle in der Folge mitzutheilenden Operationen beruhen auf einigen wenigen, zumeist empirisch erkannten Gesetzen, die wir desshalb der eigentlichen Krystallberechnung vorausschicken müssen.

I. Gesetz der Constanz der Neigungswinkel.

Dies sehr wichtige Gesetz ist zuerst von STENO in seiner im Jahre 1669 zu Florenz erschienenen Dissertation: „De solido intra solidum naturaliter contento" ausgesprochen worden. Bei Gelegenheit der Erklärung der dem Werke angehängten Figuren heisst es:

„In plano axis laterum et numerum et longitudinem varie mutari, non mutatis angulis."

ROMÉ DE L'ISLE hat über hundert Jahre später, 1783, das Gesetz bestimmter formulirt und durch Messungen mit dem von CARANGEOT erfundenen Anlegegoniometer an zahlreichen Beispielen seine Existenz erwiesen. Er sagt, Cristallographie 1783. T. I, p. 93:

„Les faces d'un cristal peuvent varier dans leur figure et dans leurs dimensions relatives; mais l'inclination de ces mêmes faces est constante et invariable dans chaque espèce."

Wenngleich auch diesem Forscher der Nachweis des Gesetzes nur ungefähr durch das Anlegegoniometer möglich war, so richtete sich doch seit der Zeit die Aufmerksamkeit aller Krystallographen auf dasselbe und mit der Erfindung des Reflexionsgoniometers durch WOLLASTON, 1809, konnte man zur eingehenderen Prüfung schreiten. Die Schärfe einer solchen Prüfung wurde jedoch erst im höchsten Grade ermöglicht, als KUPFFER, 1825, die Theorie des Instrumentes und die aus derselben fliessenden Erfordernisse darlegte, welch' letzteren, im

Laufe der Zeit und soweit sie das Instrument betrafen, möglichst durch verbesserte und vervollkommnete Einrichtungen genügt wurde.

Den vereinten Anstrengungen vieler bedeutenden Forscher ist es nun gelungen nachzuweisen, dass es wahrhaft vollkommene Krystalle gibt, die sich bis auf eine halbe oder eine ganze Minute genau gebildet zeigen; dieselben liefern in erfreulicher Weise den Beweis für die Richtigkeit des Gesetzes. Der Grad der Genauigkeit ist ein sehr grosser, wenn man bedenkt, wie viel störende Einflüsse bei der Krystallbildung wirksam sind, so namentlich der Einfluss der Schwere, der Adhäsion u. s. w. Diese Einflüsse sind gegenüber der Krystallisationskraft wohl klein, können aber doch nicht als verschwindend gegen sie angesehen werden. Zu vernachlässigen sind auch nicht Störungen, welche durch benachbarte oder verwachsene Individuen verursacht werden.

Ferner ist zu berücksichtigen, und die Untersuchungen von MITSCHERLICH haben es gezeigt, dass die Temperatur von Einfluss auf die Grösse der Krystallwinkel ist,* diese daher nur, bei ein und derselben Temperatur gemessen, als constant betrachtet werden können. Weiter ist zu beachten, dass die Winkel eines Minerals auch noch nach den Fundorten desselben variiren werden und eigentlich nur von einem und demselben Fundort als constant bezeichnet werden können, da näherungsweise anzunehmen ist, die chemische Constitution sei alsdann die gleiche und es finde kein Schwanken in den isomorph sich vertretenden Bestandtheilen statt. Dass ein solches aber Einfluss auf die Grösse der Winkel hat, ist erwiesen.

In Berücksichtigung aller dieser Umstände wird man den häufig vorkommenden Abweichungen der Winkel von ihren theoretisch geforderten Werthen, den sogenannten Anomalien der Krystallwinkel, nicht den Werth beimessen, der ihnen von manchen Forschern beigelegt worden und namentlich nicht die Gültigkeit des allgemeinen Gesetzes dadurch in Zweifel gezogen sehen. Diese Abweichungen und Schwankungen erklären sich vielmehr aus den mitgetheilten Daten vollständig.

Dem Standpunkte der Wissenschaft zufolge kann man aber die Summe der Erfahrungen, wie folgt, als Gesetz zusammenfassen und aussprechen.:

„Wie auch die Flächen der Krystalle einer bestimmten Species in ihrem Habitus variiren mögen, so bleiben doch,

* Aenderungen des Krystallsystems finden durch Temperaturerhöhungen, wie wir sehen werden, nicht statt. Es ändern sich also auch nicht die das System bestimmenden Winkel.

bei vollkommen gebauten Krystallen derselben Species, die Neigungswinkel dieser Flächen bis auf geringe Unterschiede constant, vorausgesetzt, dass sie bei derselben Temperatur gemessen werden und die Krystalle von ein und demselben Fundort stammen (bei künstlichen Krystallen in derselben Weise dargestellt und krystallisirt sind), d. h. anzunehmen ist, ihre chemische Constitution sei die gleiche."

II. Gesetz der Zonen und Gesetz der einfachen rationalen Axenschnitte.

Von diesen beiden, hier unter einem Gesichtspunkt zusammengefassten Gesetzen, ist das erste später, als das zweite ausgesprochen worden.

Wir verdanken dem Gründer der Zonenlehre, Weiss, das Gesetz der Zonen in seinen klassischen Abhandlungen über Feldspath, Epidot, Gyps u. s. w. Abh. d. Berl. Academie d. Wissensch. 1814—43 zuerst erwiesen zu haben; es lautet: *

„In der Entwickelung der verschiedenen Glieder eines Krystallsystems wird jedes spätere Glied bestimmt durch Zonen der früheren."

Wir haben in der Einleitung gesehen, was mit anderen Worten dasselbe sagt, dass aus einem Oktaide und zugehörigem Hexaide alle übrigen Glieder eines Formencomplexes deducirt werden können, vorausgesetzt, es seien zur schrittweisen Deduction die verbindenden Mittelglieder vorhanden. Es wurde an genanntem Orte geltend gemacht, dass diese Mittelglieder bisweilen fehlen und so einzelne Flächen nicht in den Deductionszusammenhang des Ganzen aufgenommen werden können. Es wurde aber auch mitgetheilt, dass die fehlenden Mittelglieder bei genauerem Studium eines Krystallsystems sich öfters nachträglich fanden und sich dann Alles bestens dem Deductionszusammenhang des Ganzen fügte.

Unter der Reservation, dass in der Natur bisweilen in der Entwickelung eines Systems verbindende Mittelglieder zur Aufnahme gewisser Glieder in den Zonenzusammenhang des Ganzen fehlen, ist der obenstehende Ausspruch des Zonengesetzes für die überwiegende Mehrheit der Fälle auch heute noch vollkommen richtig.

* Vergl. auch Neumann, Beiträge zur Krystallonomie 1823, p. 2 u. f. und dessen Dissertation: De lege zonarum 1826, p. 2 u. f.

Das Gesetz der einfachen rationalen Axenschnitte ist von Haüy aufgefunden, wenngleich nicht in Bezug auf Axenschnitte ausgesprochen worden, da dieser grosse Forscher es durch seine Decrescenzen erkannte und zum Ausdruck brachte.* Die ersten Ideen finden wir in dem Mémoire sur la structure des cristaux etc., 1781, dann, abgesehen von einigen anderen kleinen Abhandlungen, in dem Essai d'une théorie sur la structure des cristaux. 1784, niedergelegt; bestimmter formulirt begegnen wir dem Ausspruche des Gesetzes an zahlreichen Stellen seiner 1801 erschienenen Mineralogie. Um ein Beispiel für viele anzuführen, wählen wir die Stelle aus letzterem Werke B. I, p. 281, woselbst sich Haüy über die Möglichkeit des regulären Pentagondodekaëders in der Krystallwelt, wie folgt, ausspricht: „dans le cas où le dodécaèdre regulier seroit possible, n devra être une quantité rationelle."

Bezogen auf die von Weiss im Jahre 1809 in epochemachender Weise in die Wissenschaft der Krystalle eingeführten Axen und erweitert, nach dem Vorgange von Kupffer, Handbuch d. rechn. Krystallonomie 1831 p. 497, von den ursprünglich nur als rechtwinkelig angenommenen Grunddimensionen auf ganz beliebige Axen, lautet das Gesetz wie folgt:

„Die Axenschnitte aller Flächen eines Formencomplexes sind rationale Theile der Grunddimensionen desselben und zwar nach positiven oder negativen ganzen Zahlen, Brüchen, o oder ∞. Man erhält diese Grunddimensionen als Durchschnittslinien dreier beliebiger Flächen des Formencomplexes der Lage nach; sie werden der Länge nach vorgestellt durch die Abschnitte einer vierten Fläche des Krystalls auf diesen Linien und sind in ihren Werthen im Allgemeinen irrationale Grössen. Bei passender Wahl der Grunddimensionen der Lage und der Länge nach, schneiden die übrigen Flächen des Formencomplexes erstere nicht nur in rationalen, sondern auch in einfachen rationalen Verhältnissen."

Für alle im Zonenverband stehenden Gestalten folgen die rationalen Axenschnitte aus demselben und dies ist das Band, was beide Gesetze verknüpft. Hierauf hat bereits Neumann in seiner Dissertation hingewiesen (l. c. p. 2) und es erhellt dies Verhältniss auch sofort, wenn man bedenkt, dass der Grundkörper einfache Axenschnitte hat, und die aus ihm deducirten Körper, dargestellt in Sectionslinien durch

* Ueber seine Vorgänger Huygens und Bergmann vergl. Marx, Geschichte der Krystallkunde 1825.

Verbindung von Zonenpunkten mit rationalen Coordinaten, ebenfalls in Folge dessen nur rationale Axenschnitte besitzen können. Für nicht im Zonenverband stehende Flächen trifft man erfahrungsgemäss, wenn man von den unächten Bildungen absieht und nur die normal gebauten Flächen in's Auge fasst, ebenfalls meist einfache rationale Schnitte, selten solche mit hohen Coëfficienten an.

Die Irrationalität der Grunddimensionen ist für die rechtwinkeligen Systeme Bedingung der Erhaltung des Systems, denn wäre z. B. im quadratischen Systeme das Verhältniss von der Hauptaxe zu den Nebenaxen wie $^3/_2 : 1 : 1$, so könnte durch eine Gestalt, die die Hauptaxe im Abstand $^2/_3$, die Nebenaxen in der Einheit träfe, das reguläre Oktaëder entstehen. In den schiefaxigen Systemen ist die Irrationalität der Grunddimensionen kein absolutes Erforderniss, da hier schon die schiefen Winkel das System erhalten.

Viele Gelehrte haben sich in der verschiedensten Weise mit dem Gesetze ferner beschäftigt; von ganz besonderem Interesse möchten aus der grossen Zahl der darüber gepflogenen Untersuchungen die sein, welche Grailich und v. Lang, Sitzber. d. k. Acad. d. Wissensch. 1858, B. XXXIII, p. 369 u. f. auch von Lang, Kryst. 1866, p. 133 u. f. angestellt und dargelegt haben. Nach den Untersuchungen dieser Forscher bleiben bei Temperaturen, bei denen ein Krystall noch als solcher bestehen kann, das Krystallsystem, das Gesetz der Zonen und das der rationalen Axenschnitte erhalten. Von den sich im Allgemeinen ändernden Winkeln bleiben die ungeändert, welche in Folge der Hauptschnitte am Krystall, einen constanten Werth haben müssen. —

Bisweilen kommt es vor, und die Untersuchungen von G. vom Rath* und Hessenberg,** besonders am Kalkspathe vorgenommen, haben es wieder in frische Erinnerung gebracht, dass eine Fläche scheinbar mit anderen in Zonen liegt und doch die Axenschnitte derselben, aus der Rechnung gewonnen, nicht mit den Erfordernissen des Zonenverbandes im Einklang stehen, so dass man meinen sollte, die einfacheren Axenschnitte seien auf Kosten des Zonenverbandes erreicht.

In solchen Fällen möchte, wenn nicht ganz ausgezeichnete Flächen und tadellose Messungen vorliegen, doch dem Zonenverband das grössere Gewicht bezüglich der Entscheidung zufallen und die Worte Schrauf's hierin das Richtige treffen, wenn er sagt:***

„Die Gesetze der Zonenbildung und der einfachen Indices — die Grundpfeiler der Krystallographie — sind ja

* Pogg. Annalen 1867. B. 132, p. 397.

** Min. Notizen. No. 9. 1870, p. 5.

*** Min. Beobacht. II. Sitz. d. k. Acad. d. Wissensch. B. LXIII, 1871, p. 9.

nur Erfahrungssätze, welche mit jedem Tage der fortschreitenden Kenntniss immer mehr Ausnahmen aufweisen. Ein Princip, das der grösstmöglichen Symmetrie, ist das einzige, welches der Natur für den Habitus der Krystallflächen vorzuschweben scheint und dieses ist oft leichter mit dem Zonenverband, als mit den einfachsten Parametern zu erzielen."

Den eben besprochenen Gesetzen lässt sich anschliessen das Gesetz der Rationalität der Tangenten tautozonaler Krystallwinkel. NAUMANN hat dasselbe in grösster Allgemeinheit in den Abhandlungen der königlich sächsischen Gesellsch. d. Wissensch. 1855 discutirt, nachdem vorher NEUMANN, Beiträge zur Krystallonomie 1823, p. 19 u. f. den Beweis der Gültigkeit für orthoëdrische und hexagonale Formen gegeben und KUPFFER, Handb. d. rechn. Krystallonomie 1831, p. 498 u. f., zwar von dem allgemeinsten Fall ausgehend, doch nur die Tangenten solcher Zonen untersucht hatte, deren Zonenaxe einer der Coordinatebenen parallel ist. Was die Bedingungen anlangt, denen genügt werden muss, wenn das Gesetz für die klinischen Axensysteme erfüllt sein soll, so ist zu bemerken, dass die neuesten und schärfsten Bestimmungen monokliner und trikliner Krystalle Werthe ergeben, die den Erfordernissen nur in genähert rationalen und dazu nicht in einfachen rationalen Werthen genügen. In den klinischen Axensystemen ist also das Erforderniss nicht in Strenge erfüllt.

III. Gesetz der Symmetrie.

Dies Gesetz ist zuerst von HAUY erkannt worden; in neuerer Zeit hat jedoch V. v. LANG demselben in einer viel allgemeineren Fassung Ausdruck verliehen, so dass sich die letztere Formulirung des Gesetzes zu der ersten etwa wie Ursache zu Wirkung verhält.

Das von HAUY aufgefundene Gesetz (Sur une loi de cristallisation, appelée loi de symmetrie 1815) lautet, wie folgt:

„Gleichartige Theile einer Krystallgestalt: Flächen, Kanten, Ecken und die Verbindungslinien dieser Begren-

* Vergl. G. VOM RATH. Pogg. Annalen 1866, p. 258 und 259. — In NAUMANN's Zusammenstellung l. c. p. 520 u. f. sind die Werthe ebenfalls nur genähert rational und jedenfalls nicht einfach. Zudem sind die Axen meist auf 3, seltener auf 4 Stellen genau der Rechnung zu Grunde gelegt und die Axenwinkel nur bis auf Minuten genau angenommen. Ferner sind sämmtliche Elemente, die in Rechnung gezogen sind, auf Grund älterer, minder genauer Messungen hergeleitet.

zungselemente, Axen,* erleiden bei eintretenden Combinationen gleiche Veränderungen."

Von diesem Gesetze sind die Hemiëdrie und der Hemimorphismus nur für die oberflächliche Betrachtung Ausnahmen, dem wahren Wesen nach aber nicht, da in beiden Fällen krystallographisch scheinbar gleichartige Theile physikalisch different sind und somit auch in ersterer Hinsicht als ungleichartig betrachtet werden müssen.

Das von V. v. Lang ausgesprochene Gesetz, Lehrb. d. Kryst. 1866, p. 99, erweis't die Möglichkeit von nur sechs Krystallsystemen und regiert die Symmetrieverhältnisse eines jeden derselben; es lautet:

„Ein Krystall ist in krystallographischer und physikalischer Hinsicht entweder holosymmetrisch oder hemisymmetrisch nach allen Flächen eines seiner charakteristischen Flächencomplexe."

Ueber die nähere Begründung dieses Gesetzes ist das erwähnte Werk nachzulesen. Die wichtigsten Grundgesetze der Krystallographie und die daraus gezogenen Consequenzen finden sich auf p. 1—146 entwickelt. Zur Erläuterung des vorstehenden Satzes mögen die Bemerkungen genügen, dass diejenigen Flächen, nach denen ein Krystall holo- oder hemisymmetrisch ist, dessen Hauptschnitte genannt werden und dieselben einen der charakteristischen Flächencomplexe des Krystalls bilden. Ist letzterer holosymmetrisch, so sind alle Hauptschnitte desselben Ebenen der Symmetrie, im zweiten Falle sind es jedoch nur gewisse gleichwerthige Hauptschnitte.

IV. Anwendung der Grundgesetze der Krystallographie auf Krystallberechnung. Allgemeiner Gang einer solchen.

Die erste Aufgabe bei der Krystallberechnung ist die Feststellung des Systems. Hierzu ist die Symmetrie des Krystalls zu ermitteln. Dieselbe zeigt sich häufig schon durch die Flächenanordnung; ist aber stets durch die Messung zu controliren und durch die optische Methode zu bestätigen.

Hierauf ist die Grundform zu wählen und deren Axenverhältniss zu bestimmen. Alsdann sind die Zonen an den betreffenden Krystallen eingehend zu studiren und die übrigen Flächen auf das Axenverhält-

* Zum Zwecke der Krystallberechnung hält man zweckmässig immer fest, dass die Axen weiter nichts sind, als parallel sich selbst in den Mittelpunkt gerückte Krystallkanten oder, in gewissen Fällen auch, vom Mittelpunkt ausgehende Flächennormalen.

niss der Grundform zu beziehen. Es geschieht dies für jede Fläche entweder aus dem Zonenverband dann, wenn sie in zwei bekannten Zonen liegt, oder aber aus einer bekannten Zone und einem zweckmässig gemessenen Winkel, oder endlich aus zwei passend gewählten Messungsdaten. Sind alle Gestalten und Formen bezüglich der Axenschnitte ermittelt, wie man sagt, bestimmt, so gibt eine Projection, zumeist auf die basische Endfläche des Systems ausgeführt, ein Bild des Zonenzusammenhangs. Neben allen gemessenen Neigungswinkeln der Flächen zeigen, zur Seite stehende, aus dem Axenverhältnisse gerechnete, den Grad der Genauigkeit der Grunddimensionen an und werfen ein Licht auf die Abweichungen gewisser Gestalten im Bau von der Normallage. Endlich wird an passender Stelle die Holo- oder Hemisymmetrie der Krystalle erwähnt und dem Habitus derselben, der Flächenbeschaffenheit, den Combinationsverhältnissen Rechnung getragen. Die Spaltungsrichtungen und optischen Verhältnisse u. s. w. werden schliesslich angeführt und somit die vollständige krystallographische Beschreibung geschlossen.

Die Hauptaufgaben der Krystallberechnung werden nach der im Folgenden nunmehr auseinander zu setzenden Methode durch einen Satz gelöst, den man wie folgt aussprechen kann:

„Aus den Messungen sind immer solche Elemente (Kanten, Neigungen von Höhenlinien zu Axen u. s. w.) zu bilden, dass dieselben entweder direct zur Rechnung verwendet werden können, oder doch daraus die Neigungen zu bekannten Elementen in den Krystallhauptschnitten zu ermitteln sind.“

Diese Aufgabe wird mit sphärischer Trigonometrie meistens zu lösen sein, das Heranziehen von analytischer Geometrie und ebener Trigonometrie, sowie die Berücksichtigung der Umgrenzungselemente der Flächen werden seltener erfordert werden.

B. Die Lehre von der Krystallberechnung.

Die hauptsächlichsten Aufgaben, welche bei der Berechnung von Krystallen sich darbieten, sind:

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse.
2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen.
3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. * Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss.
4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

I. Reguläres System.

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse.

Die Krystalle des regulären Systems besitzen neun Hauptschnitte, von denen drei wechselweise senkrecht auf einander stehen und den Reductionsebenen des Hexaëders entsprechen, während die anderen sechs

* Zum Zwecke der in den einzelnen Systemen vorkommenden Berechnungen werden wir uns vorzugsweise der sphärischen Trigonometrie bedienen und insofern Naumann folgen, als derselbe in seinen krystallographischen Werken, namentlich aber für die schiefaxigen Systeme, die rein trigonometrische Methode in ausgedehnter Weise zur Anwendung gebracht hat. Nicht minder fusst vorliegende Schrift auf dem Werke F. v. Kobell's „Zur Berechnung der Krystallformen" 1867, indem der genannte Forscher bemüht war, die Basis seiner Rechnung, das sphärische Dreieck, überall klar darzulegen und jene unter Berücksichtigung der Krystallhauptschnitte zu führen. —

Es war das Bestreben des Verfassers dieser Schrift namentlich die letztere Methode zu vervollständigen und auf die Berechnung der Gestalten aus Combinationskanten anzuwenden. —

die sechs Neigungswinkel der erstgenannten Hauptschnitte halbiren und durch die Reductionsebenen des Rhombendodekaëders vorgestellt werden.

Mit Rücksicht auf die drei erstgenannten Hauptschnitte genügen alle vollflächigen Gestalten des regulären Systems der Symmetrieforderung gebildet zu sein:

Oben, wie unten, wie vorn, wie hinten, wie links, wie rechts.

Wenden wir diese Anforderung auf den Grundkörper des Systems, das Oktaëder, an, so müssen seine zwölf Kantenwinkel gleiches Winkelmass besitzen und ein jeder derselben muss, wie sich zeigen lässt, 109° 28′ 16,4″ gross sein.

Um dies einzusehen stellen wir uns das Oktaëder mit seinen drei, den Reductionsebenen des Hexaëders entsprechenden Hauptschnitten vor. Es wird alsdann erstere Gestalt, wenn im Gleichgewicht gedacht, durch die drei rechtwinkeligen Hauptschnitte in acht gleichwerthige Octanten zerlegt und alle 12 Kantenwinkel werden durch dieselben Hauptschnitte halbirt werden. Die Fläche eines Octanten, z. B. des Octanten vorn, rechts, oben, neigt also zu den 3 Hauptschnitten unter dem halben Oktaëderwinkel und es lässt sich auf diese Neigungen die Formel XXVI) der geometrischen Einleitung anwenden:

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

In diesem speciellen Falle ist aber X = Y = Z, wodurch man erhält:

$$3\cos^2 X = 1 \quad ; \quad \cos X = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Wird dies ausgerechnet, so folgt für X, den halben Oktaëderwinkel, der Werth 54° 44′ 8,2″, was den ganzen zu 109° 28′ 16,4″ ergibt, ein Resultat, welches mit den Beobachtungen im völligen Einklang steht.

Die Durchschnittslinien der drei rechtwinkeligen Hauptschnitte, welche den Reductionsebenen des Würfels entsprechen, geben die passendsten Axen des Oktaëders ab. Wir nennen dieselben, welche die Ecken des Oktaëders verbinden, Eckenaxen und sprechen sie auch, zum Unterschiede von anderen, später zu erwähnenden Axen, als Hauptaxen an. Sie sind, da die sie erzeugenden Axenebenen rechtwinkelig auf einander stehen, gleichfalls unter 90° zu einander geneigt und in ihrer Grösse einander gleich. Letzterer Umstand folgt aus der Symmetrie des Systems, kann aber auch noch zum Ueberfluss durch Rechnung bewiesen werden.

Zu diesem Behufe betrachten wir den Octanten v.r.o, Fig. 23, und legen ein sphärisches Dreieck mit:

$$A = 54^0\ 44'\ 8{,}2''$$
$$B = 54^0\ 44'\ 8{,}2''$$
$$C = 90^0.$$

In demselben suchen wir a, d. h. die Neigung der Axe vm gegen die Kante vr.

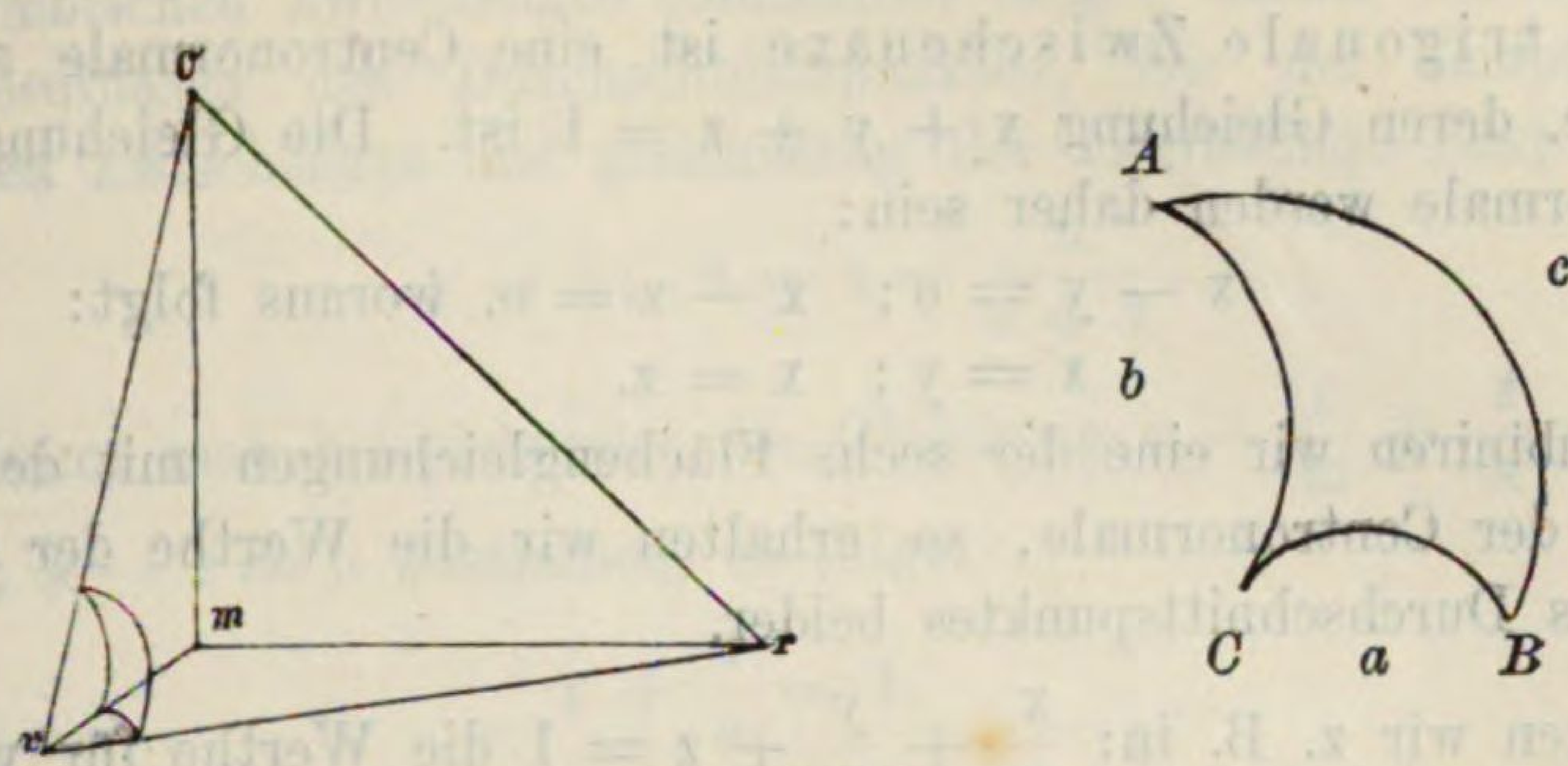


Fig. 23.

Nach dem NAPIER'schen Satz ist $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$, also:

$$\log.\cos a = \log.\text{cotg}.54^0\ 44'\ 8{,}2'' = 9{,}8494850 - 10.$$

Hierzu ist der Winkel $= 45^0$.

Im Dreieck vmr ist daher ein Winkel mvr $= 45^0$, da der Axenwinkel vmr aber $= 90^0$, so folgt für den anderen Winkel mrv ebenfalls die Grösse 45^0. Das Dreieck ist folglich gleichschenkelig d. h. vm = rm. Auf ähnliche Art kann bewiesen werden, dass auch vm = om und om = rm ist.

Die Eckenaxen des Grundkörpers sind also rechtwinkelig und von gleicher Grösse.

Ausser diesen für uns wichtigsten Axen sind noch zu betrachten zwei Arten von Axen, die man Zwischenaxen nennt. Die einen, in der Zahl vier vorhanden, stellen sich als die Normalen der Oktaëderflächen dar, man nennt sie trigonale oder rhomboëdrische Zwischenaxen; die anderen, in der Zahl sechs vorhanden, werden gebildet durch die Schnittlinien der Reductionsebenen des Rhombendodekaëders, sie stellen sich als die Normalen auf die Kanten des Oktaëders dar und heissen digonale oder rhombische Zwischenaxen.

Um die Grösse dieser Axen zu finden, die für jeden regulären Körper eine andere ist, geht man zweckmässiger Weise vom allgemeinsten Falle, dem mOn, aus. Bezüglich der Ableitung folgen wir NAUMANN, Elemente der theor. Kryst. 1856, p. 52 u. f.

In einem Octanten von mOn, z. B. in dem der positiven Halbaxen, liegen sechs Flächen, denen folgende Gleichungen zukommen.

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1; \quad \frac{x}{n} + y + \frac{z}{m} = 1.$$

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1; \quad x + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1.$$

$$\frac{x}{m} + y + \frac{z}{n} = 1;\quad x + \frac{y}{n} + \frac{z}{m} = 1.$$

Die trigonale Zwischenaxe ist eine Centronormale auf eine O-Fläche, deren Gleichung $x + y + z = 1$ ist. Die Gleichungen der Centronormale werden daher sein:

$$x - y = o;\quad x - z = o, \text{ woraus folgt:}$$

$$x = y;\quad x = z.$$

Combiniren wir eine der sechs Flächengleichungen mit den Gleichungen der Centronormale, so erhalten wir die Werthe der Coordinaten des Durchschnittspunktes beider.

Setzen wir z. B. in: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$ die Werthe für y und z, so folgt:

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} + x = 1.$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 1 = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{mn}{mn + m + n} = x = y = z.$$

Combiniren wir auf gleiche Art die übrigen fünf Gleichungen, so resultiren dieselben Werthe, als Beweis dafür, dass die sechs Flächen des Octanten sich in ein und demselben Punkte der trigonalen Zwischenaxe schneiden, dem sechsflächigen Eckpunkte. Die Centrodistanz dieses sechsflächigen Eckpunktes findet sich, da seine Coordinaten bekannt sind, leicht zu:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x\sqrt{3}.$$

Setzt man für x den Werth, so folgt die Länge der halben trigonalen Zwischenaxe in der Gestalt mOn zu:

$$\frac{mn}{mn + m + n}\sqrt{3} = T.$$

Gehen wir zur Bestimmung der digonalen oder rhombischen Zwischenaxen über, so ist zu beachten, dass an der Grenze zweier Nachbaroctanten allemal vier Flächen liegen, die in einem Punkte zusammenstossen. Diese Flächen sind an der Grenze des Octanten v. r. o. zum Octanten v. l. o. durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1;\quad \frac{x}{n} - \frac{y}{m} + z = 1.$$

$$x + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1;\quad x - \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1.$$

Die Gleichung der betreffenden rhombischen Zwischenaxe ist, da sie in die Axenebene *XZ* fällt, *Y* also im Abstand o schneidet, zudem den von *X* und *Z* gebildeten rechten Winkel halbirt:

$$y = o;\quad x - z = o.$$

Welche der Flächengleichungen man auch mit den Gleichungen der rhombischen Zwischenaxe combiniren möge, immer resultiren für die Coordinaten des Durchschnittspunktes, der der Endpunkt der digonalen Zwischenaxe und gleichzeitig der vierflächige Eckpunkt ist:

$$y = o; \quad x = z = \frac{n}{n + 1}.$$

Nimmt man beispielsweise die Gleichung $x - \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$ mit $y = o$; $x - z = o$ zusammen, so folgt:

$$x + \frac{x}{n} = 1.$$

$$1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{n}{n + 1} = x = z.$$

Die Centrodistanz dieses Endpunktes der digonalen Zwischenaxe ist gegeben durch $\sqrt{x^2 + z^2} = x\sqrt{2}$ und, indem man für x den Werth einführt, resultirt die halbe digonale Zwischenaxe:

$$\frac{n}{n + 1}\sqrt{2} = R.$$

Die Werthe für T und R gehen, wenn $m = n = 1$ gesetzt wird, also für die Gestalt O, über in:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{1/3}.$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1/2}.$$

Betrachtet man $\sqrt{1/3}$ als Grundwerth der trigonalen, $\sqrt{1/2}$ dagegen als Grundwerth der digonalen Zwischenaxe und zieht aus den Axenwerthen, wie sie den verschiedenen regulären Vollflächnern zukommen, diese Grundwerthe heraus, so bleiben folgende Coëfficienten der Zwischenaxen übrig, die wir entsprechend mit t und r bezeichnen.

$$mOn \quad ; \quad t = \frac{3mn}{mn + m + n} \quad ; \quad r = \frac{2n}{n + 1}.$$

$$mO \quad ; \quad t = \frac{3m}{2m + 1} \quad ; \quad r = 1.$$

$$mOm \quad ; \quad t = \frac{3m}{m + 2} \quad ; \quad r = \frac{2m}{m + 1}.$$

$$\infty On \quad ; \quad t = \frac{3n}{n + 1} \quad ; \quad r = \frac{2n}{n + 1}.$$

∞O ; $t = {}^3/_2$; $r = 1$.
$\infty O \infty$; $t = 3$; $r = 2$.
O ; $t = 1$; $r = 1$.

Bei der parallelflächigen Hemiëdrie behalten die Hemiëder die Coëfficienten t und r bei; die digonalen Axen sind aber bedeutungslos, da sie an keinen ausgezeichneten Punkten münden.

Bei der geneigtflächigen Hemiëdrie werden nur die Coëfficienten r unverändert beibehalten. Die ihnen entsprechenden Axen sind, wie vorhin, bedeutungslos, weil ebenfalls ihre Endpunkte nicht als Endpunkte von besonderer Lage ausgezeichnet sind.

Die trigonale Zwischenaxe zerfällt in ungleichwerthige Hälften, eine holoëdrische T und eine hemiëdrische T'.

Die Berechnung der letzteren geschieht wie folgt: In einem Octanten, z. B. dem der positiven Halbaxen, liegen zwei Flächen von $\frac{mOn}{2}$, die die hemiëdrische Halbaxe T', welche im Octanten v.l.o liegt, schneiden. Sei die Gleichung einer dieser zwei Flächen gegeben durch:

$$\frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1,$$

so kommt der Fläche von O im Octanten v.l.o die Gleichung zu:

$$x - y + z = 1.$$

Ihre Centronormale erhält sonach die Gleichungen:

$$x + y = o \quad ; \quad x - z = o,$$

daraus folgt: $x = -y \quad ; \quad x = z.$

Combiniren wir diese Gleichungen mit der der Fläche von $\frac{mOn}{2}$, so erhalten wir:

$$\frac{x}{n} - \frac{x}{m} + x = 1.$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + 1 = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{mn}{mn + m - n} = x = y = z,$$

als Coordinaten des Schnittpunktes der Centronormale mit der Fläche $\frac{x}{n} + \frac{y}{m} + z = 1$. Die Centrodistanz dieses Punktes, d. h. die hemiëdrische Hälfte der trigonalen Zwischenaxe, ist daher:

$$\frac{mn}{mn + m - n} \sqrt{3} = T'.$$

Nennt man die Zahl, mit der die halbe trigonale Zwischenaxe des Oktaëders multiplicirt werden muss, um auf den Werth von T' zu

kommen, den Coëfficienten der hemiëdrischen Halbaxe $= \tau$, so hat man für:

$$\frac{mOn}{2}; \tau = \frac{3mn}{mn + m - n}.$$
$$\frac{mO}{2}; \tau = \frac{3m}{2m - 1}.$$
$$\frac{mOm}{2}; \tau = 3.$$
$$\frac{O}{2}; \tau = 3.$$

2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen.

Zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen wir die Entwickelung einer Combination, wie sie sich, nach Mohs, am Magneteisenerz findet. Tafel III, Fig. 1.

Eine allgemeine Bestimmung ergibt folgende Gestalten:

O , ∞O , mOm , ∞On , mOn.
P , m , β , c , ε .

Zum Zwecke der Deduction projiciren wir auf eine Hexaëderfläche, Tafel III, Fig. 2 und beginnen mit dem Grundkörper, dem Oktaëder. Seine Projection stellt sich als ein Quadrat dar. Verbinden wir die gegenüberliegenden Eckpunkte dieses Quadrats durch Linien, so erhalten wir die beiden im horizontalen Hauptschnitt liegenden gleichgrossen, rechtwinkeligen Axen. Die dritte Axe steht rechtwinkelig auf der Ebene der Zeichnung und ist mit den beiden genannten von gleicher Grösse.

Nach dem Oktaëder, was somit die ihm untergelegten Axen in der Einheit schneidet, wenden wir uns der Gestalt ∞O zu. Dieselbe stumpft die Kanten von O gerade ab und projicirt sich somit leicht. Ist dies geschehen, so sind durch die Schnittpunkte der Sectionslinien, der in Projection gelegten Körper, Zonenpunkte genug gegeben, um die übrigen drei Gestalten abzuleiten.

Ehe wir jedoch mit der Deduction beginnen, wollen wir die gleichgrossen und rechtwinkeligen Axen, zum Zwecke der leichteren Unterscheidung, durch Buchstaben bezeichnen. Es heisse die in der Projection von vorn nach hinten ziehende Axe a, die von rechts nach links verlaufende b und senkrecht auf der Ebene der Projection stehe die sich von oben nach unten erstreckende Axe c.

Der Quadrant der Projection v.r sei, entsprechend dem Octant v.r.o des Krystalls, der positive.

Der erste zu deducirende Körper ist ∞On. Eine Fläche desselben, c, liegt in einer Zone, gebildet von a : b : c und a : — b : ∞c, ferner in einer zweiten Zone, gebildet von a : — b : c und a : b : ∞c. Die Coordinaten dieser Zonenpunkte lassen sich, da es Kantenzonenpunkte sind, aus der Figur ablesen; die des ersten Zonenpunktes sind $\frac{a}{2} : \frac{b}{2}$, die des zweiten $\frac{a}{2} : - \frac{b}{2}$. Verbindet man beide durch eine Sectionslinie, so geht die derselben entsprechende Fläche von $\frac{1}{2}$a : ∞b : c, ein Resultat, was auch die Rechnung bestätigt. Die Gestalt wird daher ∞O2 sein.

Zur Ableitung von mOm berücksichtigen wir die Fläche β, die in die Zonen der Gestalten a : — b : c und a : b : ∞c, sowie von — a : — b : c und a : ∞b : c fällt. Die Coordinaten des ersteren Zonenpunktes sind bekannt $= \frac{a}{2} : - \frac{b}{2}$, die des letzteren kann man aus der Projection ablesen = a : — 2b und auch leicht durch Rechnung finden. Zum Zwecke derselben setzt man:

$$\mu = -1 \ , \ \nu = -1 \quad ; \quad \mu_, = 1 \ , \ \nu_, = 0$$

und hat nach der Zonenpunktformel:

$$\frac{0-(-1)}{(-1.0)-(1.-1)}\, a : \frac{-1-1}{(-1.0)-(1.-1)}\, b = a : -2b.$$

Zur Berechnung der Sectionslinie, die die Zonenpunkte:

$$\frac{a}{2} : - \frac{b}{2} \text{ und } a : - \frac{b}{1/2} \text{ verbindet,}$$

hat man: $m = 2 \ , \ n = -2 \quad ; \quad m_, = 1 \ , \ n_, = -\frac{1}{2}$ zu setzen und die Sectionslinienformel anzuwenden. Da aber aus der Projection ersichtlich ist, dass der Axenschnitt auf b = 1 ist, so kommt nur der Theil a der betreffenden Formel in Betracht:

$$\frac{(1.-2)-(2.-\frac{1}{2})}{2.1(-2-[-\frac{1}{2}])}\, a = \frac{-2+1}{2.-\frac{3}{2}}\, a = \frac{1}{3} a.$$

Die Fläche wird somit zu: $\frac{1}{3}$a : b : c = 3O3.

Die letzte Gestalt mOn leitet sich schliesslich, wie folgt, ab. Die Fläche ε derselben liegt in den Zonen von a : b : c und a : — b : ∞c, ferner von a : ∞b : c, und — a : — b : c. Die Coordinaten des ersten Zonenpunktes sind $\frac{a}{2} : \frac{b}{2}$; die des zweiten $a : - \frac{b}{1/2}$.

Man hat also: $m = 2 \ , \ n = 2 \quad ; \quad m_, = 1 \ , \ n_, = -\frac{1}{2}$.

Dies ergibt $\frac{(1.2)-(2.-\frac{1}{2})}{2.1(2-[-\frac{1}{2}])}a : \frac{(1.2)-(2.-\frac{1}{2})}{2.-\frac{1}{2}(1-2)}b =$

$= \frac{3}{5}a : 3b : c = 5O\frac{5}{3}$.

Die ganze Combination lautet sonach:

$O, \infty O, \infty O2, 3O3, 5O\frac{5}{3}$.

Zur Entwickelung der Combination berücksichtigten wir von $\infty O2$, $3O3$ und $5O\frac{5}{3}$ nur eine Fläche. Trägt man alle Flächen in die Projection ein, so erhält man ein Bild des Zonenzusammenhangs der fünf genannten Gestalten und es möge dies eine Uebungsaufgabe für den Anfänger sein.

Um jedoch den Zonenzusammenhang des Systems zu erkennen, fertigen wir uns eine neue Projectionsfigur, Tafel III, Fig. 3, von O, $\infty O\infty$ und ∞O auf eine Fläche von $\infty O\infty$ an.

Alsdann ist es von Wichtigkeit die Zonen, die wir schon früher in der Einleitung am allgemeinsten Falle kennen lernten, hier im regulären Systeme wieder aufzusuchen. Diese Zonen sind die Kantenzonen des Hexaëders, des Oktaëders, des Dodekaëders und die Diagonalzonen des Oktaëders.

Die Kantenzonen des Hexaëders sind in der Zahl drei vorhanden. Eine, mit H. K. bezeichnet, liegt in unserer Projection im Endlichen, im Projectionsmittelpunkt, zwei in der Unendlichkeit, da wo die durch den Scheitelpunkt c gehende Reductionsebene des Hexaëders die Axen schneiden würde. Fassen wir den endlichen Zonenpunkt in's Auge und lassen in dem Winkel der Sectionslinien von $\infty O\infty$ und ∞O eine Linie sich bewegen, so wird diese zwischen ihren Grenzlinien alle möglichen Werthe annehmen und dadurch alle ∞On anzeigen, die zwischen $\infty O\infty$ und ∞O, ihren Grenzgestalten, liegen.

In den Kantenzonen des Hexaëders liegen also die Gestalten $\infty O\infty$, ∞On und ∞O. Kein anderer Körper kann mit seinen Sectionslinien in diesen Zonenpunkten auftreten, da das Erforderniss derselben der Schnitt mindestens einer Axe in der Unendlichkeit ist.

Die Kantenzonen des Oktaëders sind in der Zahl sechs vorhanden, vier davon stellen sich in der Projection als endliche, zwei als unendliche Zonenpunkte dar.

Zur Ableitung der in diese Zonen fallenden Gestalten ziehen wir den Kantenzonenpunkt mit den Coordinaten a : ob in Betracht. Er ist in Fig. 3, Tafel III mit O. K. bezeichnet.

Betrachten wir zuerst die Sectionslinien der Grenzgestalten $\infty O\infty$ und O, so wird eine in dem Winkel derselben sich bewegende Linie alle Gestalten vom Zeichen $a : \frac{1}{m}b : c = ma : b : mc = mOm$ anzeigen.

Zwischen den Sectionslinien der Grenzgestalten O und ∞O wird dagegen eine sich bewegende Linie auf alle Gestalten vom Zeichen a : mb : c = mO weisen. Wir können daher die Gestalten, welche in den Kantenzonen des Oktaëders vorkommen können, wie folgt, zusammenstellen: ∞O∞, mOm, O, mO, ∞O. Es erscheinen in dieser Ordnung mOm und mO zwischen ihren Grenzgestalten.

Von den vier Kantenzonen des Rhombendodekaëders, die sämmtlich in der Endlichkeit liegen, können wir aussagen, dass je drei Sectionslinien des besagten Körpers in ihnen auftreten. ∞O∞, O, mO, ∞On werden in ihnen nicht vorkommen können, dagegen werden sie zur Aufnahme von mOm (speciell 2O2) und mOn fähig sein.

Um das allgemeine Zeichen der mOn abzuleiten, gehen wir vom Zonenpunkt mit den Coordinaten a : b aus; er ist in Fig. 3, Tafel III mit D. K. bezeichnet. Wir lassen die Sectionslinien der mOn auf a das kleinere Stück na, auf b stets das grössere mb abschneiden und bemühen uns den Schnitt auf a = na > 1 in Werthen von m auszudrücken.

Nach dieser Voraussetzung ergibt sich sofort, dass nur der eine eben bezeichnete Zonenpunkt Linien von der genau bestimmten Lage na : mb liefern kann und die anderen drei nicht in Betracht kommen. Es zeigt sich aber auch unmittelbar, dass alle mOn dieser Zone zwischen den Grenzgestalten ∞O = a : ∞b : c und 2O2 = 2a : 2b : c auftreten müssen.

Die Coordinaten des Dodekaëderkantenzonenpunktes sind a : b. Die Coordinaten des Schnittpunktes der Sectionslinie auf b in der Entfernung mb sind = oa : mb.

Dies ergibt: $m = 1$, $n = 1$; $m_{,} = \infty$, $n_{,} = {}^{1}/m$, und der Axenschnitt auf a wird somit:

$$\frac{(\infty . 1) - (1 . {}^{1}/m)}{1 . \infty (1 - {}^{1}/m)} a = \frac{1}{1 - {}^{1}/m} a = \frac{m}{m-1} a.$$

Die Gestalten dieser Zone stehen also unter dem allgemeinen Zeichen $mO\frac{m}{m-1}$. Sie sind bis auf ∞O und 2O2, die ebenfalls unter dem allgemeinen Zeichen sich befinden, sämmtlich Achtundvierzigflächner, deren Hauptrepräsentanten $3O{}^{3}/_{2}$ und $4O{}^{4}/_{3}$ sind. Man zeichnet diese $mO\frac{m}{m-1}$, da ihre längsten Kanten mit denen von ∞O zusammenfallen, als parallelkantige Hexakisoktaëder oder Pyramidengranatoëder aus.

Von Wichtigkeit sind endlich noch die zwölf Diagonalzonen des Oktaëders, welche durch die Höhenlinien auf den Oktaëder-

flächen bestimmt werden und sämmtlich in der Endlichkeit liegen. Unter Geltendmachung der gleichen Bedingungen, wie bei den Kantenzonen des Rhombendodekaëders, können nur drei Diagonalzonenpunkte des Oktaëders Sectionslinien von mOn und der gewünschten Lage na : mb liefern. Diese Zonenpunkte haben die Coordinaten 2a : —b, 2a : b und a : 2b und bestimmen die I., II., III. Diagonalzone von O. Sie sind in Fig. 3, Tafel III mit O.D. I, O.D. II und O.D. III bezeichnet.

a. mOn der I. Diagonalzone von O.

Die Grenzgestalten sind hier O = a:b:c und ∞O2 = 2a:∞b:c. Die Coordinaten des Zonenpunktes ergeben sich zu 2a : — b, die Coordinaten des Schnittpunktes der Sectionslinie auf b in der Entfernung mb sind = oa : mb.

Daher ist: $m = {}^1/_2$, $n = -1$; $m_, = \infty$, $n_, = {}^1/m$,

folglich erhält man: $\dfrac{(\infty . -1) - ({}^1/_2 . {}^1/m)}{{}^1/_2 . \infty(-1 - {}^1/m)}\, a = \dfrac{2m}{m+1}\, a.$

Das allgemeine Zeichen ist also: $mO\dfrac{2m}{m+1}$ und es gehören z. B. $2O{}^4/_3$, $3O{}^3/_2$, $5O{}^5/_3$ hierher.

Man nennt die Achtundvierzigflächner dieser Zone auch isogonale; sie besitzen nämlich in ihren längsten und kürzesten Kanten gleiches Winkelmass. Es folgt dies aus dem Zonenverband zu ihren Grenzgestalten, von denen ∞O2, wie wir wissen (vergl. p. 24), in seinen beiderlei Kanten gleiche Winkel hat. O wird also die hexaëdrischen Ecken von ∞O2 so abstumpfen, dass ein reguläres Sechseck entsteht. Die zwischen O und ∞O2 und mit diesen Gestalten in einer Zone liegenden mOn müssen daher in ihren Kanten A und C gleiches Winkelmass besitzen.

b. mOn der II. Diagonalzone von O.

Die Grenzgestalten sind ∞O2 = 2a : ∞b : c und 3O3 = 3a : 3b : c. Die Coordinaten des Zonenpunktes ergeben sich zu 2a : b, die des Schnittpunktes der Sectionslinie auf b bleiben oa : mb.

Es ist daher $m = {}^1/_2$, $n = 1$; $m_, = \infty$, $n_, = {}^1/m$,

und folglich hat man: $\dfrac{(\infty . 1) - ({}^1/_2 . {}^1/m)}{{}^1/_2 . \infty(1 - {}^1/m)}\, a = \dfrac{2m}{m-1}\, a.$

Das allgemeine Zeichen wird zu: $mO\dfrac{2m}{m-1}$; es gehören z. B. $5O{}^5/_2$ und $7O{}^7/_3$ hierher.

c. mOn der III. Diagonalzone von O.

Die Grenzgestalten erweisen sich hier als $\infty O = a : \infty b : c$ und $3O3 = 3a : 3b : c$. Die Coordinaten des Zonenpunkts sind $a : 2b$, die des Schnittpunkts der Sectionslinie auf $b = oa : mb$.

Man hat also $m = 1$, $n = {}^1/_2$; $m_, = \infty$, $n_, = {}^1/m$,

folglich: $\frac{(\infty \cdot {}^1/_2) - (1 \cdot {}^1/m)}{1 \cdot \infty ({}^1/_2 - {}^1/m)} a = \frac{m}{m-2} a$.

Das allgemeine Zeichen dieser Achtundvierzigflächner ist: $mO\frac{m}{m-2}$; es gehören z. B. $4O2$, $5O{}^5/_3$ dieser Zone an.

In den betrachteten Zonen werden die Werthe der Coëfficienten m und n des Zeichens mOn stets innerhalb der durch die Grenzgestalten bestimmten Axenschnitte auf a und b sich bewegen. Andere Gestalten, als die genannten vier Arten von mOn und ihre Grenzgestalten, können für den positiven Quadranten, von dem wir ausgingen, und unter Erfüllung der Axenschnittsbedingung $mb > na > 1$, in den genannten Zonen nicht in Betracht kommen.

Mit den soeben erlangten Kenntnissen ausgerüstet, hätten wir am Magneteisenerzkrystall die Gestalt ε sehr leicht bestimmen können.

1. Aus der ersten Diagonalzone von O, in der dieselbe Gestalt sich befindet, folgt $n = \frac{2m}{m+1}$.

2. Aus der dritten Diagonalzone von O, in welcher sie gleichfalls auftritt, folgt $n = \frac{m}{m-2}$.

Daher ist $\frac{2m}{m+1} = \frac{m}{m-2}$, d. h. $m = 5$ und $n = {}^5/_3$.

Ausser $5O{}^5/_3$, welche Gestalt in der I. und III. Diagonalzone von O liegt, gibt es noch ein Hexakisoktaëder, das in zwei Hauptzonen zugleich auftritt, nämlich $3O{}^3/_2$. Diese Gestalt steht sowohl unter dem Zeichen $mO\frac{m}{m-1}$ als auch unter $mO\frac{2m}{m+1}$, ist daher parallelkantig und isogonal zu gleicher Zeit.

Die soeben mitgetheilten Resultate einer Untersuchung der Hauptzonen des regulären Systems, mit besonderer Berücksichtigung der allgemeinen Zeichen der Achtundvierzigflächner, sind von NAUMANN* und WEISS** bereits früher erhalten worden. Beide Gelehrte haben sich jedoch zur Herleitung derselben, anderer Wege, wie wir, bedient.

* Lehrb. d. rein. u. ang. Kryst. 1830 und Elemente d. th. Kryst. 1856.

** Theorie der Hexakisoktaëder. Abh. d. Berl. Academie 1837.

Der von uns eingeschlagene Weg der Ermittelung dieser Verhältnisse ist durch Einfachheit und Uebersichtlichkeit ausgezeichnet und verdankt diese beiden Vorzüge der Anwendung der QUENSTEDT'schen Projection.

Mit Hülfe derselben gelingt es auch ein Bild des Zonenzusammenhangs aller bekannten mOn zu geben (es sind deren, ohne Rücksicht auf holoëdrische oder hemiëdrische Erscheinungsweise etwa 32 bekannt). Man darf aber, zur Erreichung dieses Zweckes, sich nicht auf die genannten Zonen beschränken, sondern muss durch passendes Eintragen der Sectionslinien der Achtundvierzigflächner in die Projection die Zonenfolgen auf den Sectionslinien der drei Hauptkörper: $\infty O \infty$, O, ∞O aufsuchen. Man erkennt alsdann den Zusammenhang des ganzen Systems und kann die mOn in Gruppen mit nach einfachen Gesetzen fortschreitenden allgemeinen Zeichen bringen. *

3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss.

a. Das Oktaëder O.

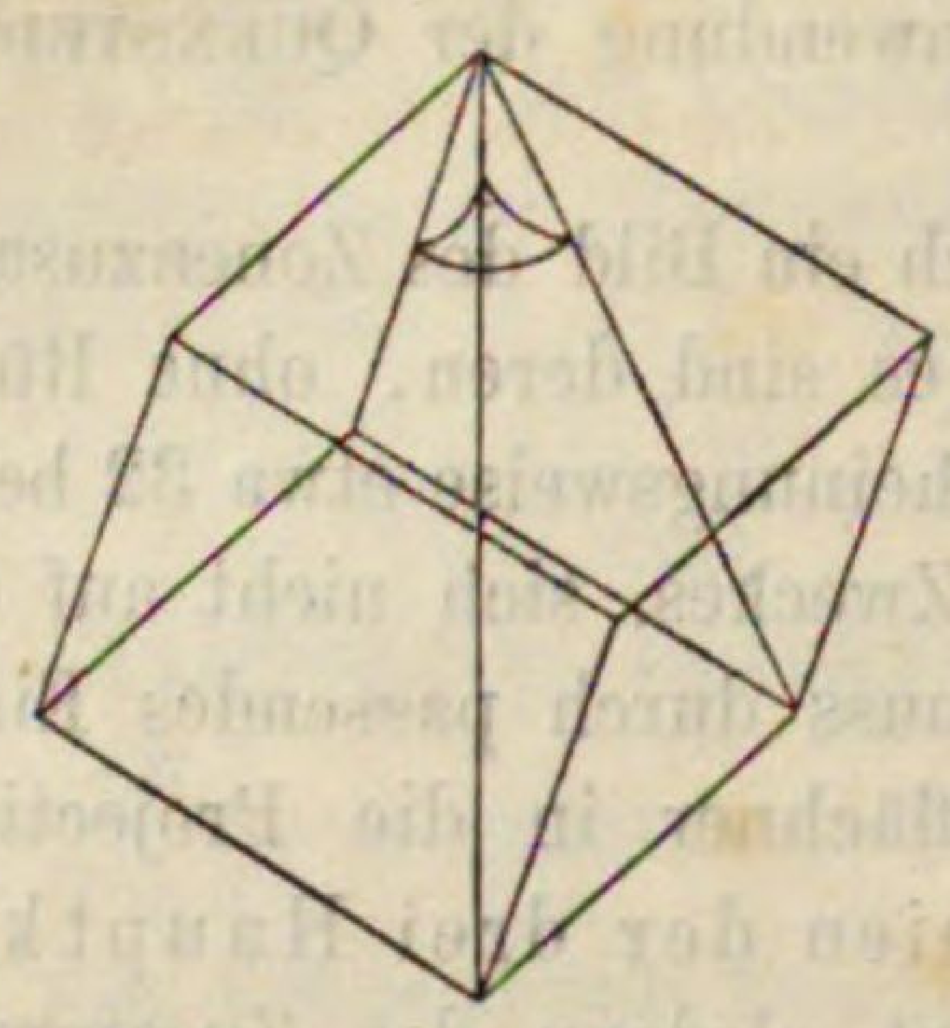
Setzt man die Hälften der drei gleichen, rechtwinkeligen Eckenaxen = a : a : a, so wird vorstehendes Zeichen als das einer Fläche von O angesprochen werden können. Die Länge der Kanten wird, wenn eine jede der Halbaxen = 1 gesetzt ist, zu $\sqrt{2}$. Da die Kanten alle gleich gross sind, so sind die das O begrenzenden Dreiecke gleichseitig, folglich ihre ebenen Winkel = 60^0. Der Neigungswinkel zweier Flächen ist $109^0\ 28'\ 16''$, daher die Neigung einer O-Fläche zur Eckenaxe = $90^0 - 54^0\ 44'\ 8'' = 35^0\ 15'\ 52''$. Die Eckenaxen eines Octanten schneiden die trigonale Zwischenaxe unter $54^0\ 44'\ 8''$; diese eine der digonalen Zwischenaxen desselben Octanten unter $35^0\ 15'\ 52''$.

b. Das Hexaëder $\infty O \infty$.

Seine Flächen gehen von a : ∞a : ∞a, seine Kanten sind die Eckenaxen von O, haben somit gleiche Länge, wie diese. Die Neigungswinkel je zweier in Kanten zusammenstossenden Flächen von $\infty O \infty$ sind = 90^0. Von Wichtigkeit ist oftmals die Kenntniss der Nei-

* Vergl. hierüber die Mittheilung des Verfassers im Neuen Jahrb. f. Mineralogie 1872, p. 122 u. f.

gungen einer Fläche von $\infty O \infty$ oder einer Kante dieser Gestalt zur trigonalen Axe.



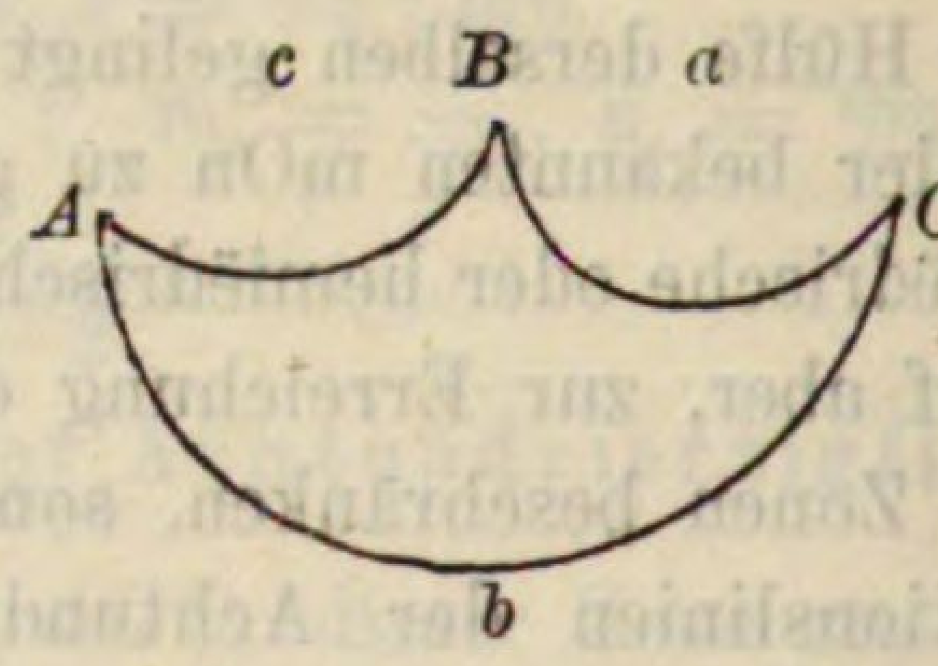


Fig. 24.

Zur Berechnung sei $\infty O \infty$ nach der trigonalen Axe aufrecht gestellt, Fig. 24, und die Höhenlinie einer Fläche gezogen. Alsdann lege man ein sphärisches Dreieck mit:

$$A = 45^0.$$
$$B = 60^0.$$
$$C = 90^0.$$

Die Neigung der Fläche gegen die trigonale Axe ist = a und $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$.

$$\log. \cos a = \log. \cos 45^0 = 9{,}8494850 - 10.$$
$$- \log. \sin 60^0 = 9{,}9375306 - 10.$$
$$9{,}9119544 - 10.$$
$$a = 35^0\ 15'\ 52''.$$

Die Neigung der Kante gegen die trigonale Axe ist = c und $\cos c = \operatorname{cotg} B$.

$$\log. \cos c = \log. \operatorname{cotg} 60^0 = 9{,}7614394 - 10.$$
$$c = 54^0\ 44'\ 8''.$$

c. Das Rhombendodekaëder ∞O.

Seine Flächen stumpfen die Kanten von O gerade ab, daher das Flächenzeichen $a : a : \infty a$. Die Neigung zweier in Kanten zusammenstossenden Flächen ist = 120°. Zwei in einem oktaëdrischen Eck sich gegenüberliegende Flächen schneiden sich unter 90°, weil diese Flächen diejenigen Kanten von $\infty O \infty$ gerade abstumpfen, welche eine Fläche dieser Gestalt zu dem damit in einer Zone liegenden Flächen-

paar abgrenzen. In Folge dessen ist eine Fläche von ∞O zu einer der Hauptaxen, mit der sie zum Schnitt kommt, unter 45° geneigt.

Um die Neigung einer Kante gegen eine der Hauptaxen zu ermitteln, denke man sich, Fig. 25, im Rhombendodekaëder die ver-

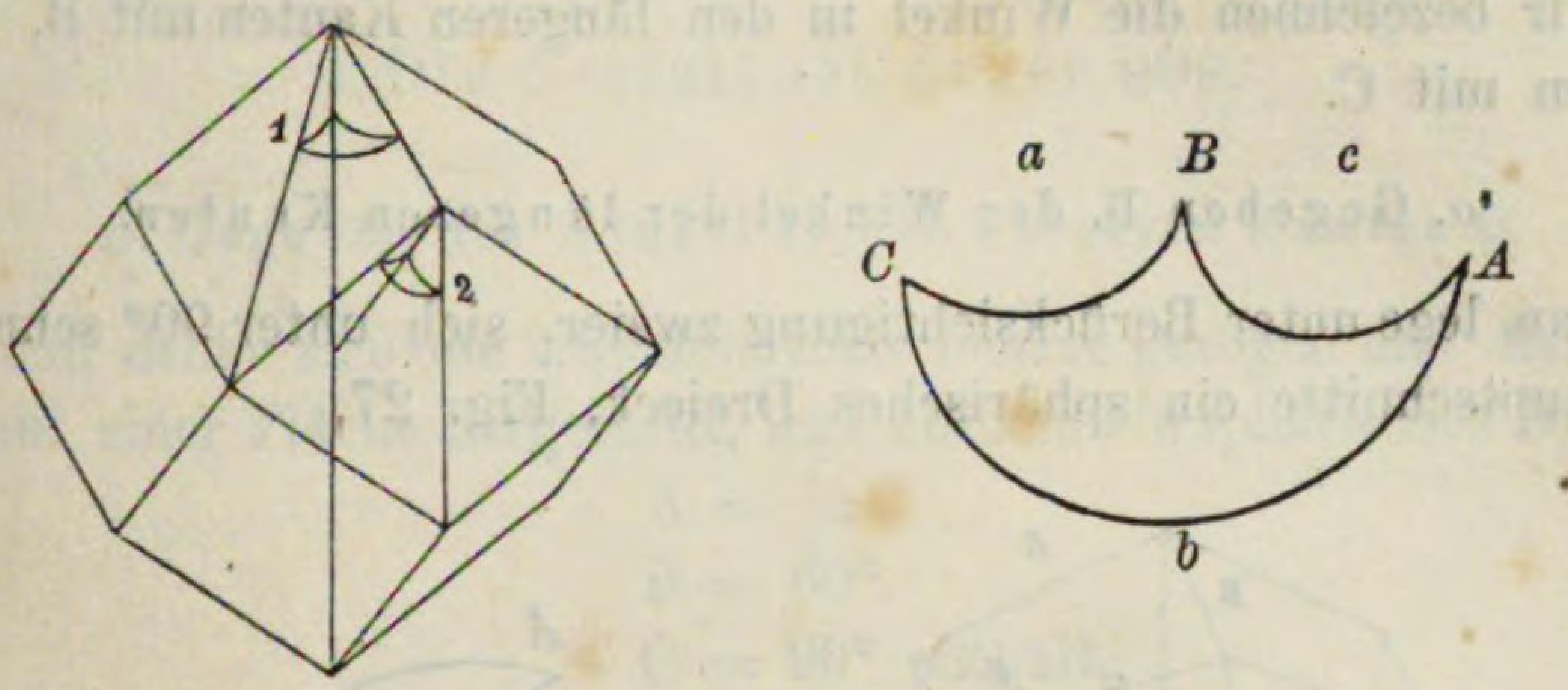


Fig. 25.

ticale Hauptaxe gezogen und die Höhenlinie auf einer Fläche hergestellt; alsdann kann folgendes sphärische Dreieck 1. gelegt werden:

$$A = 60^\circ.$$
$$B = 45^\circ.$$
$$C = 90^\circ.$$

In demselben ist gesucht c, d. h. die Neigung der Kante des Rhombendodekaëders zur verticalen Hauptaxe. Man hat $\cos c = \operatorname{cotg} A$.

$$\log. \cos c = \log. \operatorname{cotg} 60^\circ = 9{,}7614394 - 10.$$
$$c = 54^\circ\ 44'\ 8''.$$

Zur Ermittelung der Neigungen einer Kante und einer Fläche zur trigonalen Axe lege man das sphärische Dreieck 2. mit

$$A = 60^\circ.$$
$$B = 60^\circ.$$
$$C = 90^\circ.$$

2.

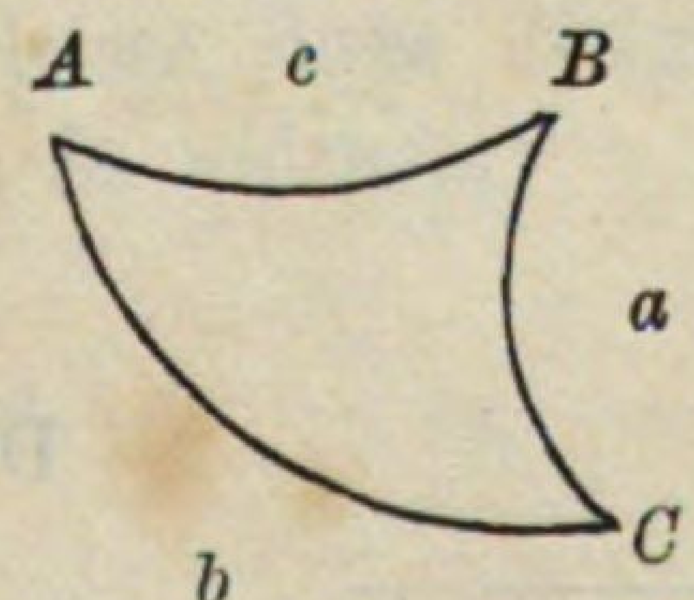


Fig. 26.

Die Neigung einer Kante zur trigonalen Axe findet sich durch $\cos c = \operatorname{cotg}^2 60^\circ$.

$$\log. \cos c = \log. \operatorname{cotg} 60^\circ = 9{,}7614394 - 10.$$
$$\text{Mit 2 zu multipliciren} = 9{,}5228788 - 10.$$
$$c = 70^\circ\ 31'\ 44''.$$

Die Neigung einer Fläche ∞O zur trigonalen Axe bedarf keiner Berechnung, da sie identisch ist mit der Neigung einer Kante von ∞O∞ zu derselben Axe. Besagte Neigung ist daher = 54° 44′ 8″.

d. Die Ikositetraëder mOm.

Flächenlage a : a : $^1/_m$a = ma : ma : a.

Wir bezeichnen die Winkel in den längeren Kanten mit B, in den kürzeren mit C.

α. Gegeben B, der Winkel der längeren Kanten.

Man lege unter Berücksichtigung zweier, sich unter 90° schneidenden Hauptschnitte ein sphärisches Dreieck, Fig. 27,

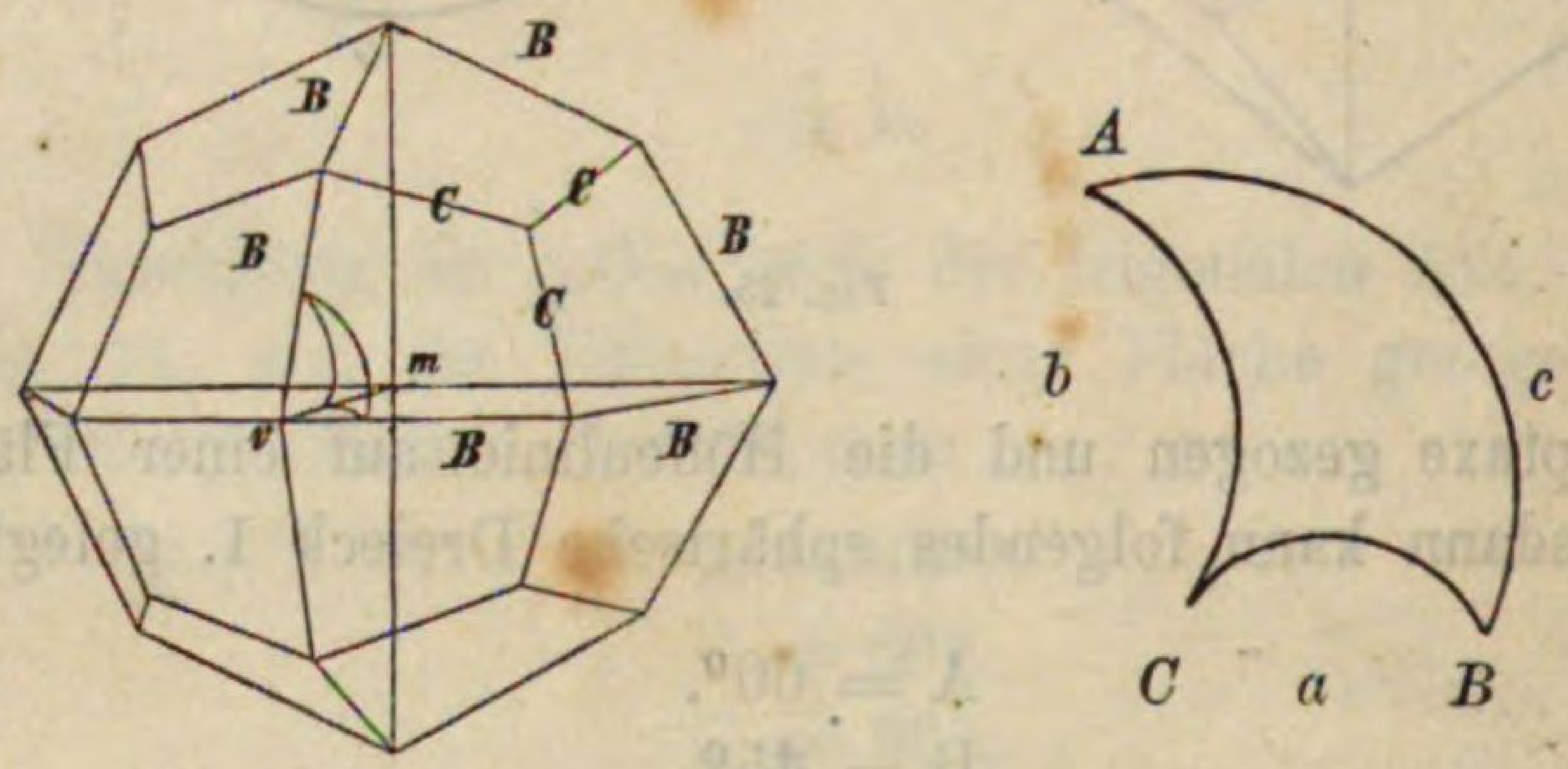


Fig. 27.

mit: A = B = ½ B.
C = 90°.

Gesucht ist b, d. h. die Neigung der Kante B zur Axe vm. Man hat cos b = cotg A; ferner tg b = m.

Beispiele. 1. Gemessen sei an einem mOm: B = 131° 48′.
log. cos b = log. cotg 65° 54′ = 9,6506199 — 10.
b = 63° 25′ 41″ *.
log. tg 63° 25′ 41″ = 0,3008994.
num. m = 1,9994 **.
= 2.

Das Ikositetraëder ist 2O2.

* Wir geben die Winkel bei der Berechnung der Ableitungscoëfficienten auf Secunden genau an; eine Genauigkeit von einer halben Minute würde indessen auch schon ausreichen.

** Die Ableitungscoëfficienten sind nicht absolut genau, da die Messungen immer mit kleinen Fehlern behaftet sind. Eine Uebereinstimmung auf die ersten zwei Stellen des Decimalbruchs ist in den meisten Fällen genügend. Will man sehen, wie weit die gemessenen Winkel von dem theoretischen Erforderniss abweichen, so ist letzteres aus den Ableitungscoëfficienten und dem Axenverhältniss zu ermitteln.

2. Gegeben sei an einem anderen mOm: B = 167° 24′.

$$\begin{aligned} \log.\cos b &= \log.\operatorname{cotg} 83^\circ 42' = 9{,}0429731 - 10. \\ b &= 83^\circ 39' 42''. \\ \log.\operatorname{tg} 83^\circ 39' 42'' &= 0{,}9543709. \\ \text{num. m} &= 9{,}0027. \\ &= 9. \end{aligned}$$

Die Gestalt ist daher 909.

β. Gegeben der Winkel in den kürzeren Kanten C.

Man denke sich die trigonale Zwischenaxe gezogen und die Höhenlinie auf einer Fläche hergestellt, lege alsdann ein sphärisches Dreieck 1. das:

$$\begin{aligned} A &= {}^1/_2 C. \\ B &= 60^\circ. \\ C &= 90^\circ \text{ enthält.} \end{aligned}$$

In demselben ist gesucht a, d. h. die Neigung der Höhenlinie zur trigonalen Axe. Man findet $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$.

Nun ist die trigonale Zwischenaxe zur verticalen Hauptaxe unter 54° 44′ 8″ geneigt, folglich ist die Neigung der Höhenlinie der Fläche

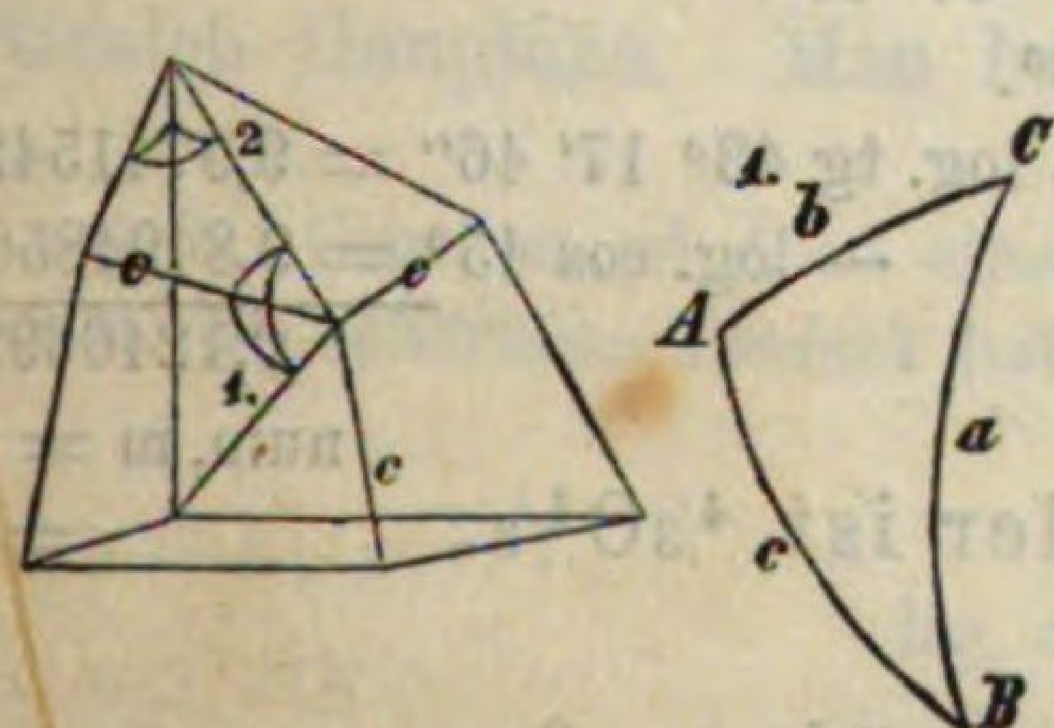


Fig. 28.

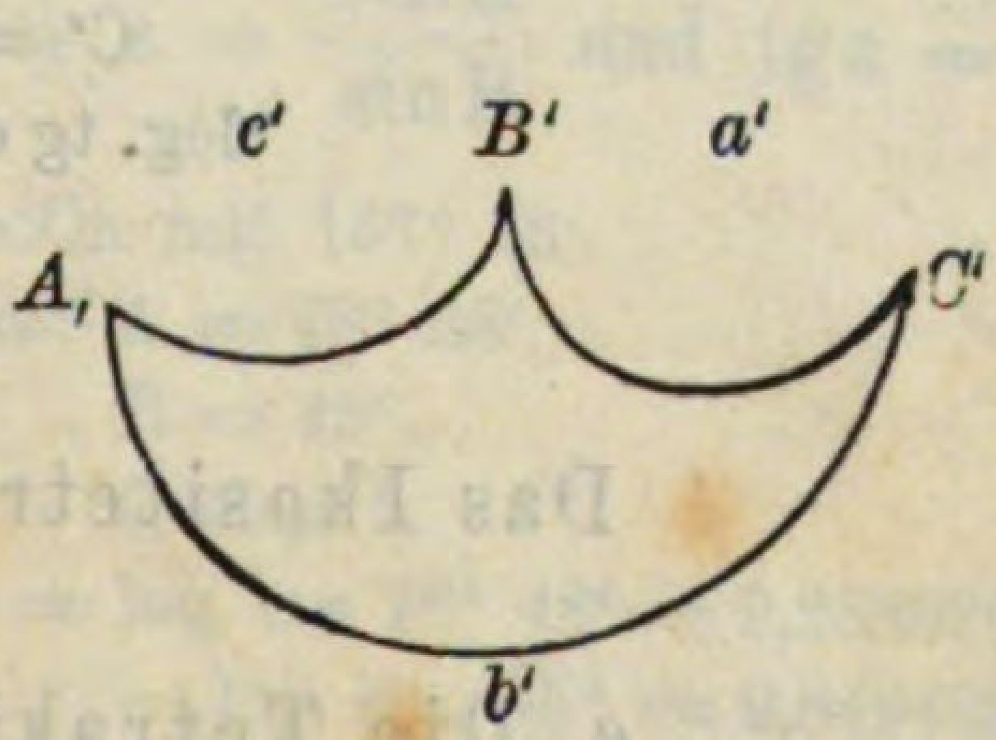


Fig. 29.

zur Hauptaxe = 180° — (54° 44′ 8″ + a). Heisse diese Neigung a′, so kann wieder ein Dreieck 2. gelegt werden, in welchem:

$$\begin{aligned} B' &= 45^\circ. \\ a' &= \text{soeben berechnet.} \\ C' &= 90^\circ \text{ ist.} \end{aligned}$$

In diesem Dreieck suchen wir c′, das ist die Neigung der Kante B zur Hauptaxe. Man findet $\operatorname{tg} c' = \frac{\operatorname{tg} a'}{\cos B'} = m$.

Beispiele. 1. Es sei gemessen an einem mOm: C = 120°.
Alsdann ist für das Dreieck 1.: A = 60° = ½ C von mOm.

$$\begin{aligned} B &= 60^\circ. \\ C &= 90^\circ. \end{aligned}$$

log. cos a = log. cotg 60° = 9,7614394 — 10
a = 54° 44′ 8″.
a′ = 180° — (54° 44′ 8″ + 54° 44′ 8″) = 70° 31′ 44″.

Im Dreieck 2. ist: B′ = 45°.
a′ = 70° 31′ 44″.
C′ = 90°.
log. tg c′ = log tg 70° 31′ 44″ = 0,4515476
— log. cos 45° = 9,8494850 — 10
0,6020626
num. m = 4.

Das Ikositetraëder ist 4O4.

2. Es sei gemessen an einem mOm: C = 166° 6′.
Für das Dreieck 1. ist: A = 83° 3′ = ½C von mOm.
B = 60°.
C = 90°.
log. cos a = log. cos 83° 3′ = 9,0827966 — 10
— log. sin 60° = 9,9375306 — 10
9,1452660 — 10
a = 81° 58′ 6″.
a′ = 180° — (54° 44′ 8″ + 81° 58′ 6″) = 43° 17′ 46″.

Im Dreieck 2. ist: B′ = 45°.
a′ = 43° 17′ 46″.
C′ = 90°.
log. tg c′ = log. tg 43° 17′ 46″ = 9,9741542 — 10
— log. cos 45° = 9,8494850 — 10
0,1246692
num. m = 1,3325.
= 4/3.

Das Ikositetraëder ist 4/3O4/3.

e. Die Tetrakishexaëder ∞On.

Die Flächenlage ist a : na : ∞a = 1/na : a : ∞a. Die Winkel in den längeren Kanten heissen C, die in den kürzeren A.

α. Gegeben der Winkel in den längeren Kanten C.

Ist C gegeben und man setzt $v = \frac{C - 90^0}{2}$, so ist cotg v = n.

Beispiele. 1. Gegeben an einem ∞On: C = 157° 22′, also v = 33° 41′.
log. cotg 33° 41′ = 0,1762019
num. n = 1,5004.

Das Tetrakishexaëder ist ∞O3/2.

2. Gemessen sei: C = 118° 4′; v = 14° 2′.
log. cotg 14° 2′ = 0,6021537
num. n = 4,0009.

Das Tetrakishexaëder ist ∞O4.

β. Gegeben der Winkel in den kürzeren Kanten A.

Man ziehe die Höhenlinie einer Fläche und lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 30, mit:

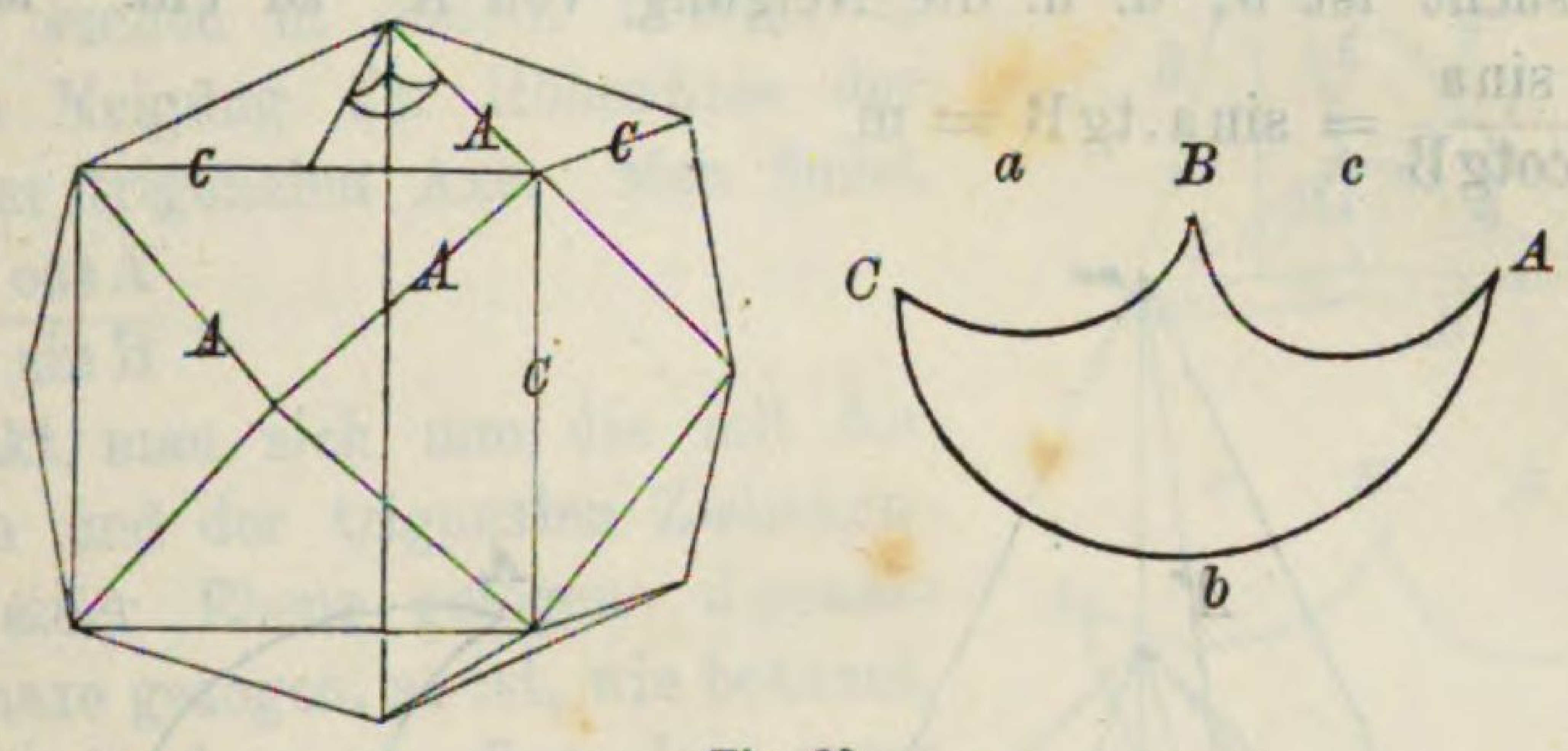


Fig. 30.

$$A = \frac{1}{2} A.$$
$$B = 45^0.$$
$$C = 90^0.$$

Gesucht ist darin a, d. h. die Neigung der Höhenlinie der Fläche zur verticalen Hauptaxe. Man hat $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$ und $\operatorname{tg} a = n$.

Beispiel. Gegeben sei A an einem ∞On mit 157° 36′.
Für das sphärische Dreieck hat man: A = 78° 48′.
B = 45°.
C = 90°.

$$\log. \cos a = \log. \cos 78^0\, 48' = 9{,}2883260 - 10$$
$$- \log. \sin. 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$9{,}4388410 - 10$$
$$a = 74^0\, 3'\, 23''.$$

$$\log. \operatorname{tg} 74^0\, 3'\, 23'' = 0{,}5441192$$
$$\text{num. } n = 3{,}5004.$$

Das Tetrakishexaëder ist $\infty O \frac{7}{2}$.

f. Die Triakisoktaëder mO.

Die Flächenlage ist a : a : ma = ¹/m a : ¹/m a : a. Die Winkel der längeren Kanten bezeichnen wir mit B, die der kürzeren mit A.

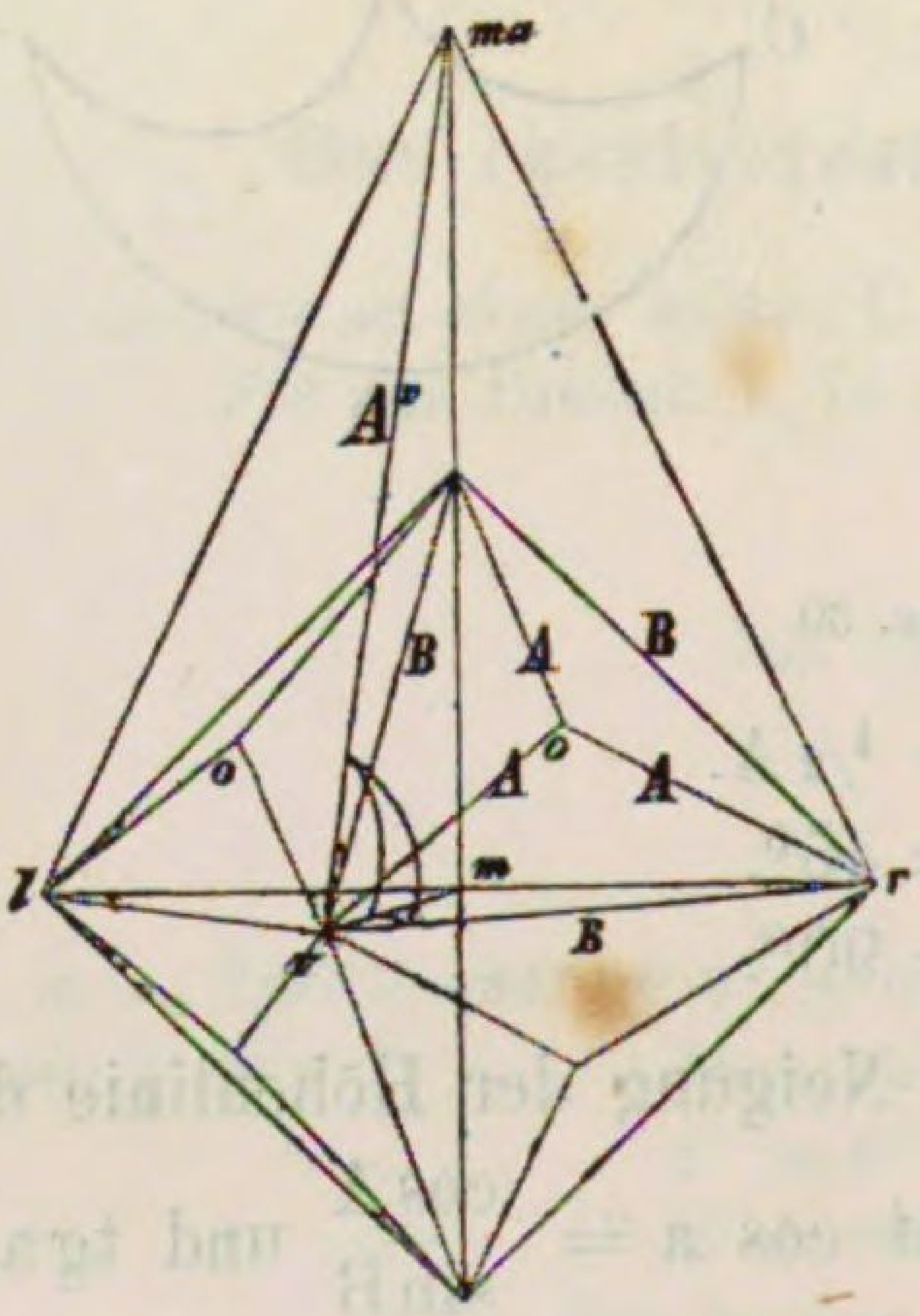
α. Gegeben B, der Winkel der längeren Kanten.

Man muss bemüht sein ein sphärisches Dreieck so zu legen, dass man die Neigung der in der Gestalt nicht vorhandenen Combinationskante A″, Fig. 31, die sich beim Schnitte der Flächen v.r.o und v.l.o ergeben würde, zur Hauptaxe vm berechnen kann. Für ein solches Dreieck ist:

$$B = \frac{1}{2}B.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 45^0.$$

Gesucht ist b, d. h. die Neigung von A″ zu vm. Man findet

$$\mathrm{tg}\,b = \frac{\sin a}{\mathrm{cotg}\,B} = \sin a . \mathrm{tg}\,B = m.$$



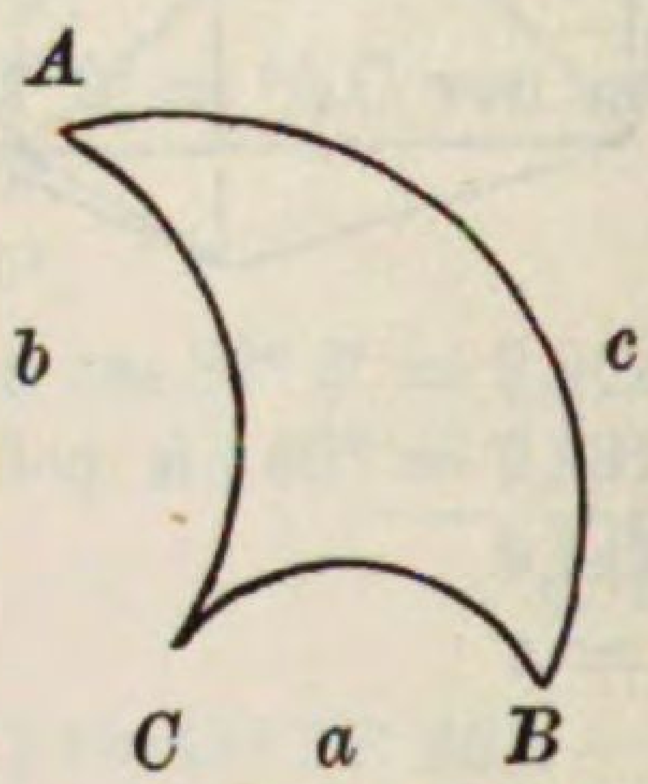


Fig. 31.

Beispiele. 1. Sei an einem mO gemessen: B = 141° 4′, so ist für das sphärische Dreieck:

$$B = 70^0\,32' = \frac{1}{2}B.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 45^0.$$

$$\log.\,\mathrm{tg}\,b = \log.\,\sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$-\log.\,\mathrm{cotg}\,70^0\,32' = 9{,}5483452 - 10$$
$$0{,}3011398$$
$$\mathrm{num.}\,m = 2{,}0005.$$

Das Triakisoktaëder ist 2O.

2. An einem anderen mO habe man B = 153° 28′ gefunden.
Für das sphärische Dreieck ist:

$$B = 76^0\,44' = \frac{1}{2}B.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 45^0.$$

$$\log.\,\mathrm{tg}\,b = \log.\,\sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$-\log.\,\mathrm{cotg}\,76^0\,44' = 9{,}3724992 - 10$$
$$0{,}4769858$$
$$\mathrm{num.}\,m = 2{,}9991.$$

Das Triakisoktaëder ist 3O.

β. Gegeben A, der Winkel der kürzeren Kanten.

Man denke sich die trigonale Zwischenaxe gezogen und die Höhenlinie auf einer Fläche dargestellt, Fig. 32, alsdann kann ein

sphärisches Dreieck gelegt werden, dessen Winkel die folgenden sind:

$$A = \frac{1}{2} A.$$
$$B = 60^0.$$
$$C = 90^0.$$

Wir suchen in diesem Dreieck a, d. h. die Neigung der Höhenlinie der Fläche zur trigonalen Axe. Man findet

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}.$$

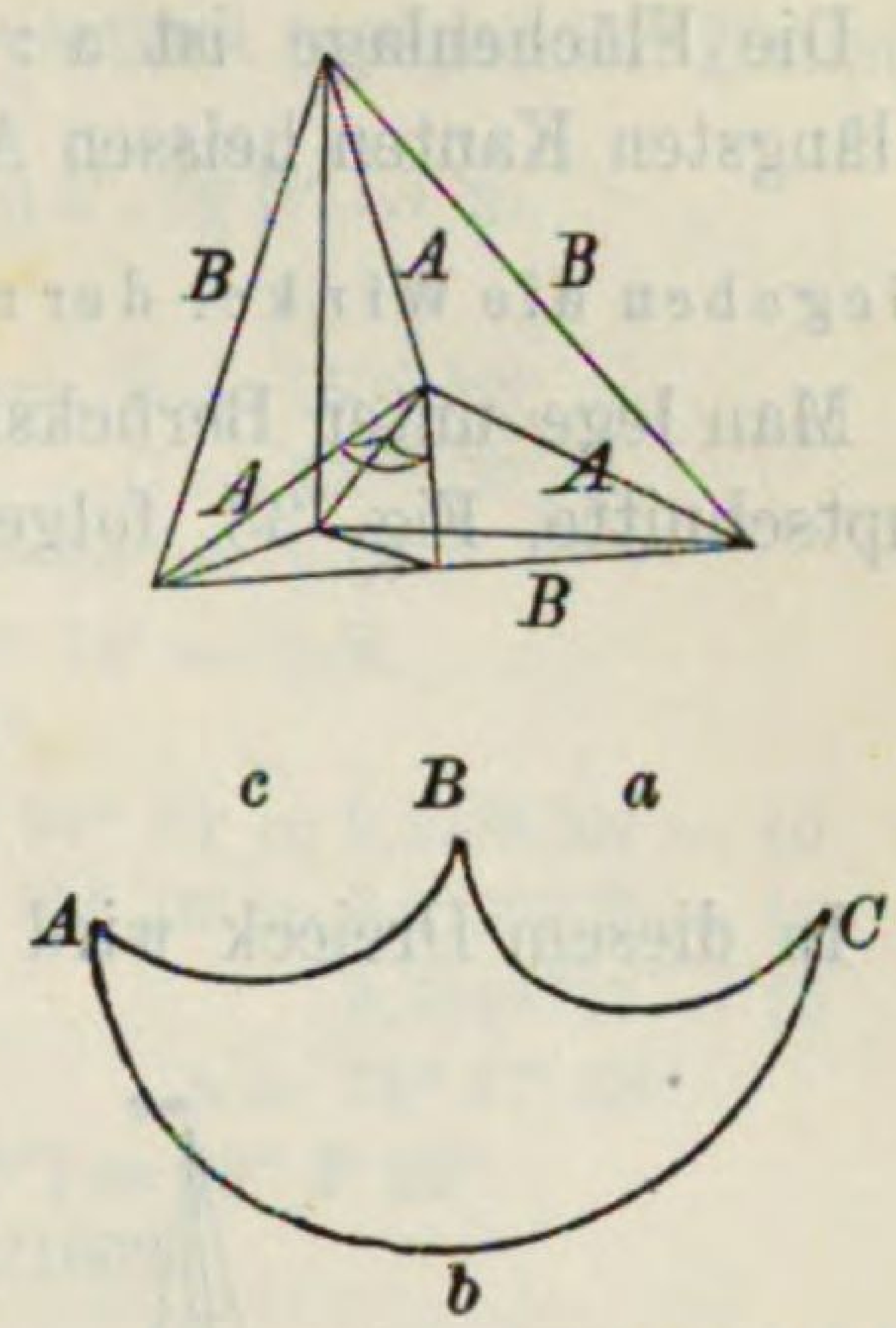


Fig. 32.

Denkt man sich nun die mit der Hauptaxe und der trigonalen Zwischenaxe in einer Ebene gelegene digonale Zwischenaxe gezogen, so ist, wie bekannt, die trigonale Axe zur digonalen unter $35^0\ 15'\ 52''$ geneigt. Die Neigung der Höhenlinie der Fläche des Triakisoktaëders zur digonalen Axe, d. h. der Winkel $\frac{1}{2}$B, ist daher $= 180^0 - (35^0\ 15'\ 52 + a)$.

Ist $\frac{1}{2}$B gefunden, so ist damit die Aufgabe auf den ersten Fall reducirt. Wie dort für das erste, gilt hier für das zweite sphärische Dreieck:

$$B' = \frac{1}{2} B.$$
$$C' = 90^0.$$
$$a' = 45^0.$$
$$\operatorname{tg} b' = \frac{\sin a'}{\operatorname{cotg} B'} = m.$$

Beispiel. Gemessen sei an einem mO: $A = 162^0\ 40'$.

Für das erste Dreieck ist daher: $A = 81^0\ 20'$.
$B = 60^0$.
$C = 90^0$.

$$\log. \cos a = \log. \cos 81^0\ 20' = 9{,}1780721 - 10$$
$$- \log. \sin 60^0 = 9{,}9375306 - 10$$
$$9{,}2405415 - 10$$
$$a = 79^0\ 58'\ 47''.$$

$$\frac{1}{2} B = 180^0 - (35^0\ 15'\ 52'' + 79^0\ 58'\ 47'')$$
$$= 64^0\ 45'\ 21''.$$

Im zweiten sphärischen Dreieck haben wir:
$B' = 64^0\ 45'\ 21''$.
$C' = 90^0$.
$a' = 45^0$.

$$\log. \operatorname{tg} b' = \log. \sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$- \log. \operatorname{cotg} 64^0\ 45'\ 21'' = 9{,}6734873 - 10$$
$$0{,}1759977$$
$$\text{num. } m = 1{,}4997.$$

Das Triakisoktaëder ist $\frac{3}{2}$O.

g. Die Hexakisoktaëder mOn.

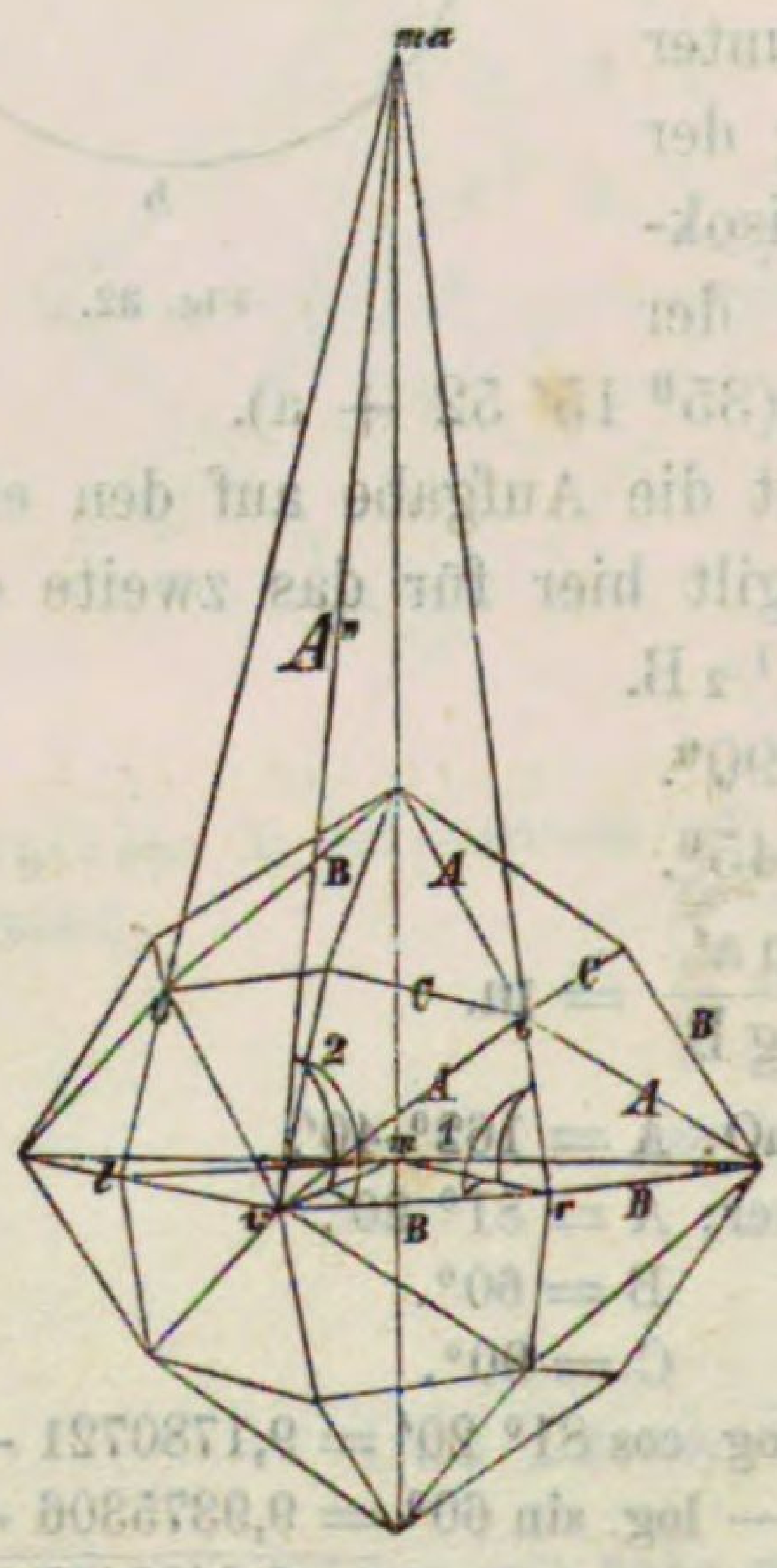
Die Flächenlage ist a : na : ma = $^1/_{ma}$: $^n/_{ma}$: a. Die Winkel der längsten Kanten heissen A, die der mittleren B, die der kürzesten C.

α. Gegeben die Winkel der mittleren und kürzesten Kanten B und C.

Man lege unter Berücksichtigung der sich unter 90° schneidenden Hauptschnitte, Fig. 33, folgendes sphärische Dreieck 1.:

$$A = {}^1/_2C.$$
$$B = {}^1/_2B.$$
$$C = 90^0.$$

In diesem Dreieck wird a gesucht, die Neigung der Kante B gegen



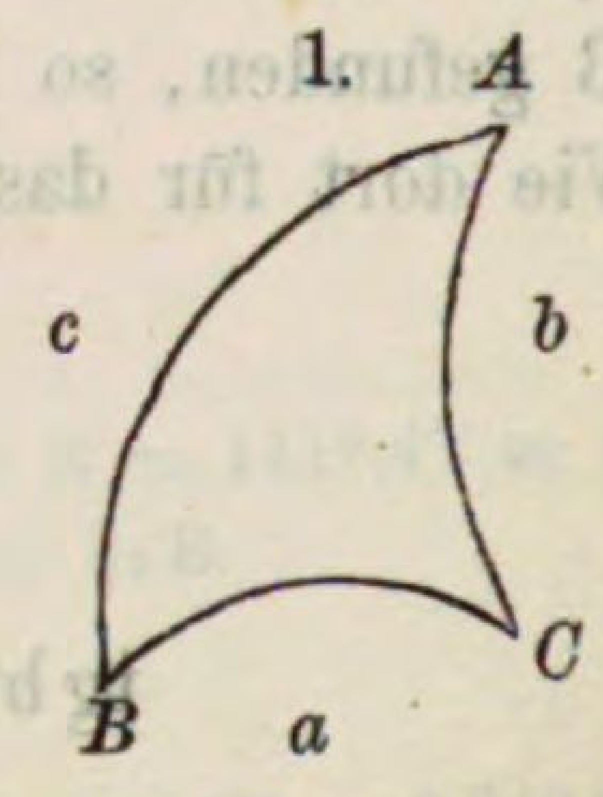


Fig. 33.

die digonale Zwischenaxe. Man findet $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Hierdurch wird also bekannt der Winkel mrv. Da aber ∢ rmv = = 45° ist, so erhält man schliesslich ∢ mvr = = 180° — (45° + a). Heisse dieser Winkel mvr = a′, so ist tga′ = n.



Fig. 34.

Um m zu bestimmen, lege man ein weiteres Dreieck 2. an mit: B′ = $^1/_2$B.

C′ = 90°.

a′ = soeben berechnet.

Man sucht b′, das ist die Neigung der Kante A″, die in der Gestalt zwar selbst nicht vorhanden ist, aber gebildet würde durch den Schnitt der Flächen v.r.o und v.l.o, zur vertical gerichteten Hauptaxe.

Es findet sich $\mathrm{tg}\,b' = \dfrac{\sin a'}{\mathrm{cotg}\,B'} = \sin a' . \mathrm{tg}\,B' = m.$

Beispiel. Es seien an einem mOn gemessen: $B = 160^0\ 32'$.
$C = 152^0\ 20'$,

so ist für das erste Dreieck: $A = 76^0\ 10' = {}^1/_2 C.$
$B = 80^0\ 16' = {}^1/_2 B.$
$C = 90^0.$

$$\log.\cos a = \log.\cos 76^0\ 10' = 9{,}3785767 - 10$$
$$-\log.\sin 80^0\ 16' = 9{,}9937030 - 10$$
$$9{,}3848737 - 10$$
$$a = 75^0\ 57'\ 38''.$$
$$a' = 180^0 - (45^0 + 75^0\ 57'\ 38'') = 59^0\ 2'\ 22''.$$
$$\log.\mathrm{tg}\ 59^0\ 2'\ 22'' = 0{,}2219037$$
num. n = 1,6669.
$$n = {}^5/_3.$$

Im zweiten Dreieck ist:
$$B' = 80^0\ 16' = {}^1/_2 B.$$
$$a' = 59^0\ 2'\ 22''.$$
$$C' = 90^0.$$
$$\log.\mathrm{tg}\,b' = \log.\sin 59^0\ 2'\ 22'' = 9{,}9332451 - 10$$
$$+ \log.\mathrm{tg}\ 80^0\ 16' = 0{,}7656549$$
$$0{,}6989000$$
num. m = 4,9993.
$$m = 5.$$

Die Gestalt ist $5O^5/_3$.

β. Gegeben die Winkel der mittleren und längsten Kanten B und A.

Man lege folgendes sphärische Dreieck:
$$A = {}^1/_2 A.$$
$$C = {}^1/_2 B.$$
$$B = 45^0.$$

Gesucht ist a, die Neigung der Kante B zur vertical gerichteten Hauptaxe.

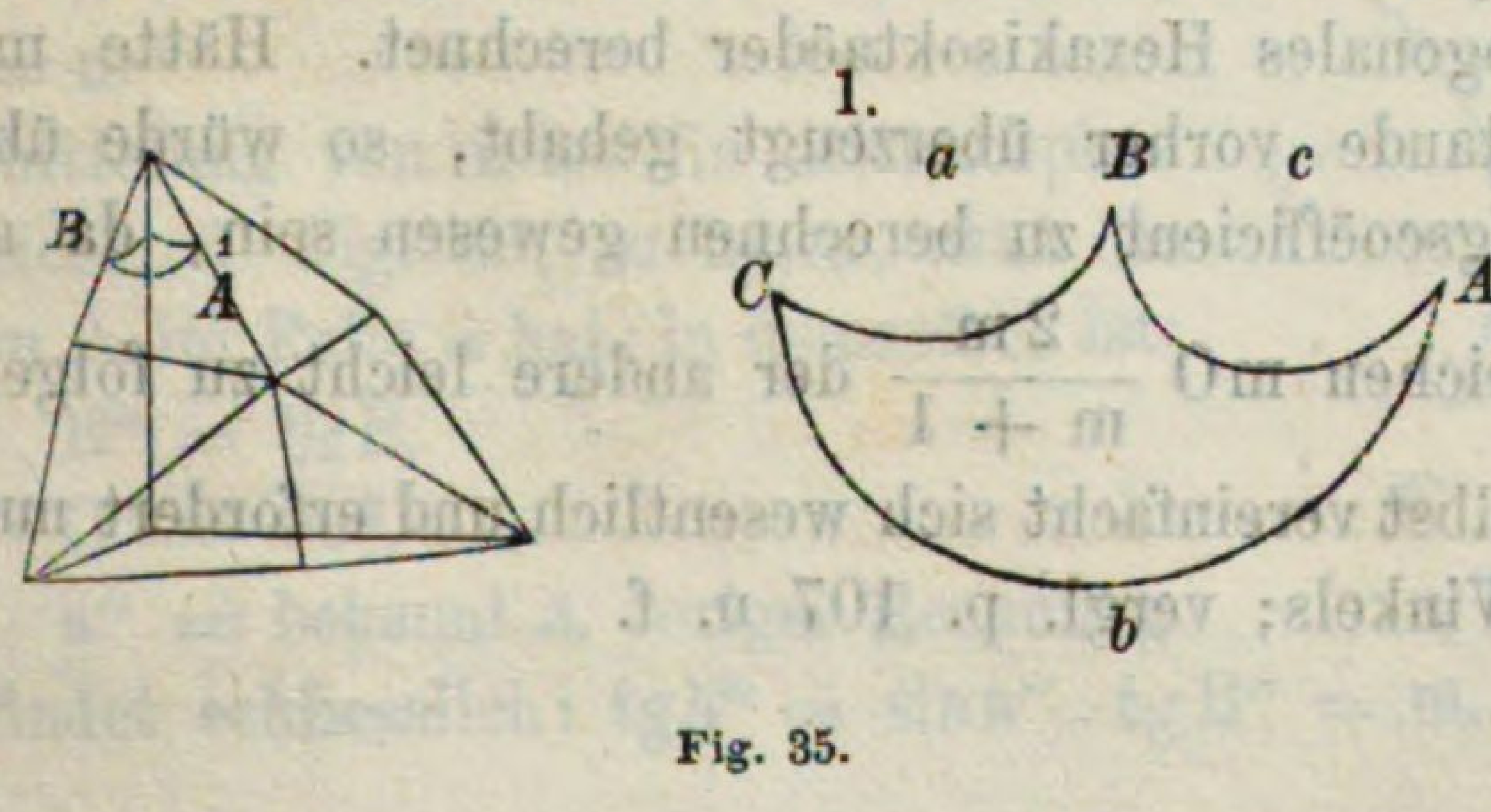


Fig. 35.

Man findet: $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}}$

und $\operatorname{tg} a = n$.

Durch ein zweites sphärisches Dreieck, das wie 2. im vorigen Falle liegt, findet sich m. Es ist in demselben:

$B' = \frac{1}{2}B$.

$C' = 90^0$.

a' = dem soeben berechneten a.

$\operatorname{tg} b' = \sin a' \cdot \operatorname{tg} B' = m$.

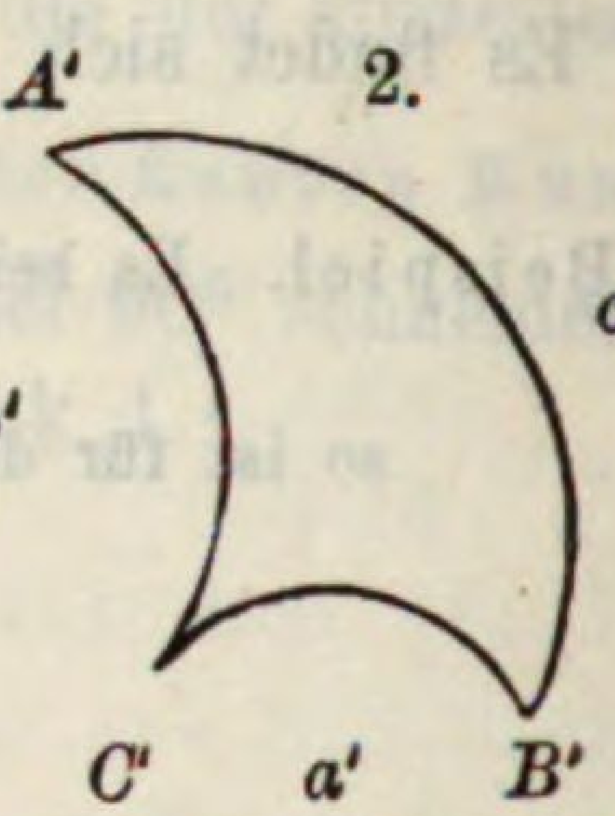


Fig. 36.

Beispiel. An einem mOn seien gemessen:

$A = 152^0\ 20'$.

$B = 160^0\ 32'$.

Für das erste Dreieck ist: $A = 76^0\ 10' = \frac{1}{2}A$.

$C = 80^0\ 16' = \frac{1}{2}B$.

$B = 45^0$.

$$\frac{A+B-C}{2} = 20^0\ 27' \quad ; \quad \frac{A+C-B}{2} = 55^0\ 43'.$$

$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 20^0\,27' = 9{,}9717291 - 10$

$+ \log.\cos 55^0\,43' = 9{,}7507287 - 10$

$9{,}7224578 - 10$

$\log.\sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$

$+ \log.\sin 80^0\,16 = 9{,}9937030 - 10$

$9{,}8431880 - 10$

$9{,}8431880 - 10$

$19{,}8792698 - 20.$

Daraus $\sqrt{\ }$, d. h. div. durch 2 : $9{,}9396349 - 10$

$\frac{a}{2} = 29^0\ 30'\ 52''$.

$a = 59^0\ \ 1'\ 44''$.

Dieser Winkel a ist von dem entsprechenden im vorigen Beispiel a' um nur 0' 38" verschieden. Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die zur Rechnung verwandten Winkel nicht absolut genau sind, auch jene eine andere, wie im vorigen Falle ist, kann man beide Werthe der Winkel a' und a einander gleich setzen und findet dann, wie im vorigen Beispiel, $n = \frac{5}{3}$ und $m = 5$. Wir haben somit zum ersten Male ein isogonales Hexakisoktaëder berechnet. Hätte man sich von diesem Umstande vorher überzeugt gehabt, so würde überhaupt nur ein Ableitungscoëfficient zu berechnen gewesen sein, da aus dem allgemeinen Zeichen $mO\frac{2m}{m+1}$ der andere leicht zu folgern ist. Die Rechnung selbst vereinfacht sich wesentlich und erfordert nur die Kenntniss eines Winkels; vergl. p. 107 u. f.

γ. **Gegeben die Winkel der längsten und kürzesten Kanten A und C.**

Man lege ein sphärisches Dreieck 1., Fig. 37, mit:

$$A = \tfrac{1}{2}A.$$
$$B = \tfrac{1}{2}C.$$
$$C = 60^0.$$

Gesucht ist a, d. h. die Neigung der Kante C zur trigonalen Axe.

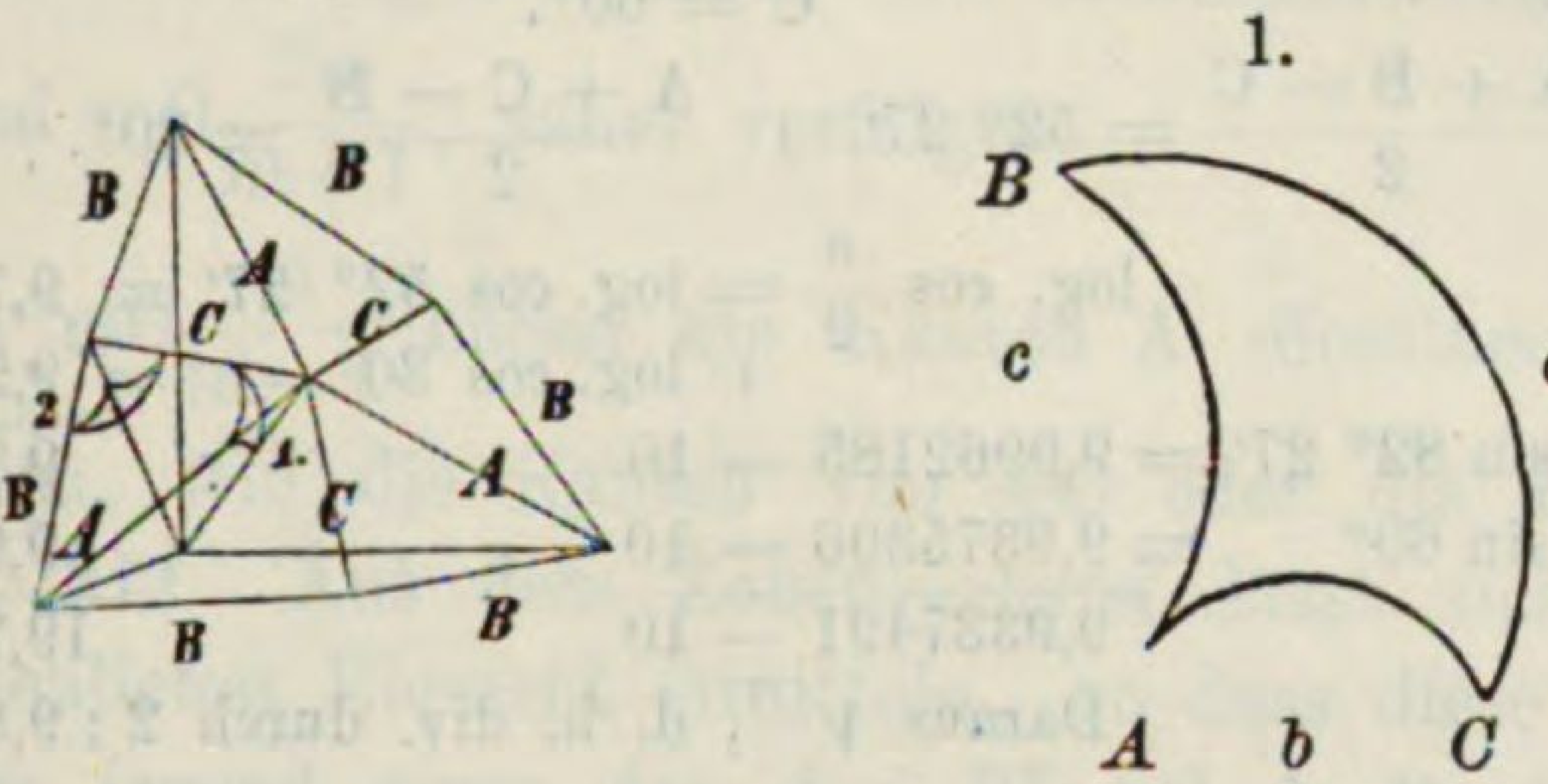


Fig. 37.

Man findet $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\,.\,\sin C}}$.

Da nun die trigonale Axe des Octanten v.r.o zur digonalen Axe, die auf der Grenze der Octanten v.r.o und v.l.o liegt, unter 35⁰ 15′ 52″ geneigt ist, so beträgt die Neigung der Kante C zur digonalen Axe:

$$b' = 180^0 - (35^0\ 15'\ 52'' + a).$$

Im zweiten sphärischen Dreieck, 2. Fig. 38, hat man:

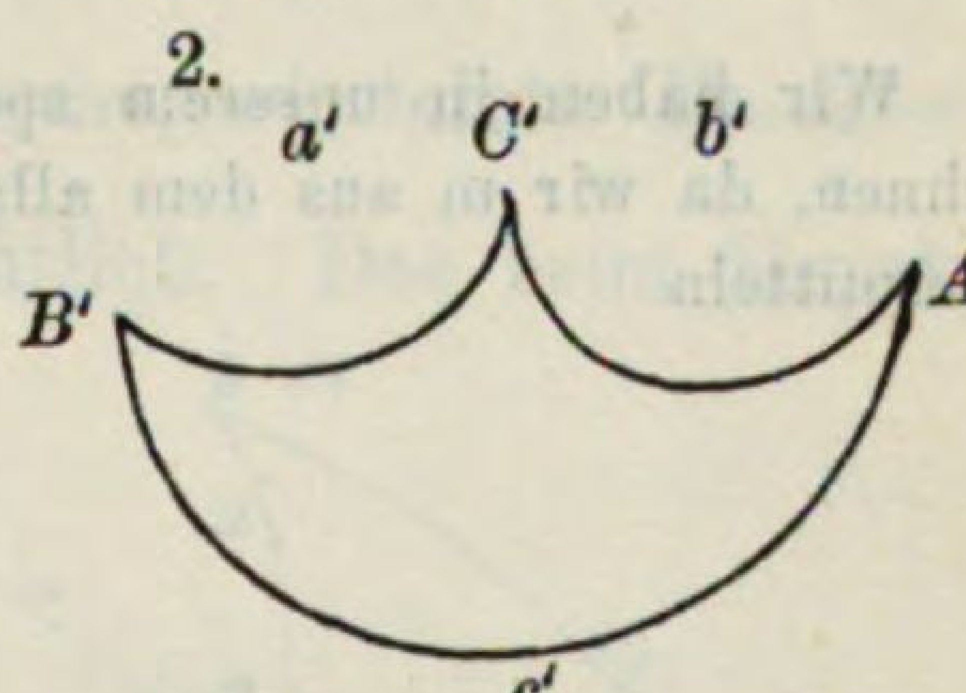


Fig. 38.

$$A' = \tfrac{1}{2}C.$$
$$C' = 90^0.$$

b′ = soeben berechnet.

Man findet $\cos B' = \sin A'\,.\,\cos b'$; $2B'$ = Kante B;

ferner $\operatorname{tg} a' = \sin b'\,.\,\operatorname{tg} A'$.

Ist die Neigung der Kante B gegen die Hauptaxe = a″, so ist $a'' = 180^0 - (45^0 + a')$ und $\operatorname{tg} a'' = n$.

Zur Ermittelung von m ist ein drittes sphärisches Dreieck, 3. Fig. 39, zu legen, was die Position von 2. im Falle α hat; in demselben ist:

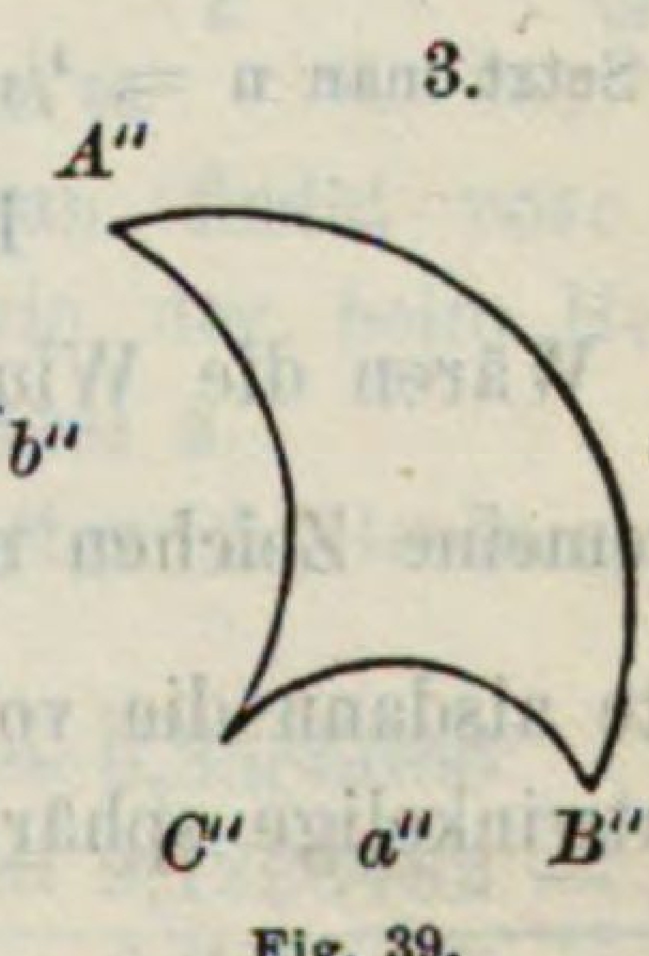


Fig. 39.

$$B'' = \tfrac{1}{2}B.$$
$$C'' = 90^0.$$

a″ = bekannt a. voriger Rechnung.

Man findet schliesslich: $\operatorname{tg} b'' = \sin a''\,.\,\operatorname{tg} B'' = m.$

Beispiel. Gemessen sei an einem mOn: $A = 164^0\ 54'$.
$C = 164^0\ 54'$.

Wir haben also hier ein isogonales mOn und werden in Folge dessen nur den Coëfficienten n berechnen und m aus der Gleichung $n = \frac{2m}{m+1}$ bestimmen, welche $m = \frac{n}{2-n}$ ergibt. *

Für das erste sphärische Dreieck ist: $A = 82^0\ 27'$.
$B = 82^0\ 27'$.
$C = 60^0$.

$$\frac{A+B-C}{2} = 52^0\ 27' \quad ; \quad \frac{A+C-B}{2} = 30^0.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 52^0\ 27' = 9{,}7849406 - 10$$
$$+ \log.\cos 30^0 = 9{,}9375306 - 10$$
$$9{,}7224712 - 10$$

$$\log.\sin 82^0\ 27' = 9{,}9962185 - 10$$
$$+ \log.\sin 60^0 = 9{,}9375306 - 10$$
$$9{,}9337491 - 10$$

$$9{,}9337491 - 10$$
$$19{,}7887221 - 20$$

Daraus $\sqrt{\ }$, d. h. div. durch 2 : 9,8943611 — 10

$$\frac{a}{2} = 38^0\ 21'\ 51''.$$
$$a = 76^0\ 43'\ 42''.$$
$$b' = 180^0 - (35^0\ 15'\ 52'' + 76^0\ 43'\ 42'') = 68^0\ 0'\ 26''.$$

Für das zweite Dreieck ist:
$A' = 82^0\ 27'$.
$C' = 90^0$.
$b' = 68^0\ 0'\ 26''$.

Wir haben in unserem speciellen Falle in diesem Dreieck B' nicht zu berechnen, da wir m aus dem allgemeinen Zeichen ableiten, somit können wir direct a' ermitteln.

$$\log.\operatorname{tg} a' = \log.\sin 68^0\ 0'\ 26'' = 9{,}9671880 - 10$$
$$+ \log.\operatorname{tg} 82^0\ 27' = 0{,}8776518$$
$$0{,}8448398$$
$$a' = 81^0\ 51'\ 54''.$$
$$a'' = 180^0 - (45^0 + 81^0\ 51'\ 54'') = 53^0\ 8'\ 6''.$$
$$\log.\operatorname{tg} 53^0\ 8'\ 6'' = 0{,}1250161$$
$$\text{num. } n = 1{,}3336.$$
$$= \frac{4}{3}.$$

Setzt man $n = \frac{4}{3}$ in $m = \frac{n}{2-n}$ ein, so folgt $m = 2$.

Die Gestalt ist also $2O\frac{4}{3}$.

Wären die Winkel A und C nicht gleich gewesen, so hätte das allgemeine Zeichen $mO\frac{2m}{m+1}$ nicht statt haben können, und man hätte alsdann die vollständige Rechnung durchführen, d. h. noch zwei rechtwinkelige sphärische Dreiecke auflösen müssen.

* Eine weitere Vereinfachung der Rechnung, die überdies aus der Kenntniss eines Winkels geführt wird, folgt p. 107.

δ. Berechnung der $mO\frac{m}{m-1}$ und $mO\frac{2m}{m+1}$.

Nicht immer wird man bei den Hexakisoktaëdern die vollständige Rechnung durchzuführen haben. Ist aus dem Zonenverband ein allgemeines Zeichen zu ermitteln, so bedarf es nur der Berechnung eines Ableitungscoëfficienten und es ist hierzu nur eine Winkelmessung nöthig. — Wir werden letzteres Verhältniss bei den wichtigsten Arten von Achtundvierzigflächnern, den $mO\frac{m}{m-1}$ und $mO\frac{2m}{m+1}$, näher verfolgen.

Bei den $mO\frac{m}{m-1}$ haben die Kanten A dieselben Neigungen zu den Hauptaxen, wie die Kanten von ∞O oder die Höhenlinien der Flächen von 2O2. Aus dem Zonenverband lässt sich also ein zur Rechnung dienliches Element ermitteln, so dass diese dann nur noch die Kenntniss irgend eines der drei Winkel A, B oder C erfordert, wie eine leichte Ueberlegung zeigt. Die Rechnung ist dann entweder aus Kenntniss der Kante A und ihrer Neigung zur Hauptaxe, oder aus Kenntniss von B und der Neigung von A zur Hauptaxe, oder schliesslich aus C und der Neigung von A zur trigonalen Axe, welche Neigung aus der von A zur Hauptaxe leicht folgt, zu führen.

Bei den $mO\frac{2m}{m+1}$ gestaltet sich die Sache, wie folgt. Da A = C ist, so vereinfacht sich die Rechnung wesentlich. Das beim Hexakisoktaëder unter γ angelegte sphärische Dreieck 1. ist durch einen sphärischen Perpendikel zu halbiren und ein Dreieck 1ª. mit:

$B = \frac{1}{2}C$ von $mO\frac{2m}{m+1}$.

$C = 90^0$.

$A = 30^0$ zu legen, Fig. 40.

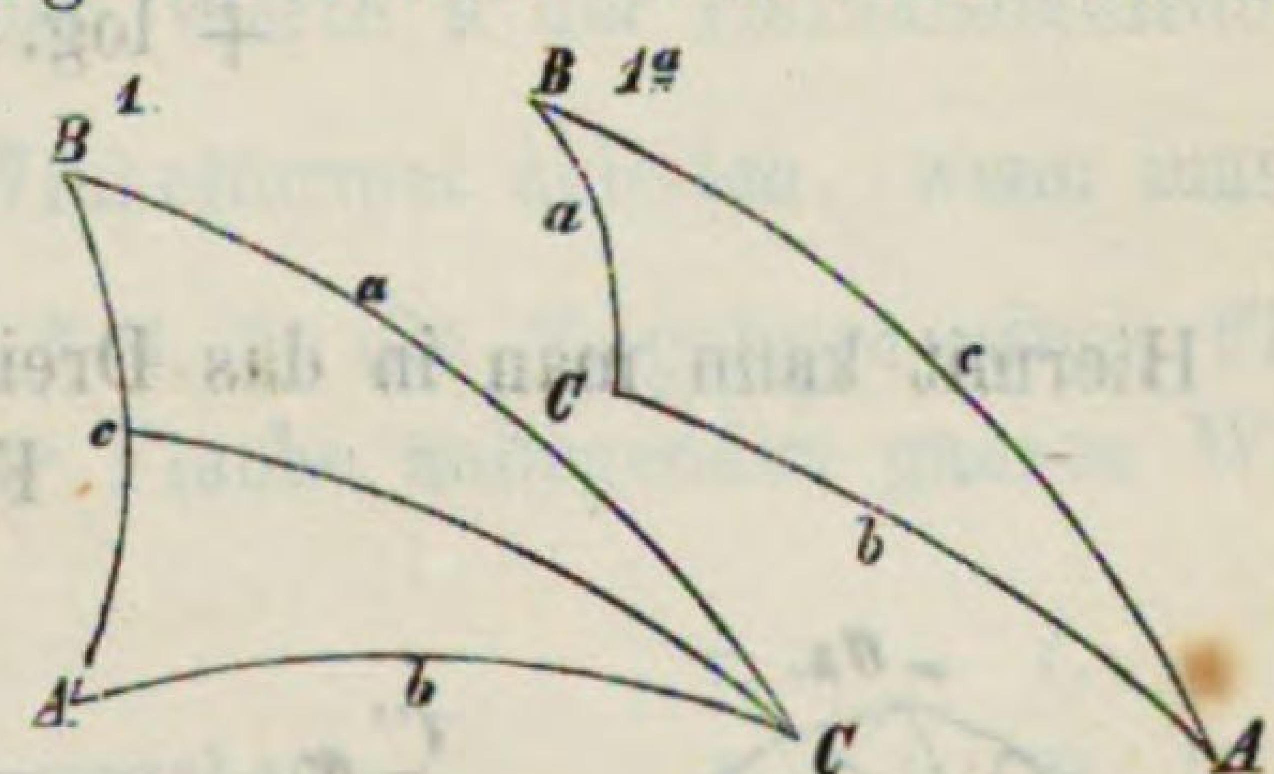


Fig. 40.

In diesem Dreieck ist c zu bestimmen; man findet $\cos c = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B$. Dieser Winkel ist derselbe wie der beim Hexakisoktaëder unter γ im Dreieck 1. gerechnete Winkel a.

Für den speciellen Fall des unter γ gerechneten Zahlenbeispiels ist $B = \frac{1}{2}C = 82^0\ 27'$; also hat man:

$$\begin{aligned} \log.\cos c &= \log.\operatorname{cotg} 30^0\ 0' = 0{,}2385606 \\ &+ \log.\operatorname{cotg} 82^0\ 27' = 9{,}1223482 - 10 \\ &\overline{\qquad\qquad 9{,}3609088 - 10} \\ c &= 76^0\ 43'\ 42''. \end{aligned}$$

Dieser Winkel ist $= a$ in dem Beispiel der Hexakisoktaëderberechnung γ und es wird nunmehr hier, wie dort, verfahren, vergl. p. 106.

Auch die Kante B kann zur Berechnung der $mO\frac{2m}{m+1}$ herangezogen werden. Es ist alsdann zu berücksichtigen, dass die Combinationskante $\infty O2 : O$ zur Combinationskante $\infty O2 : O$, Fig. 41, unter demselben ebenen Winkel neigt, unter welchem die Combinationskante $mO\frac{2m}{m+1} : \infty O2$ zur Combinationskante $mO\frac{2m}{m+1} : \infty O2$ steht, Fig. 42.

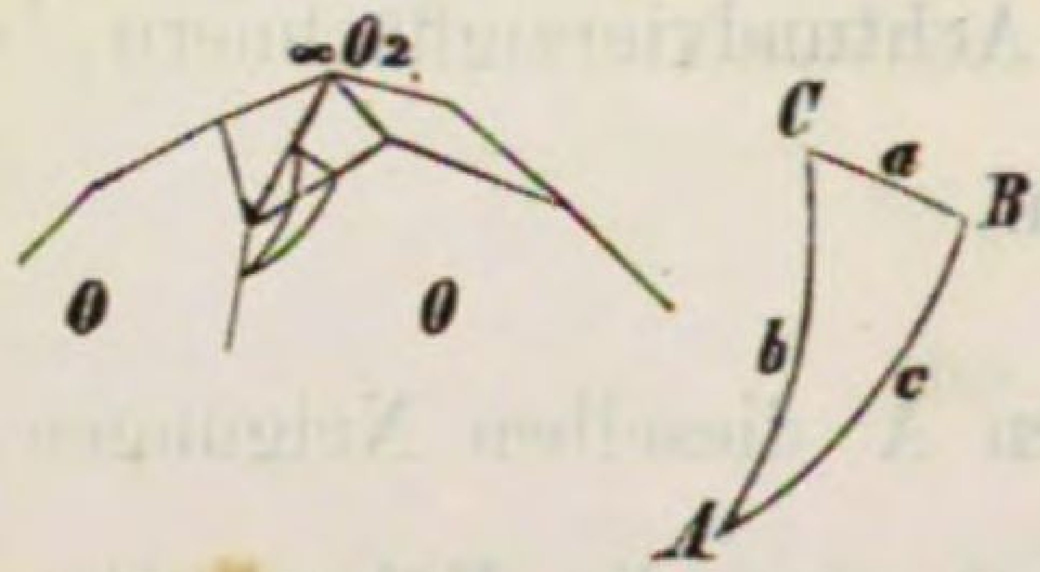


Fig. 41.

Dieser Winkel ist ein für alle Male zu rechnen. Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 41, mit folgenden Stücken:

$A = 54^0\ 44'\ 8''.$
$C = 90^0.$
$b = 161^0\ 33'\ 54''.$

Dieser letztere Winkel ist die Neigung der Oktaëderkante zur Höhenlinie auf $\infty O2$, gebildet aus der Neigung der Oktaëderkante zur Hauptaxe $= 45^0$ und der Neigung von $\infty O2$ in den Kanten $C = 143^0\ 7'\ 48''$. Man sucht a, das ist die Hälfte des gewünschten ebenen Winkels. Es findet sich: $\text{tg}\, a = \sin b \,.\, \text{tg} A$.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg}\, a &= \log.\ \sin 18^0\ 26'\ 6'' = 9{,}5000012 - 10 \\ &+ \log.\ \text{tg}\ 54^0\ 44'\ 8'' = \underline{0{,}1505142 \qquad} \\ &\qquad\qquad 9{,}6505154 - 10 \\ &\qquad\qquad a = 24^0\ 5'\ 42''. \end{aligned}$$

Hiermit kann man in das Dreieck am Hexakisoktaëder eingehen, Fig. 42, was $A' = \frac{1}{2} B$.

$C' = 90^0.$

$a' = a$ aus voriger Rechnung enthält. Man berechnet in diesem Dreieck b' durch $\sin b' = \text{cotg.} A' \,.\, \text{tg}\, a'$ und hat b' als stumpfen Winkel zu nehmen. Dies b' ist die Neigung der Kante B zur Höhenlinie von $\infty O2$. Da nun letztere gegen die Hauptaxe unter $63^0\ 26'\ 6''$ geneigt ist, so lässt sich daraus leicht die Neigung von B gegen dieselbe Hauptaxe ermitteln.

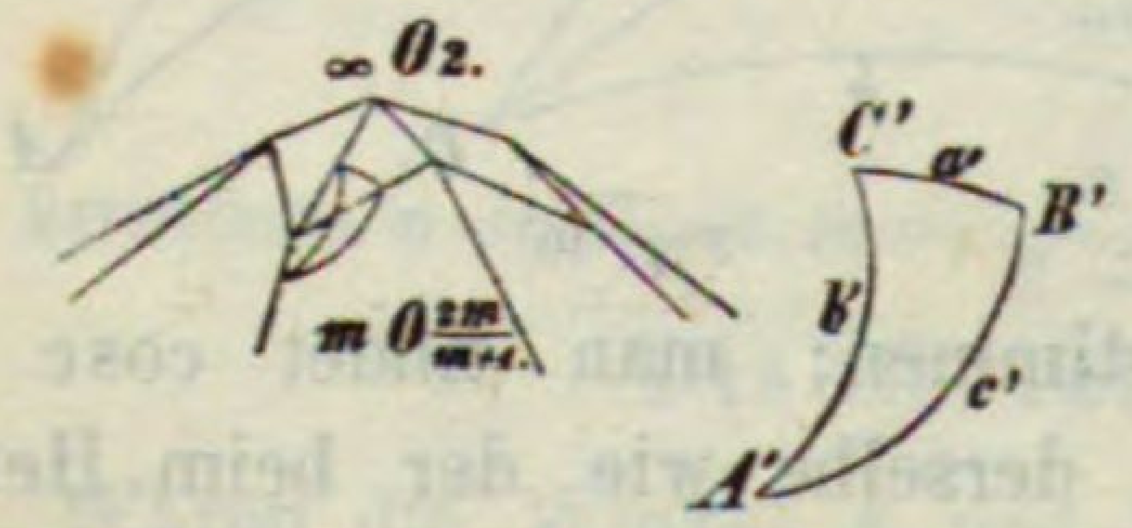


Fig. 42.

Die Tangente des letzteren Winkels ergibt $n = \frac{2m}{m+1}$.

Beispiel. Gegeben sei an einem isogonalen Hexakisoktaëder: $B = 149^0$; alsdann ist:

$$\begin{array}{rl} \log. \sin b' = \log. \text{cotg}\ 74^0\ 30' = & 9{,}4429883 - 10 \\ + \log. \text{tg}\ 24^0\ 5'\ 42'' = & 9{,}6505154 - 10 \\ \hline & 9{,}0935037 - 10 \\ b' = 7^0\ 7'\ 28''. & \\ \text{d. h.} = 172^0\ 52'\ 32''. & \end{array}$$

Aus diesem Winkel, der Neigung von B gegen die Höhenlinie auf $\infty O2$ und dem Winkel $63^0\ 26'\ 6''$, der Neigung dieser Höhenlinie zur Hauptaxe, folgt die Neigung der Kante B zur Hauptaxe mit $56^0\ 18'\ 38''$.

$$\log. \text{tg}\ 56^0\ 18'\ 38'' = 0{,}1761015$$
$$\text{num. } n = 1{,}5.$$

Da nun $n = \frac{2m}{m+1}$, so folgt $m = 3$ und die Gestalt ist $3O^3/_2$.

— Ferner erfordern die Hexakisoktaëder zu ihrer Berechnung nur eine Winkelmessung, wenn Gestalten mit ihnen derartig combiniren, dass durch dieselben die Kanten A, B oder C gerade abgestumpft werden. Es sind alsdann durch diese Ikositetraëder, Tetrakishexaëder oder Triakisoktaëder die Neigungen der entsprechenden Kanten der Hexakisoktaëder gegen die Axen gegeben und als bekannte Elemente in die Rechnungen einzuführen. Werden speciell die mittleren Kanten eines mOn durch ein ∞On gerade abgestumpft, so ist, da diese mittleren Kanten nach na ziehen, dadurch gleichzeitig der Ableitungscoëfficient n bestimmt und nur noch m zu berechnen.

Anmerkung. Man kann die aus der Gleichheit der Winkel A und C fliessende Bedingung für den Werth n der Hexakisoktaëder $= \frac{2m}{m+1}$ auch vermittelst der Winkelformel ableiten, wenn man die halben Winkel in Betracht zieht,* d. h. die Neigungen einer Fläche gegen die Ebenen, welche die der Fläche anliegenden ganzen Winkel halbiren.

	v.		r.		o.
Es sei die Lage der Fläche gegeben:	n	:	m	:	1.
Es bekommt alsdann die A halbirende Fläche die folgenden Ausdrücke:	-1	:	1	:	∞.
Die B halbirende Fläche hat:	∞	:	0	:	∞.
Endlich die C halbirende Fläche:	1	:	∞	:	-1.

Führt man diese Werthe in die Winkelformel mit den directen Werthen ein, so folgt nach den nöthigen Reductionen:

* Vergl. Naumann, Lehrb. d. rein. u. angew. Kryst. 1830, Bd. I, p. 145 und Elemente d. theor. Kryst. 1856, p. 86.

$$\cos {}^1\!/_2 A = \frac{m-n}{\sqrt{2K}}\ ;\ \cos {}^1\!/_2 B = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{2K}}\ ;\ \cos {}^1\!/_2 C = \frac{m(n-1)}{\sqrt{2K}},$$

in welchen Ausdrücken $K = m^2(n^2 + 1) + n^2$ ist.

Aus Vorstehendem ergeben sich aber die Proportionen:

$$\cos {}^1\!/_2 A : \cos {}^1\!/_2 B : \cos {}^1\!/_2 C = m - n : n\sqrt{2} : m(n-1)$$

und es können mittelst derselben, wenn ein Winkel bekannt ist, leicht die beiden anderen berechnet werden. Setzt man die Werthe von $\cos {}^1\!/_2 A$ und $\cos {}^1\!/_2 C$ einander gleich, also $m - n = m(n-1)$, so folgt

$$n = \frac{2m}{m+1}.$$

Wir haben in der Zonenbetrachtung des regulären Systems denselben Werth aus einer einfachen Berücksichtigung der Eigenschaften der Grenzgestalten abgeleitet, zwischen denen die Achtundvierzigflächner der ersten Diagonalzone des Oktaëders liegen; vergl. p. 91.

h. Das Tetraëder $\frac{O}{2}$.

Es ist einzig in seiner Art und bedarf keiner Berechnung. Vorkommenden Falls ist es durch den Neigungswinkel seiner Flächen, die in Kanten unter 70° 31′ 44″ zusammenstossen, zu controliren.

i. Die Trigondodekaëder $\frac{mOm}{2}$.

Die längeren Kanten heissen B′, die kürzeren C′.

α. Gegeben der Winkel in den kürzeren Kanten C′.

Da diese Kante aus dem Holoëder unverändert in die hemiëdrische Gestalt übergeht, so ist die Berechnung des Ableitungscoëfficienten m aus derselben schon bei mOm erbracht. —

β. Gegeben der Winkel in den längeren Kanten B′.

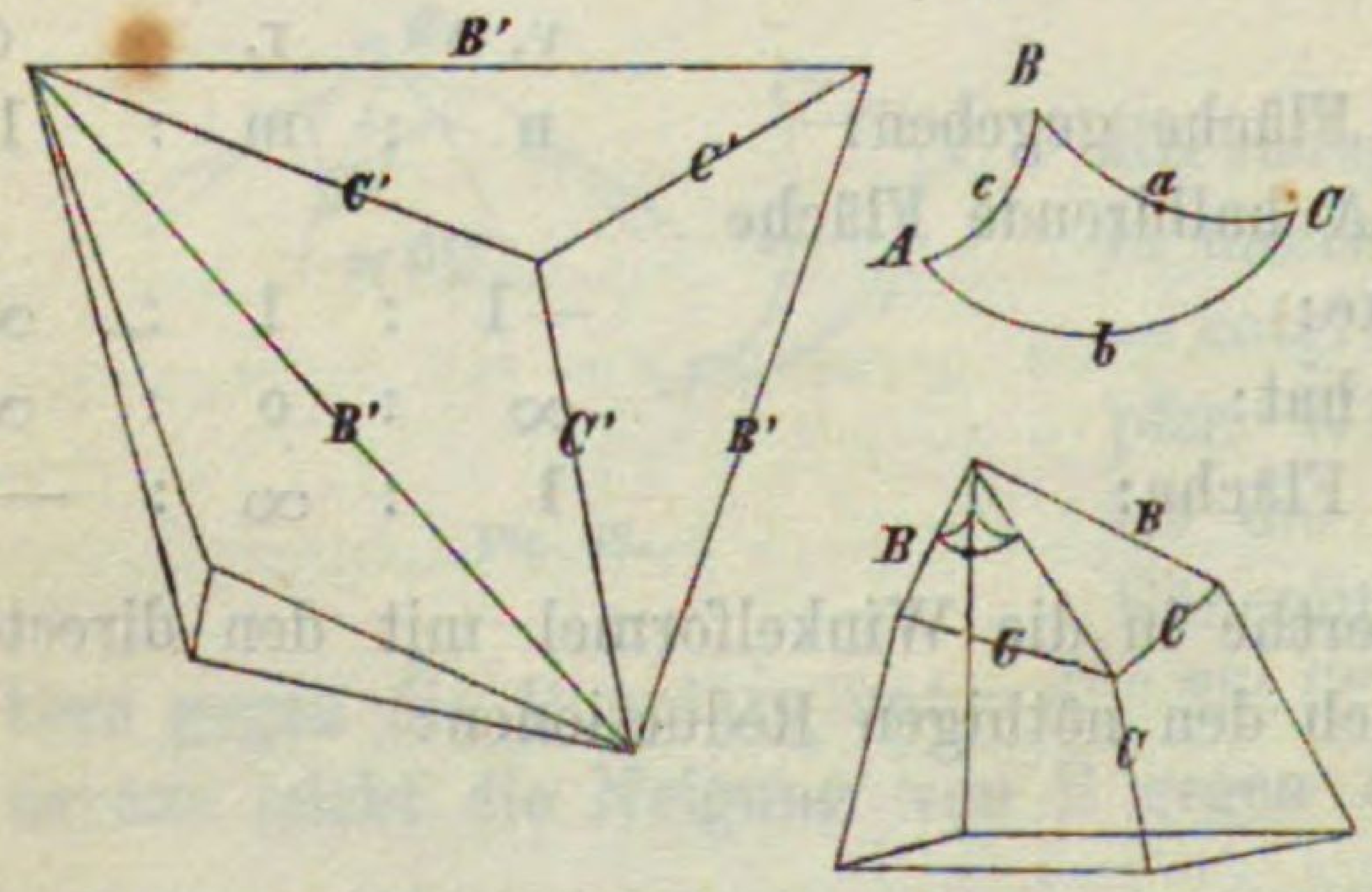


Fig. 43.

Die Hälfte desselben ist die Neigung der Fläche gegen die Hauptaxe, wie man sich durch den Anblick der Fig. 43 überzeugt. In dem beistehenden sphärischen Dreieck ist: B = 45°.
C = 90°.
a = $^1\!/_2$ B′.

Man sucht c, d. h. die Neigung der im Hemiëder

verschwundenen Kante B zur Hauptaxe. Es findet sich tg c = $= \frac{\text{tg a}}{\cos B} = m$.

Beispiel. Sei an einem $\frac{mOm}{2}$ gemessen: B′ = 109° 28′, so ist für das sphärische Dreieck:

B = 45°.
C = 90°.
a = 54° 44′.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg c} = \log.\ \text{tg } 54^0\ 44' &= 0{,}1504784 \\ -\log.\ \cos 45^0 &= 9{,}8494850 - 10 \\ &\quad 0{,}3009934 \\ m &= 1{,}9998 = 2. \end{aligned}$$

Die Gestalt ist $\frac{2O2}{2}$.

k. Die Ikositetraëder und die Trigondodekaëder in Combinationen.

Wir berücksichtigen vorzugsweise die Combinationen beider, d. h. des über einem Octanten liegenden, dreizähligen Flächencomplexes von mOm, mit den vorherrschenden Gestalten ∞O∞, O, ∞O. Die Berechnung des Werthes von m kann in solchen Fällen aus eigenen oder aus Combinationskanten erfolgen. Da wir indessen erstere Berechnungen schon mitgetheilt haben, so beschränken wir uns auf die Berechnungen aus Combinationskanten.

α. Gegeben die Combinationskante H′ zu ∞O∞.

Man hat H′ — 90° gleich der halben Neigung zweier Flächen von $\frac{mOm}{2}$ in den Kanten B′, oder auch gleich der Neigung der Höhenlinie auf einer Fläche von mOm gegen die Hauptaxe. Hiermit ist die Rechnung, wie beim Trigondodekaëder gezeigt, zu beenden.

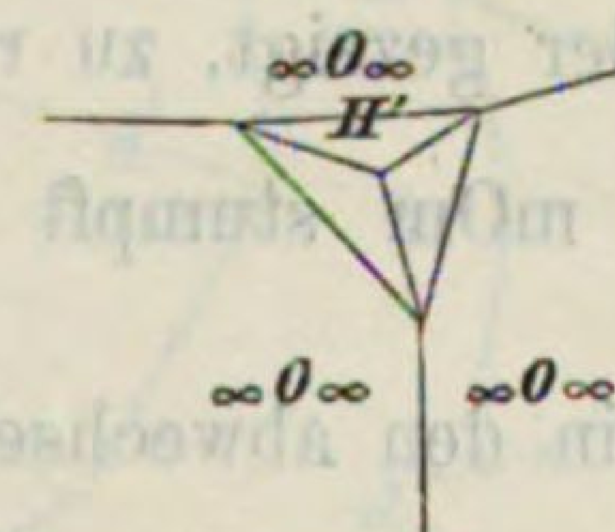


Fig. 44.

β. Gegeben die Combinationskante O′ zu O.

Man weiss, dass die Fläche des Oktaëders zur digonalen Axe unter 54° 44′ 8″ neigt, dem halben Oktaëderwinkel, folglich beträgt die Neigung der Fläche des Oktaëders zur Hauptaxe = 35° 15′ 52″. Hiermit ist aber darzustellen die Neigung der Höhenlinie auf einer Fläche von mOm zu derselben Hauptaxe: $\frac{B'}{2}$ = 35° 15′ 52″ + (180 — O′).

Mit $\frac{B'}{2}$ ist die Rechnung, wie beim Trigondodekaëder gezeigt, weiter zu führen.

γ. Gegeben die Combinationskante D′ zu ∞O.

Da die mOm im Allgemeinen in den Kanten von ∞O liegen, so sind drei Fälle möglich:

αα. mOm nähert sich in seinen Werthen von m der Gestalt ∞O∞; es liegt alsdann mit vier Flächen $\left(\frac{mOm}{2}\right.$ mit zwei Flächen$\left.\right)$ in den oktaëdrischen Ecken von ∞O, die Flächen sind auf die Kanten von ∞O gerade aufgesetzt.

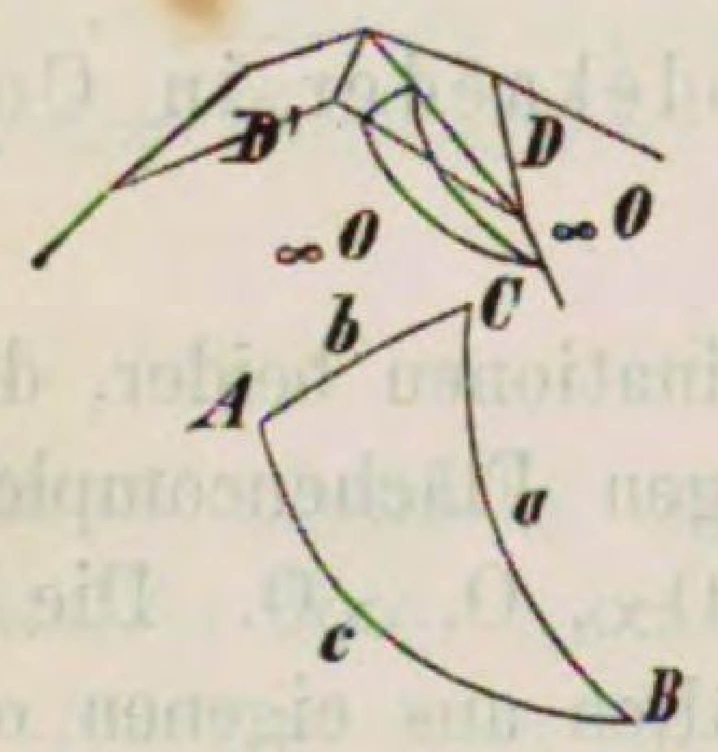


Fig. 45.

Man denke sich die Höhenlinie einer Fläche von mOm gezogen und lege folgendes sphärische Dreieck, Fig. 45:

A = Combinationskante D′.
B = 60°.
C = 90°.

Gesucht ist a, d. h. die Neigung der Höhenlinie der Fläche von mOm gegen die Kante von ∞O. Man findet $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Da nun die Kante von ∞O zur Hauptaxe unter 54° 44′ 8″ neigt, so beträgt die Neigung der Höhenlinie auf der Fläche von mOm zu derselben Axe: $\frac{B'}{2} = 54^0\,44'\,8'' + (180^0 - a)$. Hiermit ist, wie beim Trigondodekaëder gezeigt, zu rechnen.

ββ. mOm stumpft die Kanten von ∞O gerade ab $\left(\frac{mOm}{2}\right.$ die Kanten in den abwechselnden Octanten$\left.\right)$; die Gestalt ist 2O2 und bedarf keiner Berechnung.

γγ. mOm nähert sich in seinen Werthen von m der Einheit, also dem Oktaëder. Am vorherrschenden ∞O liegt mOm dann mit drei Flächen als Zuspitzung in den hexaëdrischen Ecken $\left(\frac{mOm}{2}\right.$ in den abwechselnden hexaëdrischen Ecken$\left.\right)$, die Flächen von mOm sind auf die Kanten von ∞O gerade aufgesetzt.

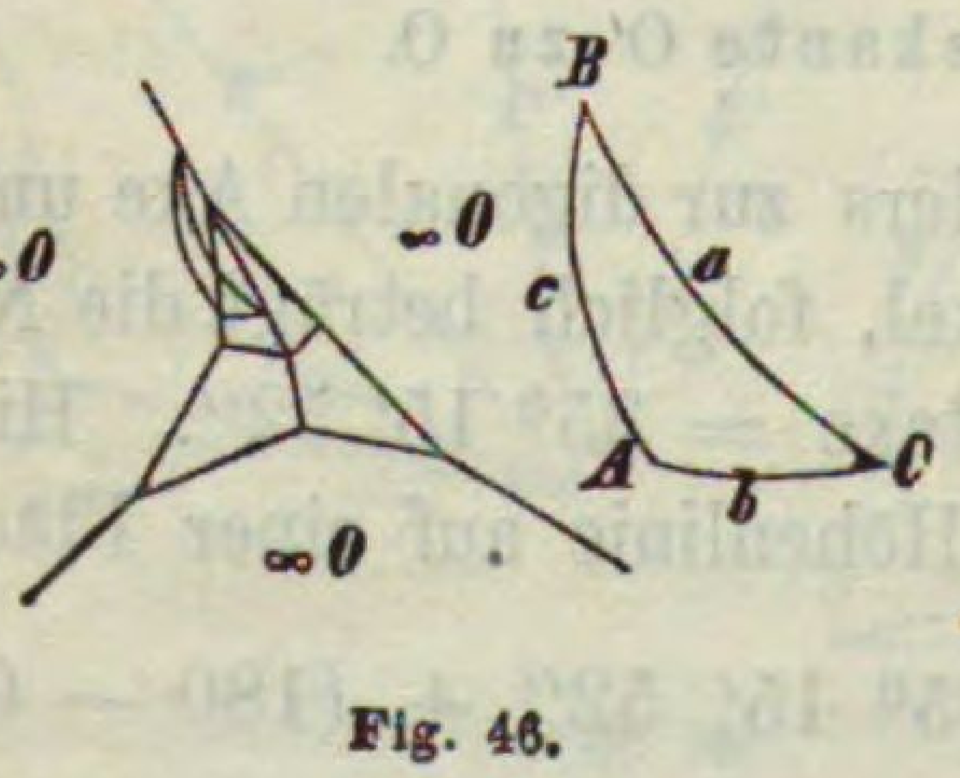


Fig. 46.

Es sei wieder die Höhenlinie einer Fläche gezogen und beifolgendes Dreieck, Fig. 46, gelegt, das: A = Combk. D′.
B = 60°.
C = 90° hat.

Gesucht ist wiederum a; man findet $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$.

Die Neigung der Höhenlinie der Fläche von mOm zur Hauptaxe wird dies Mal, da die Höhenlinie unter der Kante von ∞O liegt, zu $\frac{B'}{2} = 54^0\ 44'\ 8'' - (180^0 - a)$.

1. Die Deltoiddodekaëder $\frac{mO}{2}$.

Die längeren Kanten heissen B′, die kürzeren A′.

α. Gegeben der Winkel der kürzeren Kanten A′.

Dieser Winkel geht aus dem Triakisoktaëder unverändert in das Deltoiddodekaëder über. Die Berechnung des Ableitungscoëfficienten m wurde beim Triakisoktaëder gezeigt.

β. Gegeben der Winkel der längeren Kanten B′.

Zum Zwecke der Rechnung denke man sich, Fig. 47, die hemiëdrische Hälfte der trigonalen Zwischenaxe T′, die in dem Eckpunkt mündet, in welchem die Kanten B′ zusammenstossen, gezogen. Ferner sei auf einem Deltoide die Diagonale D hergestellt, durch welche dasselbe in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird. Alsdann kann man folgendes Dreieck legen:
A = ½B′.
B = 60°.
C = 90°.

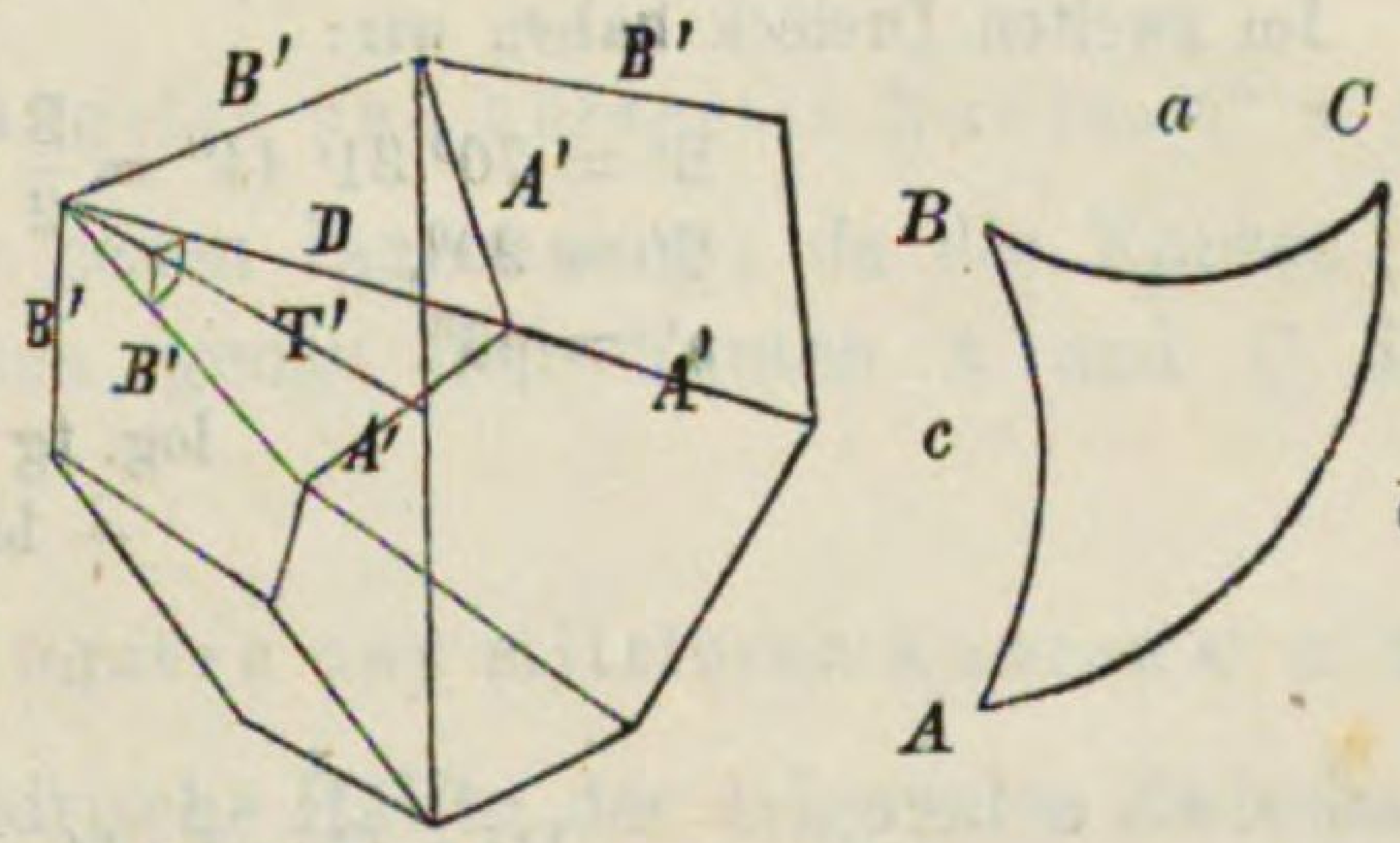


Fig. 47.

Gesucht ist a, das ist die Neigung der Diagonale gegen die hemiëdrische Hälfte der trigonalen Zwischenaxe. Man findet $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. — Denkt man sich nun einen Schnitt gelegt, Fig. 48, durch die hemiëdrische Hälfte der trigonalen Zwischenaxe, T′, im Octanten v.l.o; durch die holoëdrische Hälfte derselben, T, im Octanten v.r.o und schliesslich durch die den Winkel beider halbirende digonale Zwischenaxe, R, so hat in diesem Schnitte die Diagonale D der Fläche

von $\frac{mO}{2}$ zu den Axen eine Lage, die aus der Figur 48, wie folgt, ermittelt werden kann. Da T′ zu R und T zu R je unter 35° 15′ 52″ geneigt sind, T′ zu D unter dem Winkel a, den wir soeben berechneten, steht, so ist n, die Neigung von D zu R = 35° 15′ 52″ + a. Damit ist aber $\frac{B}{2}$ der Gestalt mO dargestellt, womit die Rechnung, wie dort, geführt wird. Es ist schliesslich $\text{tg}\, b' = \sin a' . \text{tg}\, B' = m$, worin $a' = 45°$ und $B' = \frac{B}{2}$ bedeuten.

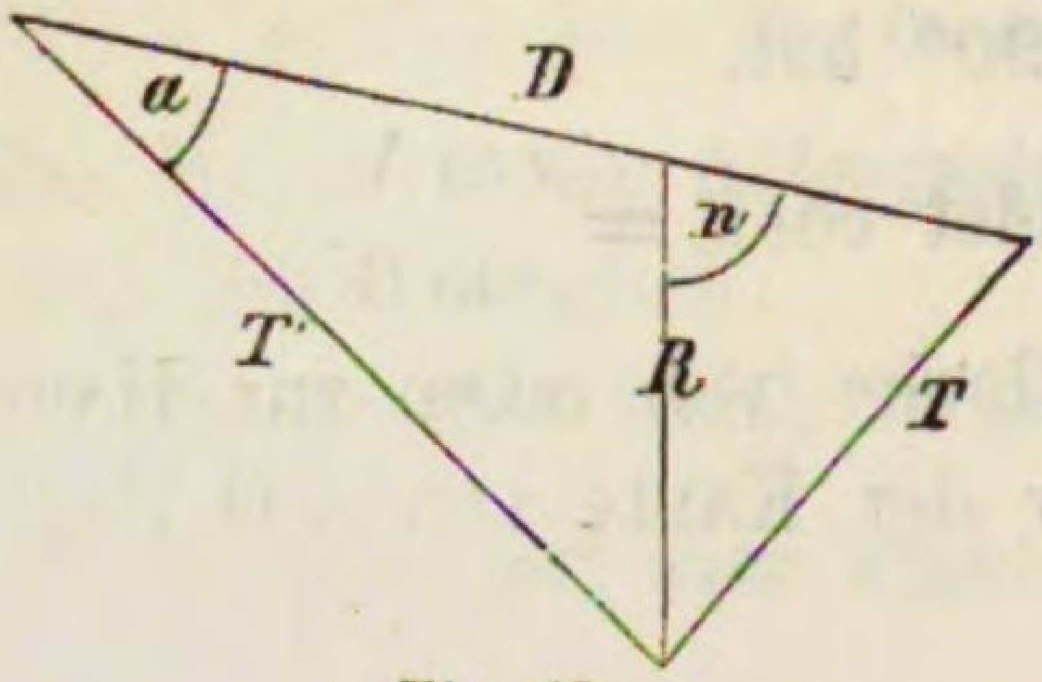


Fig. 48.

Beispiel. Gemessen sei an einem $\frac{mO}{2}$: B′ = 90°.

Alsdann ist im ersten sphärischen Dreieck:

$$A = 45° = \tfrac{1}{2} B'.$$
$$B = 60°.$$
$$C = 90°.$$

$$\begin{aligned} \log.\cos a = \log.\cos 45° &= 9{,}8494850 - 10 \\ -\log.\sin 60° &= 9{,}9375306 - 10 \\ \hline &\ 9{,}9119544 - 10 \\ a &= 35°\ 15'\ 52''. \end{aligned}$$

$$n = 35°\ 15'\ 52'' + 35°\ 15'\ 52'' = 70°\ 31'\ 44''.$$

Im zweiten Dreieck haben wir:

$$B' = 70°\ 31'\ 44'' = \frac{B}{2} \text{ von } mO.$$
$$C' = 90°.$$
$$a' = 45°.$$

$$\begin{aligned} \log.\text{tg}\, b' = \log.\sin 45° &= 9{,}8494850 - 10 \\ + \log.\text{tg}\, 70°\ 31'\ 44'' &= 0{,}4515476 \\ \hline &\ 0{,}3010326 \\ \text{num. } m &= 2. \end{aligned}$$

Die Gestalt ist $\frac{2O}{2}$.

m. Die Triakisoktaëder und die Deltoiddodekaëder in Combinationen.

a. Gegeben die Combinationskante H′ zu ∞O∞.

Man bilde durch 180° — H′ die Neigungen der Fläche zu den Coordinatebenen und lege ein Dreieck, Fig. 49, das:

$$A = B = 180° - H'.$$
$$C = 90° \text{ enthält.}$$

Man findet $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$ und hat $\operatorname{cotg} b = m$.

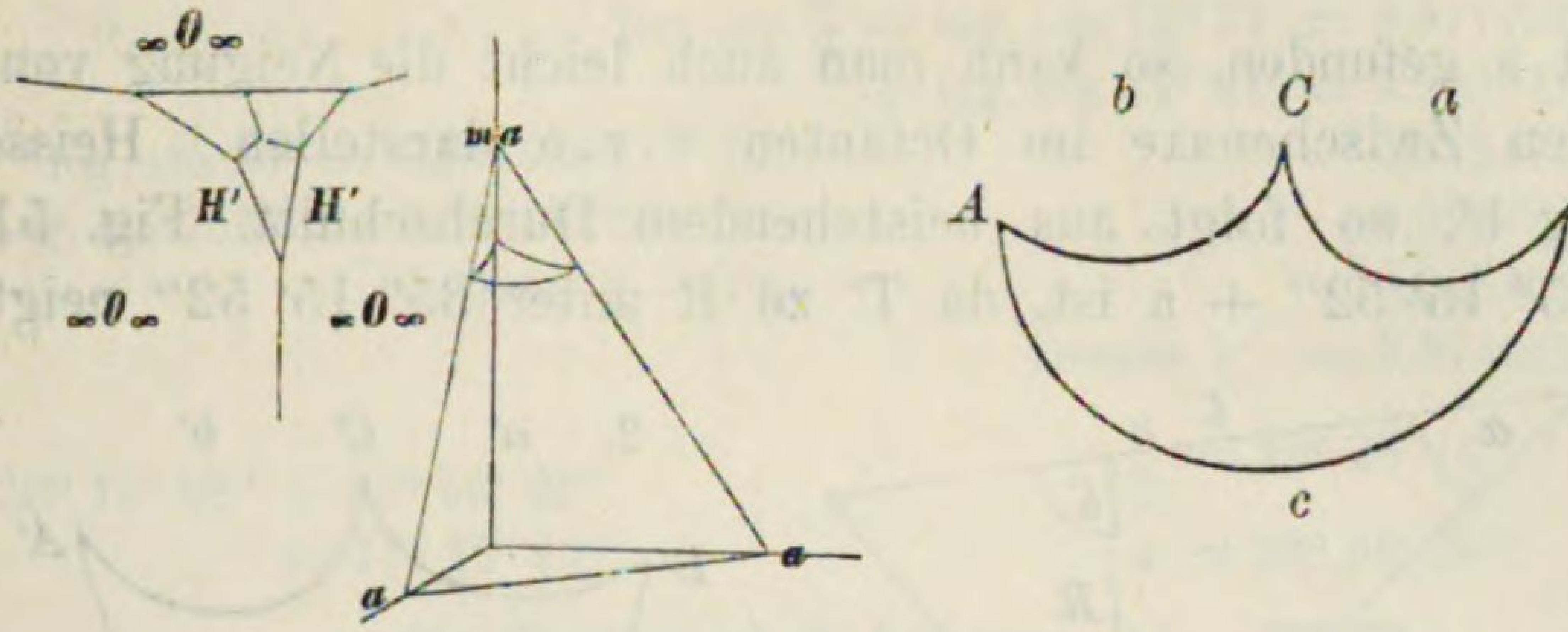


Fig. 49.

β. Gegeben die Combinationskante O' zu O.

Der halbe Winkel B des Triakisoktaëders ist $= 54^0 44' 8'' + (180 - O')$ und mit demselben ist die Rechnung, wie dort gezeigt, zu führen.

γ. Gegeben die Combinationskante D' zu ∞O.

$\frac{B}{2}$ des Triakisoktaëders ist $D' - 90^0$ und damit ist, wie oben, zu rechnen.

n. Die Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$.

Die längsten Kanten heissen C', die mittleren B', die kürzesten A'.

α. Gegeben die Winkel der längsten und kürzesten Kanten C' u. A'.

Dieser Fall bedarf keiner neuen Berechnung, da die Kanten A' und C' in ihren Winkelwerthen genau den Kanten A und C des Holoëders entsprechen.

β. Gegeben die Winkel der längsten und mittleren Kanten C' u. B'.

Man denke sich die hemiëdrische Hälfte der trigonalen Zwischenaxe $rm = T'$, Fig. 50, gezogen und lege ein Dreieck 1. an mit:

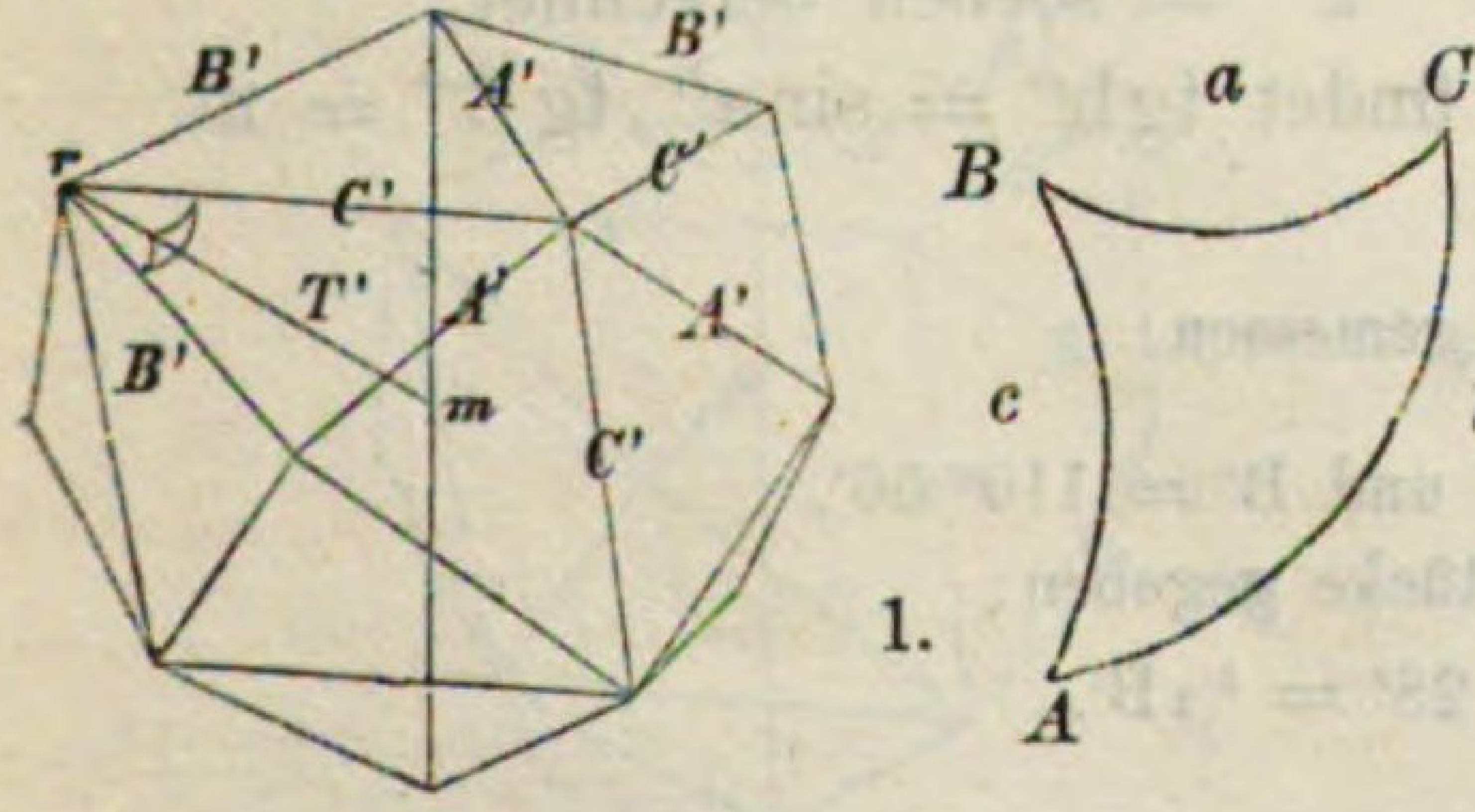


Fig. 50.

$A = {}^1/_2 B'$.
$B = 60^0$.
$C = {}^1/_2 C'$.

In diesem Dreieck wird a gesucht, die Neigung der Kante C' zur trigonalen Zwischenaxe T'. Es ist:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1/_2(A+B-C)\,.\,\cos{}^1/_2(A+C-B)}{\sin B\,.\,\sin C}}.$$

Ist a gefunden, so kann man auch leicht die Neigung von C′ zur digonalen Zwischenaxe im Octanten v.r.o darstellen. Heisse diese Neigung b′, so folgt aus beistehendem Durchschnitt, Fig. 51, dass b′ = 35° 15′ 52″ + a ist, da T′ zu R unter 35° 15′ 52″ neigt. —

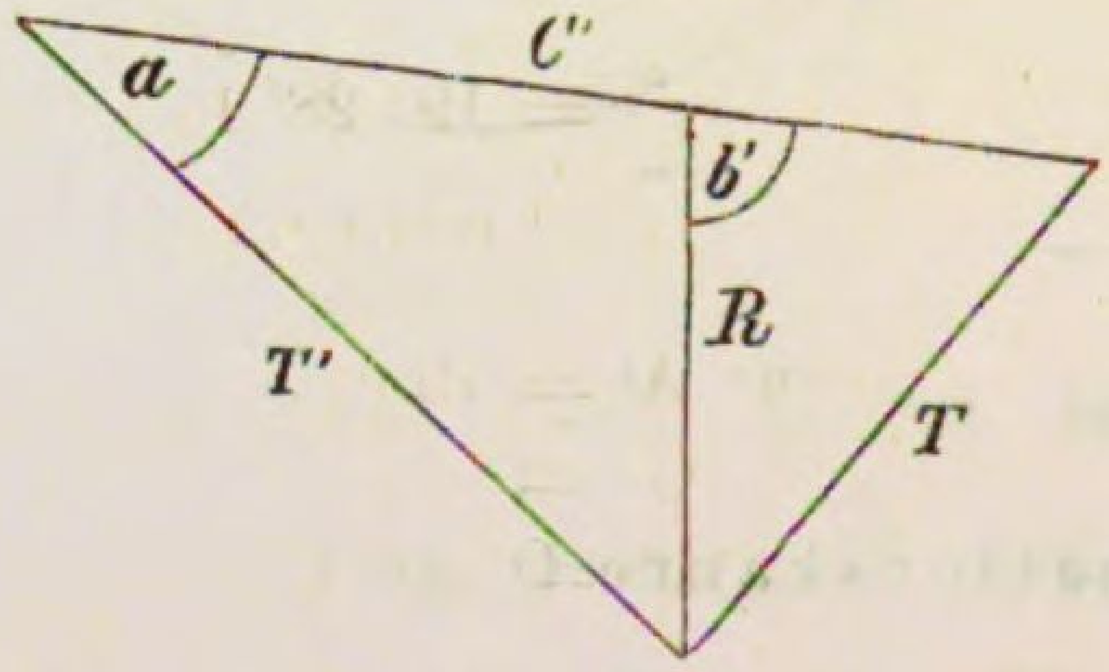


Fig. 51.

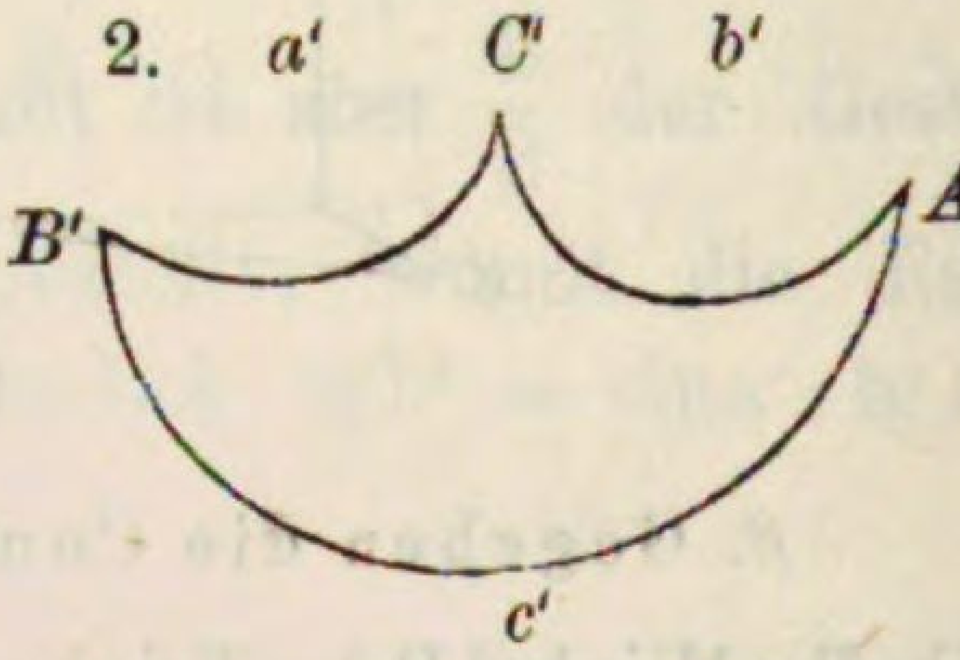


Fig. 52.

Hiermit kann aber ein sphärisches Dreieck 2. gelegt werden, das dieselbe Position hat, wie Dreieck 2. beim Hexakisoktaëder unter γ, Fig. 38.

In diesem Dreieck, Fig. 52, ist: A′ = ½ C′.
C′ = 90°.
b′ = soeben berechnet.

Man findet cos B′ = sin A′ . cos b′ ; 2B′ = B von mOn;
ferner ist tg a′ = sin b′ . tg A′.

Nennt man nun a″ die Neigung der Kante B des mOn gegen die Hauptaxe, so ist a″ = 180° — (45° + a′) und tg a″ = n.

Zur Ermittelung von m ist ein drittes Dreieck 3., Fig. 53, zu legen, ähnlich dem Dreieck 3. beim Hexakisoktaëder unter γ, Fig. 39, oder dem Dreieck 2. beim Hexakisoktaëder unter α, Fig. 34, was folgende Stücke hat:

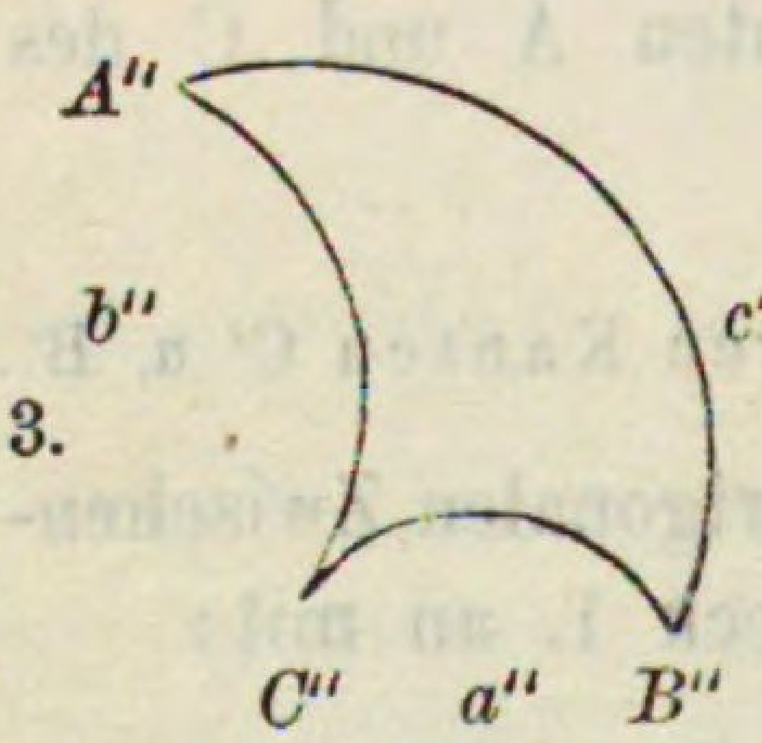


Fig. 53.

B″ = ½ B von mOn.
C″ = 90°.
a″ = soeben berechnet.

Man findet tg b″ = sin a″ . tg B″ = m.

Beispiel. An einem $\frac{mOn}{2}$ seien gemessen:

C′ = 158° 12′ und B′ = 110° 56′,

so sind für das Dreieck 1. folgende Stücke gegeben:

A = 55° 28′ = ½ B′.
B = 60°.
C = 79° 6′ = ½ C′.

$$\frac{A+B-C}{2} = 18^0\ 11' \quad ; \quad \frac{A+C-B}{2} = 37^0\ 17'.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 18^0\ 11' = 9{,}9777523 - 10$$
$$+ \log.\cos 37^0\ 17' = 9.9007219 - 10$$
$$\overline{9{,}8784742 - 10}$$

$$\log.\sin 60^0 = 9{,}9375306 - 10$$
$$+ \log.\sin 79^0\ 6' = 9{,}9920932 - 10$$
$$\overline{9{,}9296238 - 10}$$

$$9{,}9296238 - 10$$
$$\overline{19{,}9488504 - 20.}$$

Daraus $\sqrt{\ } = 9{,}9744252 - 10$

$$\frac{a}{2} = 19^0\ 28'\ 14''.$$
$$a = 38^0\ 56'\ 28''.$$

$$b' = 35^0\ 15'\ 52'' + 38^0\ 56'\ 28''$$
$$= 74^0\ 12'\ 20''.$$

Für das Dreieck 2. hat man: $A' = 79^0\ 6'$.
$C' = 90^0$.
$b' = 74^0\ 12'\ 20''$.

$$\log.\cos B' = \log.\sin 79^0\ 6' = 9{,}9920932 - 10$$
$$+ \log.\cos 74^0\ 12'\ 20'' = 9{,}4348673 - 10$$
$$\overline{9{,}4269605 - 10}$$
$$B' = 74^0\ 29'\ 52''.$$

$$\log.\,\mathrm{tg}\,a' = \log.\sin 74^0\ 12'\ 20'' = 9{,}9832854 - 10$$
$$+ \log.\,\mathrm{tg}\ 79^0\ 6' = 0{,}7154122$$
$$\overline{0{,}6986976}$$
$$a' = 78^0\ 40'\ 59''.$$

$$a'' = 180^0 - (45^0 + 78^0\ 40'\ 59'') = 56^0\ 19'\ 1''.$$
$$\log.\,\mathrm{tg}\ 56^0\ 19'\ 1'' = 0{,}1762065 \qquad \text{num. } n = 1{,}5004.$$
$$= {}^3/_2.$$

Im dritten Dreieck ist: $B'' = 74^0\ 29'\ 52''$.
$C'' = 90^0$.
$a'' = 56^0\ 19'\ 1''$.

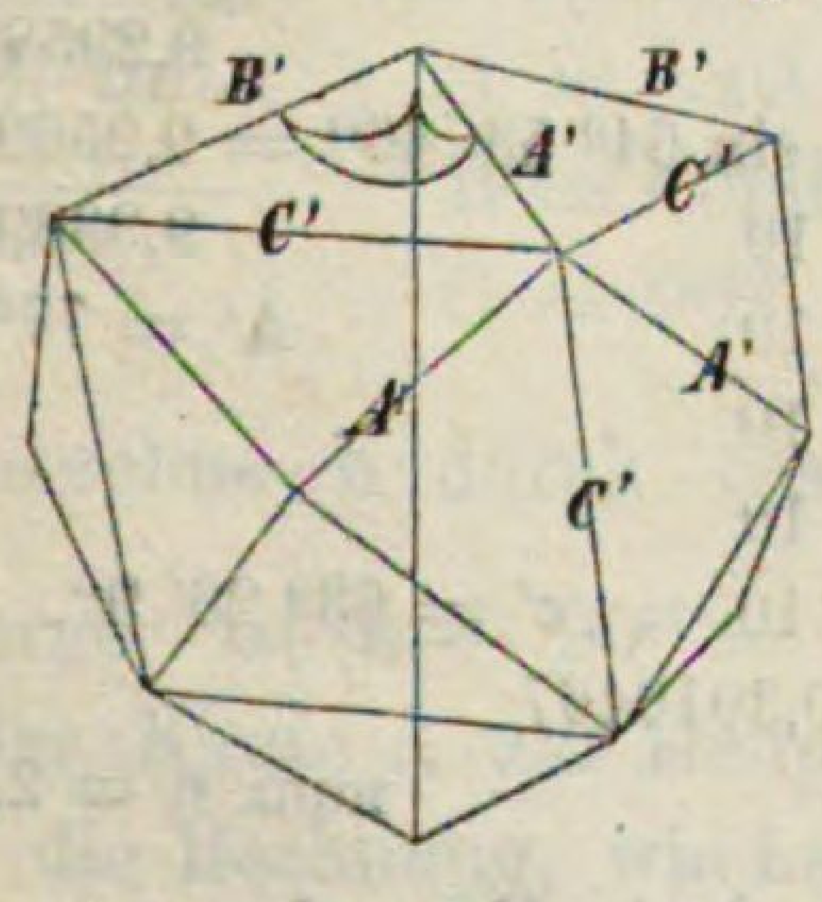
$$\log.\,\mathrm{tg}\,b'' = \log.\sin 56^0\ 19'\ 1'' = 9{,}9201850 - 10$$
$$+ \log.\,\mathrm{tg}\ 74^0\ 29'\ 52'' = 0{,}5569463$$
$$\overline{0{,}4771313}$$
num. m = 3.

Die Gestalt ist $\frac{3O^3/_2}{2}$.

γ. Gegeben die Winkel der kürzesten und mittleren Kanten A′ u. B′.

Man lege ein sphärisches Dreieck 1., Fig. 54, mit:

$A = {}^1/_2 A'$.
$B = {}^1/_2 B'$.
$C = 90^0$.



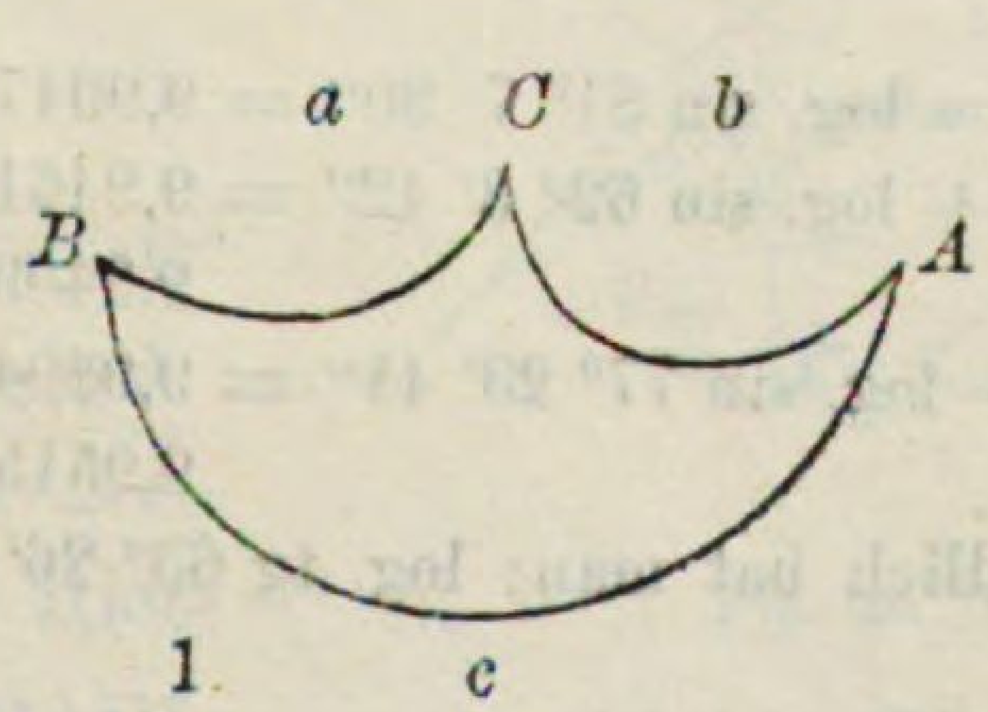


Fig. 54.

Gesucht ist b, d. h. die Neigung der Kante A′ zur Hauptaxe. Man findet $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$. Nun ist die Aufgabe, die Neigung der Kante

2.

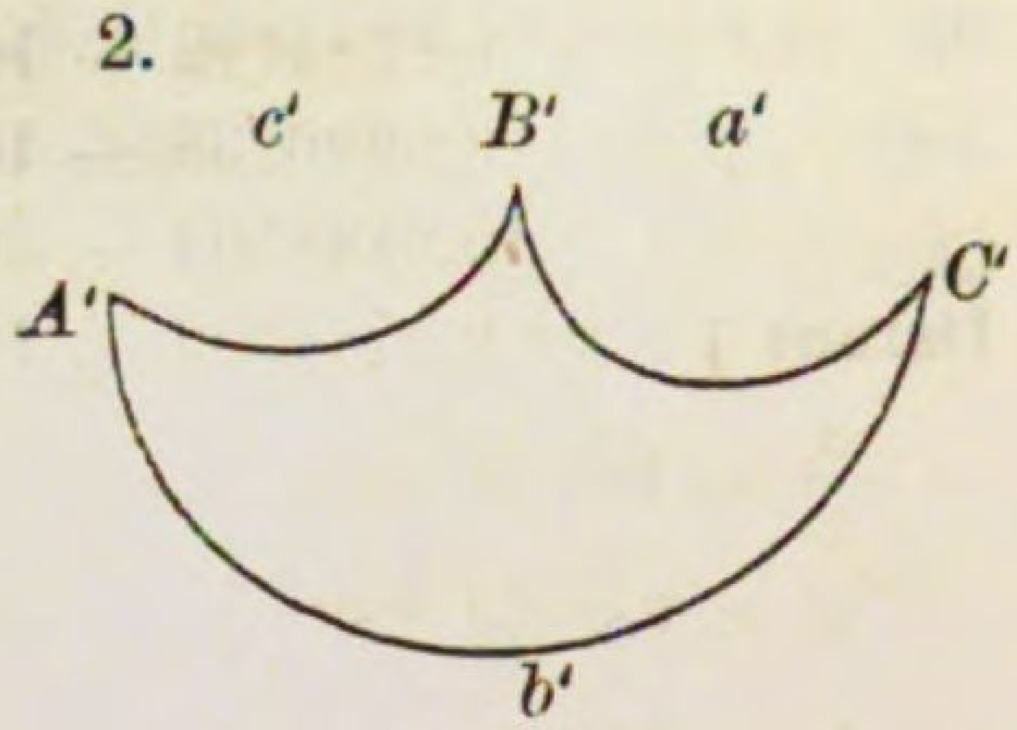


Fig. 55.

B des Holoëders zur Hauptaxe darzustellen. Das dazu erforderliche sphärische Dreieck 2., Fig. 55, enthält: $B' = 45^0$.

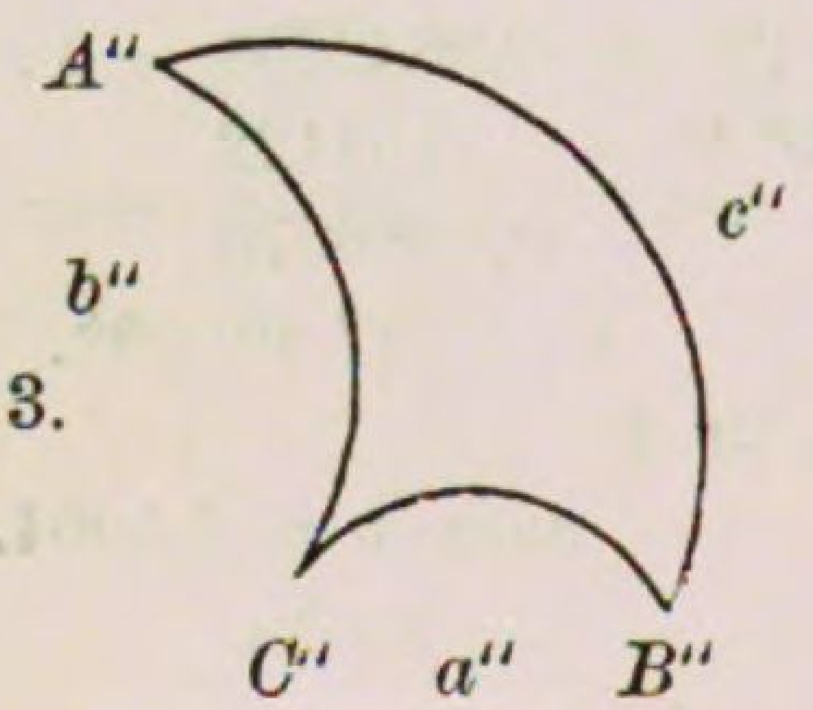
$C' = \frac{1}{2} A'$.

$a' = b$ aus voriger Rechnung.

$$\text{Man findet } \cos A' = \frac{\cos B' . \sin (C' - \varphi)}{\sin \varphi}$$

mit $\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} B' . \cos a'$.

Ferner ist $\sin c' = \frac{\sin C' . \sin a'}{\sin A'}$ und $\operatorname{tg} c' = n$.



3.

Fig. 56.

Zur Bestimmung von m ist schliesslich ein rechtwinkeliges Dreieck 3., Fig. 56, zu legen mit: $B'' = \frac{1}{2} B$ von mOn.

$C'' = 90^0$.

$a'' = c'$ aus voriger Rechnung.

In demselben ist $\operatorname{tg} b'' = \sin a'' . \operatorname{tg} B'' = m$.

Beispiel. Gemessen seien an einem $\frac{mOn}{2}$: $A' = 162^0\ 15'$.
$B' = 124^0\ 51'$.

Für das erste Dreieck ist alsdann: $A = 81^0\ 7'\ 30''$.
$B = 62^0\ 25'\ 30''$.
$C = 90^0$.

log. cos b = log. cos 62° 25′ 30″ = 9,6654959 — 10
— log. sin 81° 7′ 30″ = 9,9947689 — 10
9,6707270 — 10
b = 62° 3′ 42″.

Für das zweite Dreieck ist: $B' = 45^0$.
$C' = 81^0\ 7'\ 30''$.
$a' = 62^0\ 3'\ 42''$.

* log. cotg φ = log. cos 62° 3′ 42″ = 9,6707270 — 10
φ = 64° 53′ 46″.

log. cos A′ = log. cos 45° = 9,8494850 — 10
+ log. sin 16° 13′ 44″ = 9,4463434 — 10
9,2958284 — 10
— log. sin 64° 53′ 46″ = 9,9569076 — 10
9,3389208 — 10
A′ = 77° 23′ 41″.

Ferner ist:
log. sin c′ = log. sin 81° 7′ 30″ = 9,9947689 — 10
+ log. sin 62° 3′ 42″ = 9,9461831 — 10
9,9409520 — 10
— log. sin 77° 23′ 41″ = 9,9894039 — 10
9,9515481 — 10 ; c′ = 63° 26′ 9″.

Endlich hat man: log. tg 63° 26′ 9″ = 0,3010467
num. n = 2.

* Die Bestimmung von φ vereinfacht sich, da tg 45° = 1.

Im dritten sphärischen Dreieck ist: $B'' = 77^0\ 23'\ 41''$.
$C'' = 90^0$.
$a'' = 63^0\ 26'\ 9''$.

$$\begin{aligned} \log.\ tg\ b'' &= \log.\ \sin 63^0\ 26'\ 9'' = 9{,}9515481 - 10 \\ &+ \log.\ tg\ 77^0\ 23'\ 41'' = 0{,}6504832 \\ &\qquad 0{,}6020313 \end{aligned}$$

num. m = 3,9997 = 4.

Die Gestalt ist $\frac{4O2}{2}$.

o. Die Hexakisoktaëder und die Hexakistetraëder in Combinationen.

α. Gegeben eine der eigenthümlichen Kanten A oder C und eine Combinationskante H′ zu ∞O∞.

αα. Gegeben C und H′.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 57, mit:

A = Combk. H′.
B = 45⁰.
C = ½ C.

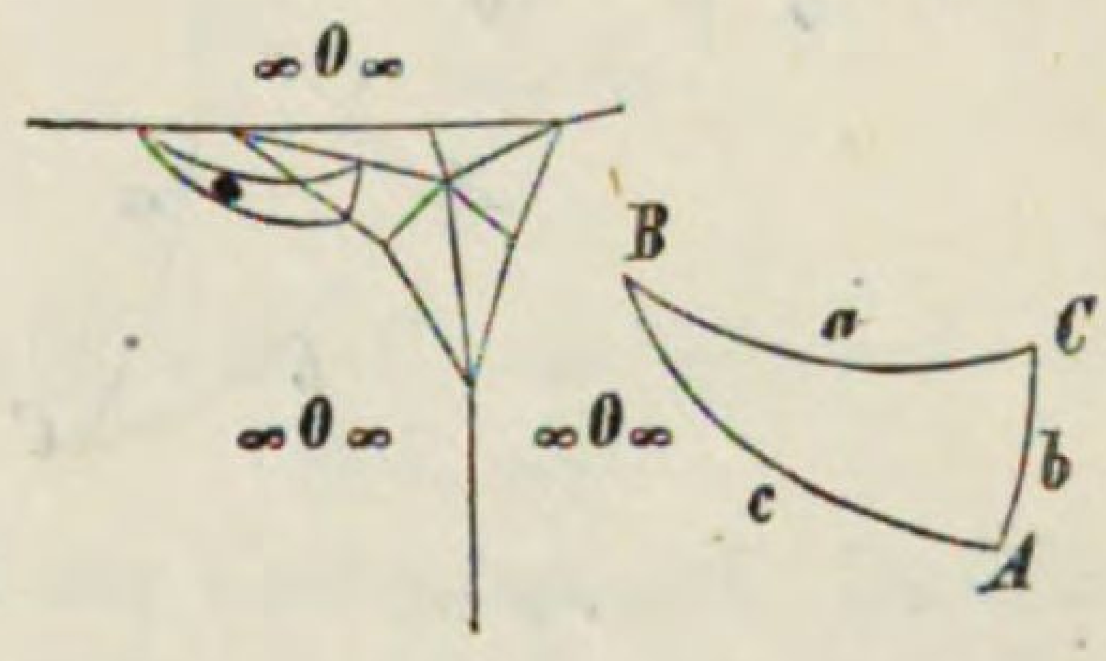


Fig. 57.

In diesem Dreieck sucht man a, die Neigung von C zur Kante von ∞O∞. Man hat:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \cdot \sin C}}.$$

Da die Kante von ∞O∞ gegen die digonale Axe unter 90^0 geneigt ist, so beträgt die Neigung von C zur digonalen Axe $= b' = a - 90^0$.

Mit b′ und dem halben Winkel C ist die Rechnung, wie beim Hexakisoktaëder unter γ gezeigt, von Dreieck 2. an weiter zu führen und zu beenden.

ββ. Gegeben A und H′.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 58, mit: A = ½ A.
B = Combk. H′.
C = 90⁰.

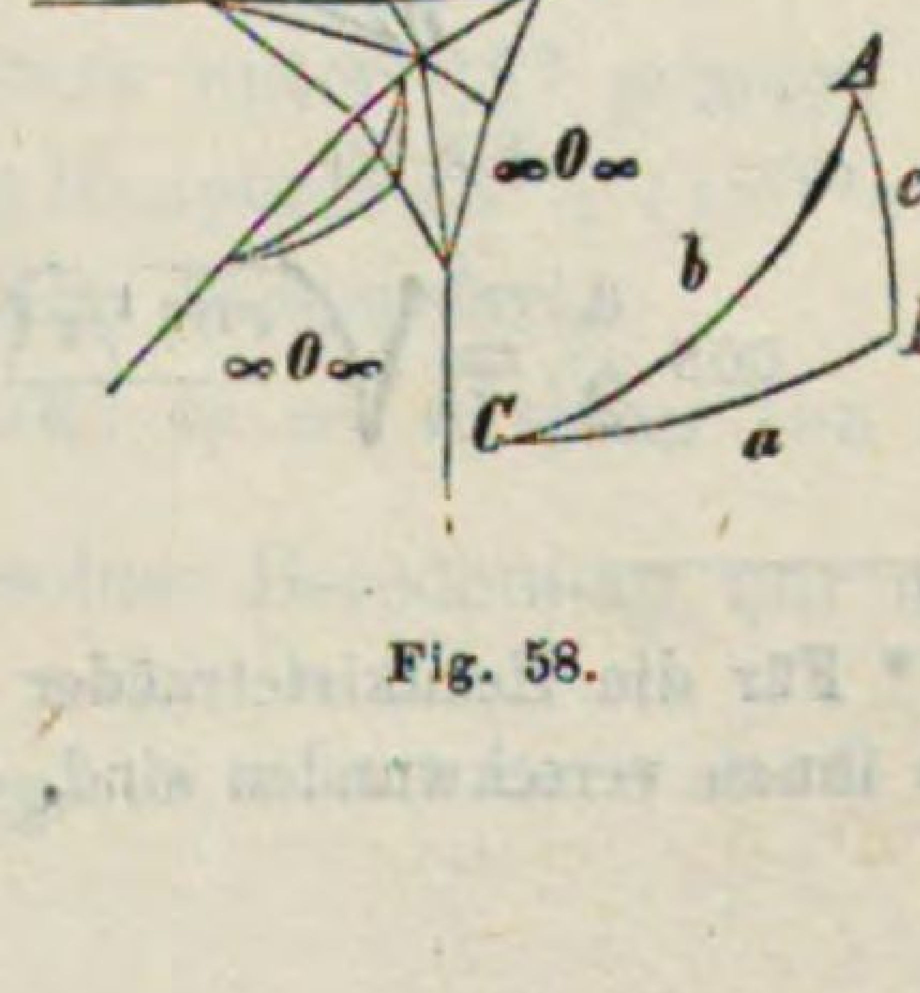


Fig. 58.

und berechne b durch $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$.

Ferner ist $b - 90^0 = c'$ die Neigung der Kante A zur Hauptaxe. Hiermit ist die Rechnung, wie beim Hexakis-

oktaëder unter β gezeigt, zu führen und in dem ersten Dreieck dieser Berechnung mit den jetzt bekannten Elementen: $^1/_2$ A = A.

c′ = c.

45° = B die

Stücke a und c zu suchen, von denen man a durch folgende Formel findet:

$$\cotg a = \frac{\cotg c \,.\, \sin(B + \varphi)}{\sin\varphi},$$

mit $\operatorname{tg}\varphi = \cos c \,.\, \operatorname{tg} A$.

β. Gegeben eine der eigenthümlichen Kanten A oder B und die Combinationskante O′ zu O.*

αα. Gegeben A und O′.

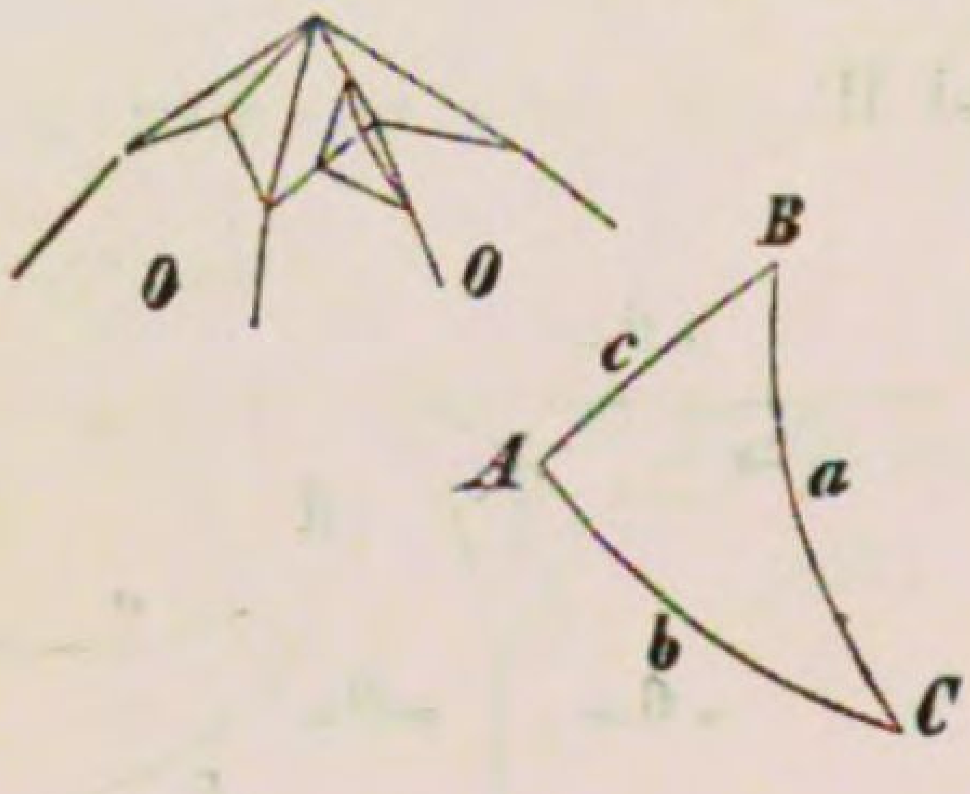


Fig. 59.

Man berechne, Fig. 59, die Neigung von A zur Höhenlinie auf O durch ein Dreieck, was:

A = Combk. O′.

B = $^1/_2$A.

C = 90° enthält.

In diesem Dreieck ist a gesucht und gefunden durch $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$.

Man findet ferner, da die Höhenlinie von O zur Hauptaxe unter 35° 15′ 52″ neigt, die Neigung der Kante A von mOn zu derselben Hauptaxe = c′ = 35° 15′ 52″ + (180 — a). Mit dieser Neigung und der Kenntniss der Kante A ist die Rechnung, wie im vorigen Beispiel, fortzuführen.

ββ. Gegeben B und O′.

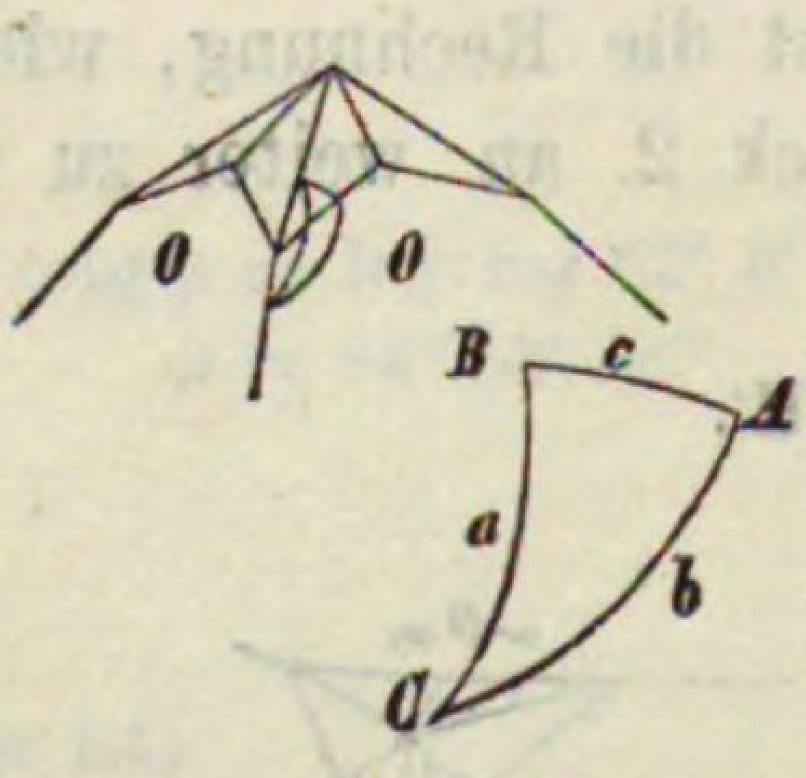


Fig. 60.

Man lege, Fig. 60, ein sphärisches Dreieck mit:

A = Combk. O′.

B = $^1/_2$B.

C = 54° 44′ 8″

und berechne a durch:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1/_2(A + B - C) \,.\, \cos{}^1/_2(A + C - B)}{\sin B \,.\, \sin C}}.$$

* Für die Hexakistetraëder kommen nur A und O′ in Betracht, da die Kanten B in ihnen verschwunden sind.

Dieser Winkel ist die Neigung der Kante von O zur Kante B von mOn. Da nun die Kante von O zur Hauptaxe unter 45^0 neigt, so beträgt die Neigung der Kante B zu derselben Hauptaxe $= a' = 45^0 + (180^0 - a)$. Hiermit ist die Rechnung, wie beim Hexakisoktaëder unter α gezeigt, zu beenden.

γ. Gegeben eine der eigenthümlichen Kanten A, B oder C und die Combinationskante D' zu ∞O *.

$\alpha\alpha$. mOn liegt in den oktaëdrischen Ecken, dieselben mit je acht Flächen zuschärfend. Es kommen in Betracht die Kanten A, B und D'.

1. Gegeben A und D'.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 61, mit:

$A =$ Combk. D'.
$B = \frac{1}{2} A$.
$C = 60^0$.

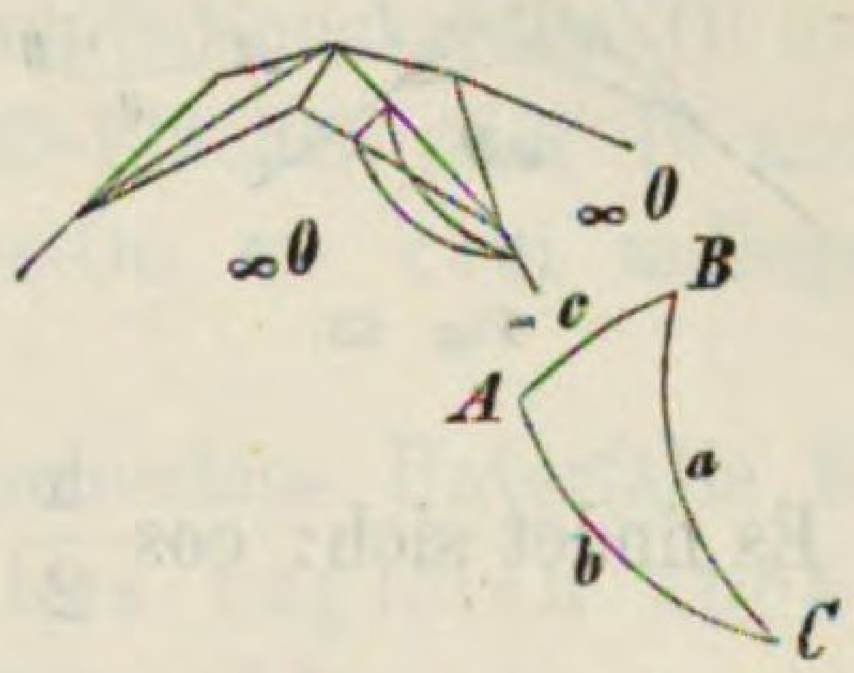


Fig. 61.

Es findet sich darin: $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \cdot \sin C}}$

und man hat in a die Neigung der Kante A zur Kante von ∞O. Da diese zur Hauptaxe jedoch unter $54^0\,44'\,8''$ neigt, so ist A zu derselben Hauptaxe unter dem Winkel $54^0\,44'\,8'' + (180^0 - a)$ geneigt. Hiermit ist die Rechnung, wie bereits mehrfach gezeigt, fortzuführen und zu beenden.

2. Gegeben B und D'.

Es ist ein sphärisches Dreieck, Fig. 62, zu legen, das: $A =$ Combk. D'.
$B = \frac{1}{2} B$.
$C = 90^0$ enthält.

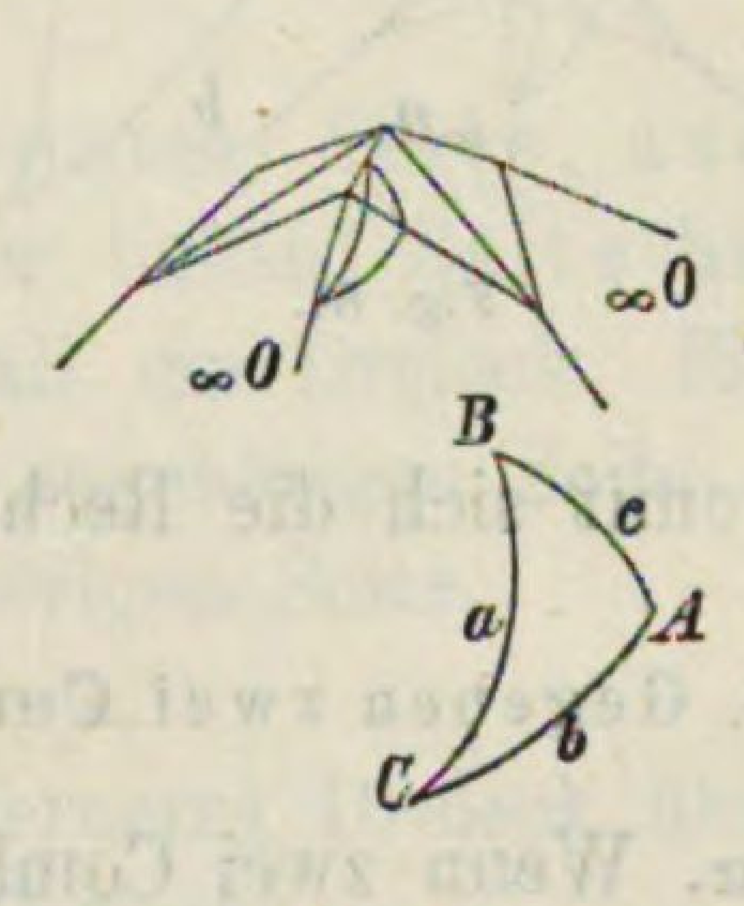


Fig. 62.

Man sucht a, d. h. die Neigung der Kante B zur Höhenlinie auf der Fläche von ∞O; es findet sich $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Da nun die Höhenlinie auf der Fläche von ∞O zur Hauptaxe unter 45^0 geneigt ist, so beträgt die Neigung der Kante B zu derselben Hauptaxe $45^0 + (180^0 - a)$. Hiermit führt man die Rechnung in bekannter Weise fort.

$\beta\beta$. mOn schärft die Kanten von ∞O zu; es ist alsdann von der allgemeinen Form $mO\frac{m}{m-1}$, erfordert zu seiner Berechnung nur eine

* Bei den Hexakistetraëdern fällt B wieder weg.

Winkelmessung, da die Neigung der Kante A zur Hauptaxe durch das Zonenverhältniss gegeben ist, wie wir früher schon sahen. Auch ist nur m oder n zu berechnen, da aus dem einen Coëfficienten der andere leicht folgt.

$\gamma\gamma$. mOn liegt in den hexaëdrischen Ecken, dieselben mit je sechs Flächen zuschärfend. Es kommen in Betracht die Kanten A, C und D′.

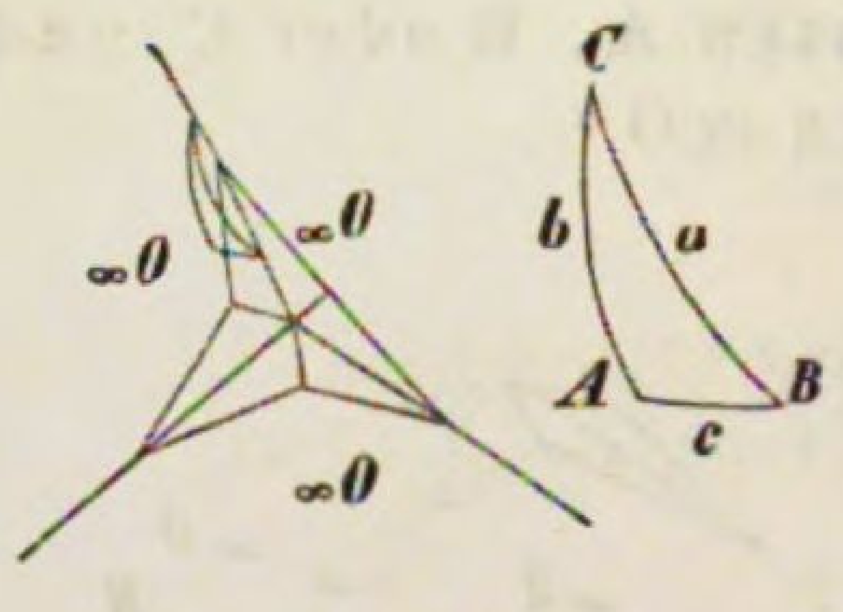


Fig. 63.

1. Gegeben A und D′.

Man lege ein Dreieck, Fig. 63, mit:

$A = $ Combk. D′.

$B = {}^1/_2 A.$

$C = 60^0.$

Es findet sich: $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2(A + B - C) \,.\, \cos {}^1/_2(A + C - B)}{\sin B \,.\, \sin C}}$

und man hat in a die Neigung der Kante A zur Kante von ∞O. Da nun letztere gegen die Hauptaxe unter $54^0\ 44'\ 8''$ geneigt ist; dies Mal aber A unter der Kante von ∞O liegt, so neigt A zu derselben Hauptaxe unter $54^0\ 44'\ 8'' - (180^0 - a)$. Hiermit ist in bekannter Weise weiter zu rechnen.

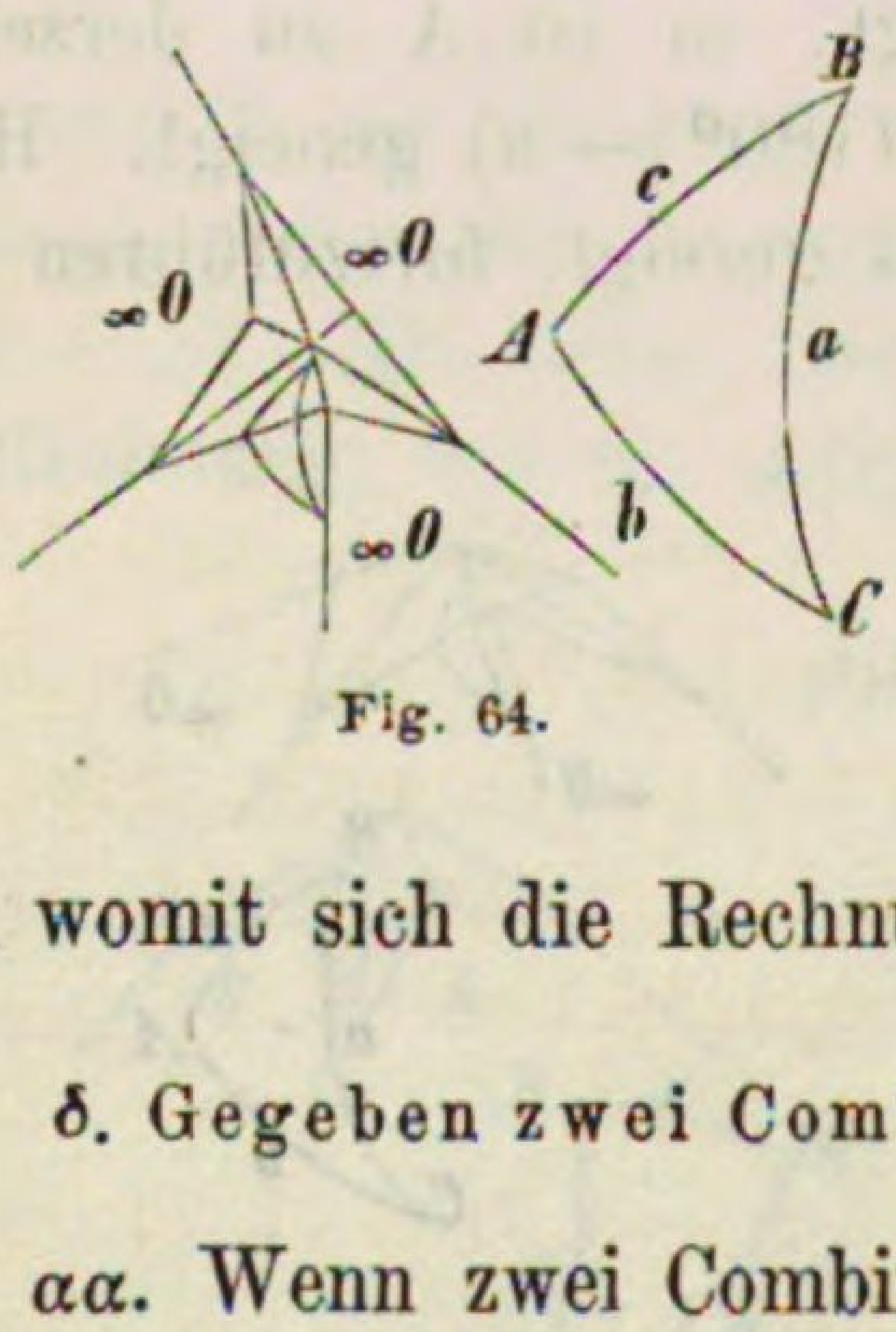


Fig. 64.

2. Gegeben C und D′.

Man lege, Fig. 64, ein Dreieck mit:

$A = $ Combk. D′.

$B = {}^1/_2 C.$

$C = 90^0.$

Alsdann ist $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Bildet man nun noch $a - 90^0$, so hat man darin die Neigung von C zur digonalen Zwischenaxe, womit sich die Rechnung in bekannter Weise erledigt. —

δ. Gegeben zwei Combinationskanten zu ∞O∞, O oder ∞O.

$\alpha\alpha$. Wenn zwei Combinationskanten H′ und H″ zu ∞O∞ gegeben sind, d. h. von einer mOn-Fläche zu zwei Würfelflächen gemessen ist, so bilde man, durch Subtraction dieser Winkel von 180^0, die Neigungen der Fläche zu den Coordinatebenen. Alsdann hat man ein sphärisches Dreieck, Fig. 65, mit:

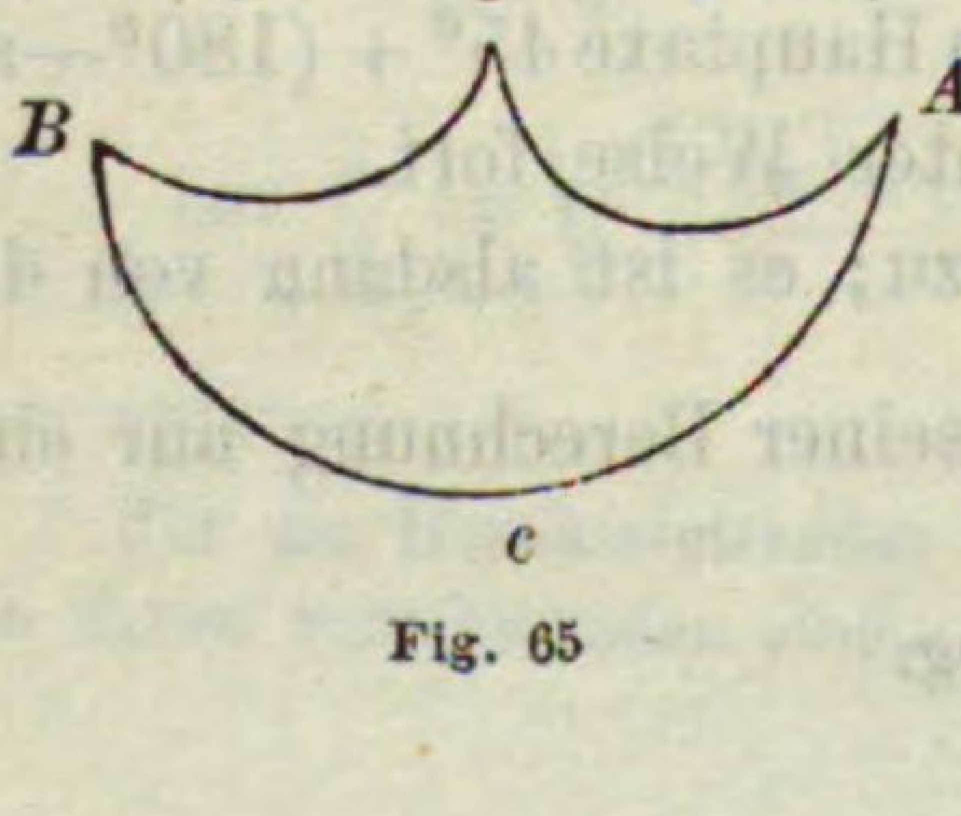


Fig. 65

$A = 180^0 - H'.$

$B = 180^0 - H''.$

$C = 90^0.$

In diesem Dreieck sind die Seiten a und b zu berechnen. Dieselben können verschiedene Werthe haben:

Entweder beide Seiten sind grösser als 45°, alsdann ist die Tangente der grösseren m, die der kleineren n;

oder eine Seite ist grösser, die andere kleiner als 45°, alsdann ist die Tangente der grösseren $^m/_n$, die der kleineren $^1/_n$;

oder endlich beide Seiten sind kleiner als 45°; es ist dann die Tangente der grösseren $^n/_m$, die der kleineren $^1/_m$.

$\beta\beta$. und $\gamma\gamma$. Gegeben entweder zwei Combinationskanten O′ und O″ einer Fläche von mOn zu zwei anliegenden O-Flächen oder D′ und D″, die Combinationskanten einer Fläche von mOn zu zwei anliegenden ∞O-Flächen.

In allen diesen Fällen, die wieder verschiedene Unterfälle haben, ist ein gemeinsames Verfahren, welches zugleich auch das allgemeinste ist, zur Berechnung einzuschlagen.

Zur Einsicht in dasselbe stellen wir uns vor, ein zusammengehöriges, in einer Kante K′ zusammenstossendes Flächenpaar liege an einer bekannten Kante K symmetrisch an, Fig. 66ᵃ. und nennen alsdann die zwei Combinationskanten d, die unter einander gleich sind, auf den zugehörigen Seiten der Kante gelegene. Ist nun, anstatt der 2 Flächen, deren nur eine vorhanden, Fig. 66ᵇ., so wird diese, ausser der Kante auf der zugehörigen (hier rechten) Seite, auch eine solche auf der nicht zugehörigen (hier linken) Seite bilden.

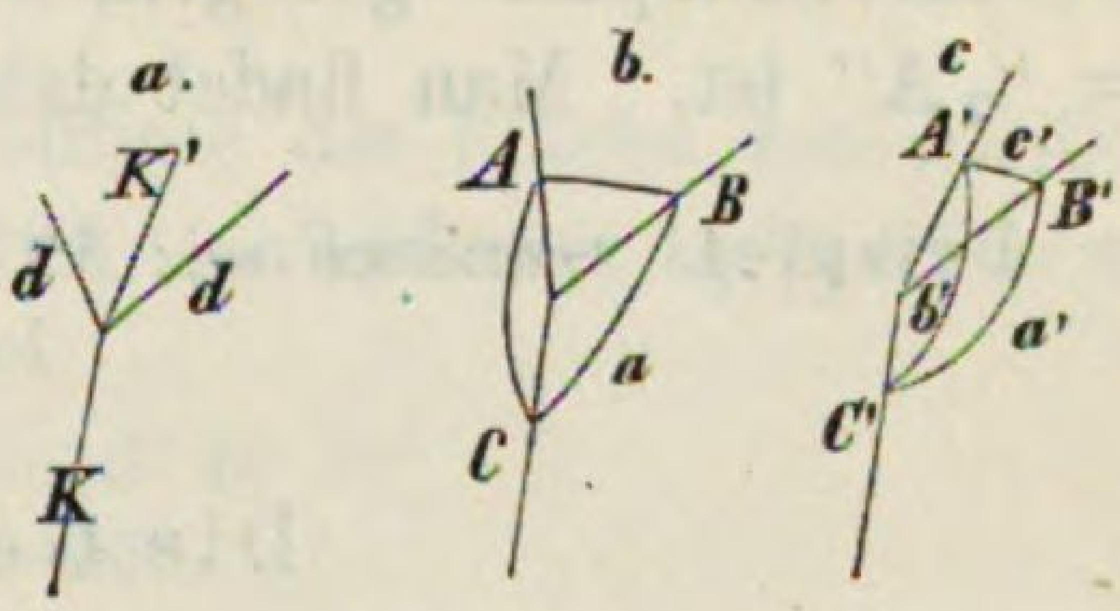


Fig. 66.

Man lege in diesem allgemeinsten Fall ein Dreieck, Fig. 66ᵇ., mit:
A = Combk. auf der nicht zugehörigen Seite.
B = Combk. auf der zugehörigen Seite.
C = Kante K und berechne a.

Alsdann kann man, Fig. 66ᶜ., in ein ferneres Dreieck übergehen, das:
B′ = B des vorigen Dreiecks.
a′ = a „ „ „
C′ = ½C „ „ „ enthält.

In diesem Dreieck ist A′ = ½ K′ und b′ = Neigung von K′ zu K zu berechnen und damit ist die Aufgabe im Allgemeinen gelöst, indem nun, da man die Position von K gegen die Axen kennt, auch die Neigung der nunmehr erhaltenen, dem mOn eigenthümlichen Kante K′ gegen dieselben Axen gegeben ist. Hiermit ist dann die Rechnung in gewohnter Weise fortzuführen und zu beenden.

Anmerkung. An diese Fälle schliessen sich auch diejenigen an, bei denen zur Berechnung der Lage einer Fläche von mOn entweder eine Combinationskante derselben zu ∞O∞ und eine solche zu O, oder eine Combinationskante zu O und eine solche zu ∞O, oder schliesslich eine Combinationskante zu ∞O∞ und eine solche zu ∞O gegeben sind. — Diese Fälle sind den vorhergehenden entsprechend zu behandeln, und es müssen, beim Legen der sphärischen Dreiecke, theils die Neigungswinkel der Flächen der Gestalten ∞O∞, O, ∞O, theils die ebenen Winkel, die die Combinationskanten dieser Gestalten untereinander bilden, passend in Rechnung gezogen werden.

p. Die Pentagondodekaëder $\pi\infty On$.

Die regelmässigen, meist längeren Kanten heissen A″, die unregelmässigen C″.

α. Gegeben der Winkel der Kanten A″.

Denkt man sich, Fig. 67, die Höhenlinie eines Pentagons und die verticale Hauptaxe gezogen, so schliessen beide einen Winkel ein, der $= \frac{1}{2} A''$ ist. Man findet daher $\mathrm{tg}\, \frac{1}{2} A'' = n$.

Beispiel. Gemessen sei: $A'' = 151^0\ 55'$.

$\log.\ \mathrm{tg}\ 75^0\ 57'\ 30'' = 0{,}6018853.$

$\mathrm{num.}\ n = 3{,}9984.$

Die Gestalt ist $\pi\infty O4$.

β. Gegeben der Winkel der Kanten C″.

Man bilde die Fig. 67 gezeichnete dreiseitige Pyramide, indem man sich bei einem $\pi\infty On$ im Gleichgewicht die Endpunkte der Kanten C″ durch Linien verbunden denkt und durch diese einen Schnitt legt.

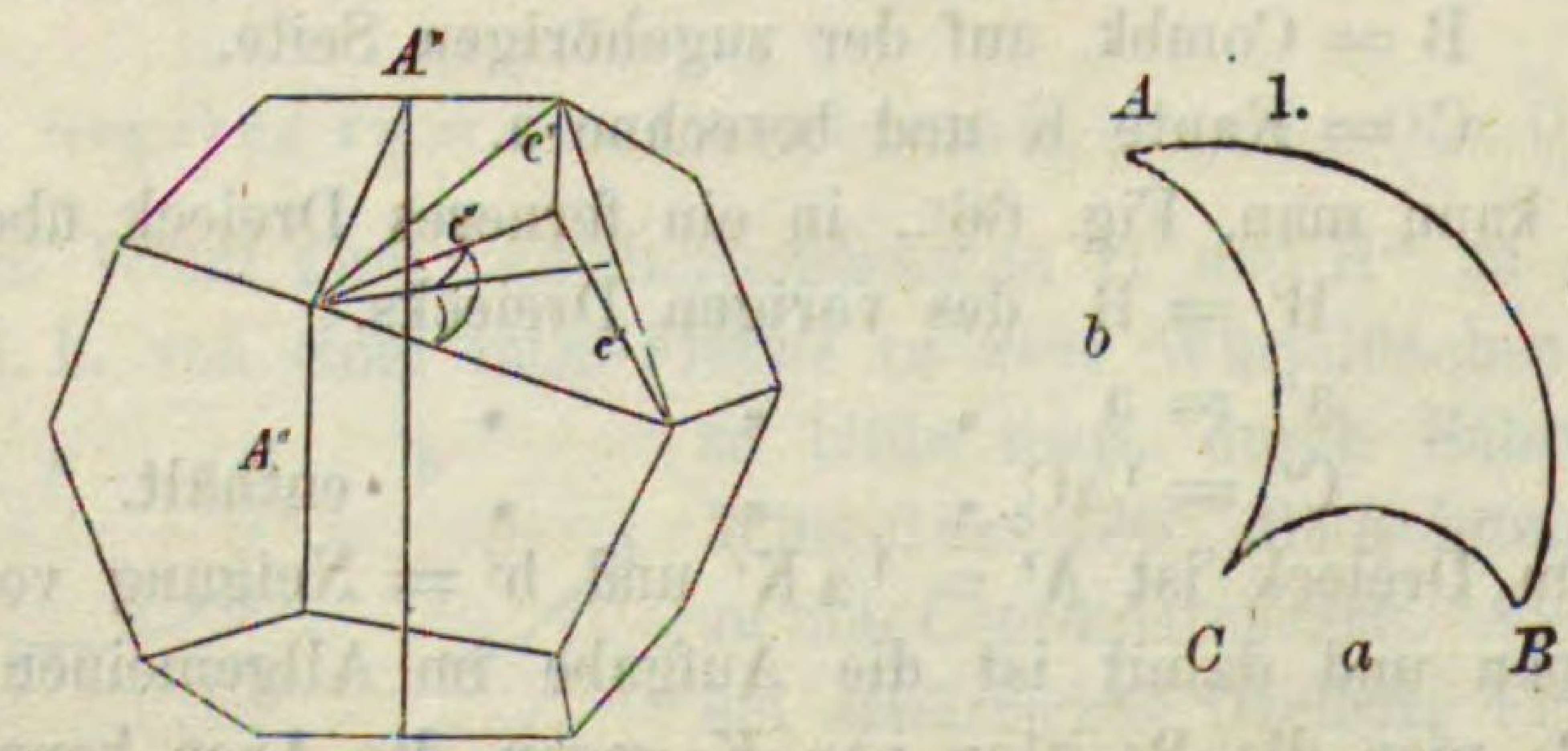


Fig. 67.

Alsdann berechne man die Neigung einer Fläche der Pyramide zur Basis derselben. Letztere ist ein gleichseitiges Dreieck, die Flächen

der Pyramide dagegen sind gleichschenkelige Dreiecke. In der Basis verbinde man ein Eck mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite und lege ein Dreieck 1., was: $A = \frac{1}{2} C''$.
$C = 90^0$.
$a = 30^0$ enthält.

In demselben ist $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$, ferner $180^0 - B$ die Neigung der Fläche von $\pi\infty On$ zur Fläche von O.

Nunmehr ist ein Dreieck 2. möglich, Fig. 68, was an die Combination von $\pi\infty On$ mit O derartig angelegt wird, dass es:

$A' = 180^0 - B$.
$B' = 54^0\ 44'\ 8''$.
$C' = 90^0$ enthält.

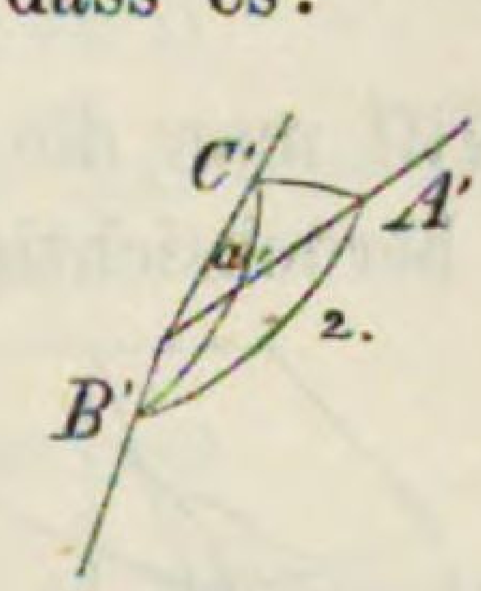


Fig. 68.

Man sucht in demselben a', das ist die Neigung der Oktaëderkante zur Höhenlinie auf der Fläche von $\pi\infty On$.

Man findet $\cos a' = \frac{\cos A'}{\sin B'}$ und hat, da die Kante von O zur Hauptaxe unter 45^0 neigt, die Neigung der Höhenlinie der Fläche von $\pi\infty On$ zu derselben Hauptaxe: $\frac{1}{2} A'' = 45^0 + (180 - a')$; ferner $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A'' = n$.

Beispiel. Gegeben sei: $C'' = 117^0\ 29'$.
Alsdann ist im ersten Dreieck: $A = 58^0\ 44'\ 30''$.
$C = 90^0$.
$a = 30^0$.

$$\log. \sin B = \log. \cos 58^0\ 44'\ 30'' = 9{,}7150817 - 10$$
$$- \log. \cos 30^0 = 9{,}9375306 - 10$$
$$9{,}7775511 - 10$$
$$B = 36^0\ 48'\ 38''.$$

Für das zweite Dreieck ist: $A' = 143^0\ 11'\ 22''$.
$B' = 54^0\ 44'\ 8''$.
$C' = 90^0$.

$$\log. \cos a' = \log. \cos 36^0\ 48'\ 38'' = N.\ 9{,}9034270 - 10$$
$$- \log. \sin 54^0\ 44'\ 8'' = 9{,}9119541 - 10$$
$$9{,}9914729 - 10$$

$\frac{1}{2} A'' = 45^0 + 11^0\ 19' = 56^0\ 19'$. N. $11^0\ 19'$.
$a' = 168^0\ 41'$.

$\log. \operatorname{tg} 56^0\ 19' = 0{,}1762019$; num. $n = 1{,}500$.

Die Gestalt ist $\pi\infty O\frac{3}{2}$.

Anmerkung. Das reguläre Pentagondodekaëder der Geometrie ist in der Krystallwelt unmöglich, da n einen irrationalen Werth und zwar $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ erhalten würde.

NAUMANN beweist dies,* indem er die Winkel A″ und C″ durch die Cosinusformel ausdrückt und ihre Werthe einander gleich setzt. Man hat nämlich alsdann:

$$\cos A'' = -\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}; \quad \cos C'' = -\frac{n}{n^2 + 1},$$

$$\text{also } \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Dies führt auf die quadratische Gleichung $n^2 - n = 1$, welche aufgelöst $n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ergibt.

Will man die Sache mit sphärischer Trigonometrie angreifen, so ist zu berücksichtigen, dass das reguläre Pentagondodekaëder reguläre Fünfecke als Begrenzungselemente besitzt, folglich jeder ebene Winkel $= 108^0$ gross ist. Man kann daher, Fig. 69, ein Dreieck legen, was:

$c = 108^0$.
$a = 54^0$.
$C = 90^0$ enthält.

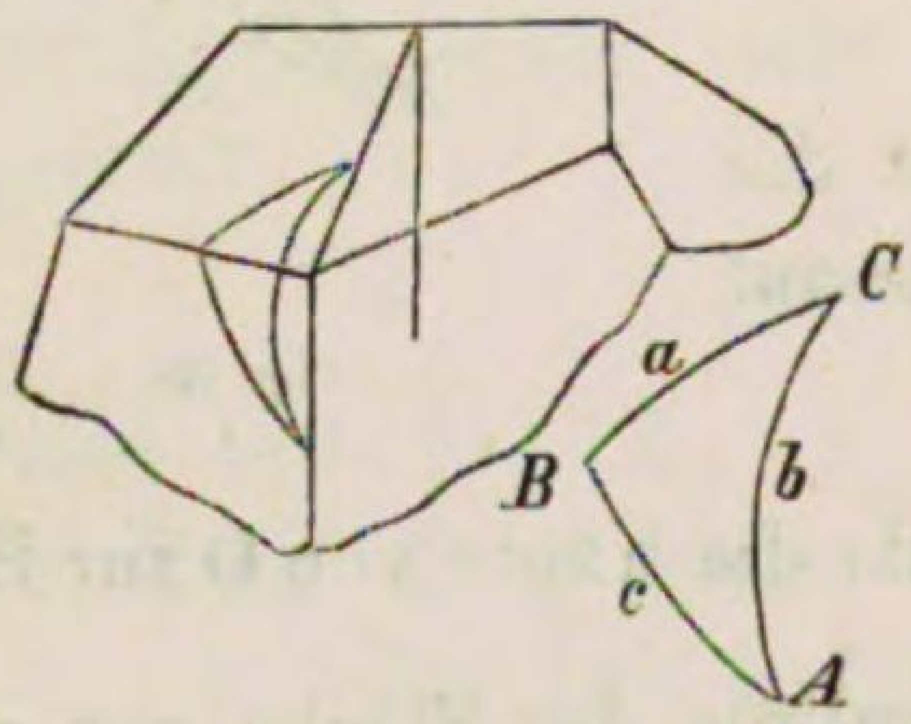


Fig. 69.

In diesem Dreieck sucht man b und findet $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$.

$180^0 - b = \frac{1}{2}A''$; $\text{tg}\,\frac{1}{2}A'' = n$.

log. cos b = log. cos 72⁰ = N. 9,4899824 — 10	
— log. cos 54⁰ = 9,7692187 — 10	
N. 9,7207637 — 10	
log. tg 58⁰ 16′ 57″ = 0,2089872	N. 58⁰ 16′ 57″.
num. n = 1,61803.	b = 121⁰ 43′ 3″.

Dieser Werth ist mit $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ identisch.

q. Die Tetrakishexaëder und die Pentagondodekaëder in Combinationen.

α. Gegeben die Combinationskante H′ zu ∞O∞.

Setzt man $H' - 90^0 = \frac{1}{2}A''$, so ist $\text{tg}\,\frac{1}{2}A'' = n$. Dieser Satz gilt für alle ∞On.

Was die π∞On anlangt, so gibt es positive und negative. Geht man von der einen Grenzgestalt derselben, nämlich von ∞O, aus, so

* Lehrb. d. rein. u. angew. Kryst. 1830. B. I. p. 176.

neigen die Flächen derselben zu $\infty O \infty$ unter 135°. Nennt man nun, bezogen auf die obere Würfelfläche und von vorn betrachtet, die $\pi \infty$On-Flächen positive, welche unter grösseren Winkeln als 135° zu der oberen Fläche von $\infty O \infty$ neigen, so werden diejenigen, deren Combinationskantenwinkel zu derselben Fläche von $\infty O \infty$ kleiner als 135° sind, die negativen sein.

Bei jenen ist $\operatorname{tg}(H' - 90^0) = n$, bei diesen $\operatorname{cotg}(H' - 90^0) = n$; immer vorausgesetzt, dass in beiden Fällen H' die Neigung der Fläche $\pi \infty$On zu ein und derselben Würfelfläche sei.

β. Gegeben die Combinationskante O' zu O.

Die Berechnung ist bei $\pi \infty$On unter *β* gegeben und von Dreieck 2., Fig. 68, an aufzunehmen.

γ. Gegeben die Combinationskante D' zu ∞O.

Die Berechnung versteht sich nach den unter *α*. gegebenen Erläuterungen von selbst. Da die Höhenlinie der Fläche von ∞O zur Hauptaxe unter 45° neigt, so ist leicht die Neigung der Höhenlinie der Fläche von $\pm \pi \infty$On gegen dieselbe Hauptaxe dargestellt. Ist diese Neigung $> 45^0$, so ist die Tangente, ist sie $< 45^0$, die Cotangente derselben der Ableitungscoëfficient.

r. Die Dyakisdodekaëder πmOn.

Die kürzesten Kanten heissen A'', die längsten B'', die mittleren, unregelmässigen Kanten C''.

α. Gegeben die Winkel der kürzesten und längsten Kanten A'' u. B''.

Aus der Ableitung des Dyakisdodekaëders aus dem Hexakisoktaëder folgt, dass die mittleren Kanten dieser letzteren Gestalt in ihrem Winkelmass ungeändert in den hemiëdrischen Körper übergehen und hier zu den längsten Kanten B'' werden. In der Gestalt π mOn gehen daher die längsten Kanten B'' von a nach na und die dem Hemiëder eigenthümlichen Kanten A'' von a nach ma.

Zur Berechnung lege man, Fig. 70, ein sphärisches Dreieck mit:

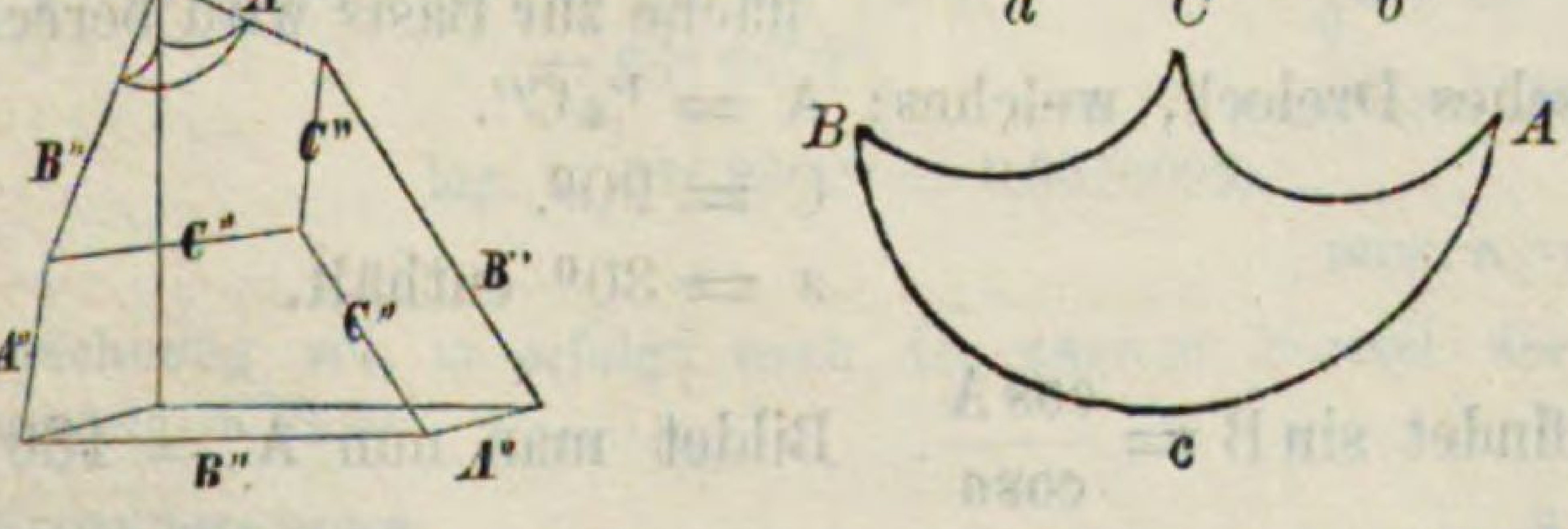


Fig. 70.

$$A = \tfrac{1}{2} A''.$$
$$B = \tfrac{1}{2} B''.$$
$$C = 90^0.$$

Alsdann hat man $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$; $\operatorname{tg} a = n$;

ferner ist $\operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\operatorname{cotg} B} = m.$

Beispiel. Gegeben seien an einem πmOn: $A'' = 115^0\ 22'$.
$B'' = 149^0\ 0'$.

Für das sphärische Dreieck ist daher: $A = 57^0\ 41'$.
$B = 74^0\ 30'$.
$C = 90^0$.

log. cos a = log. cos 57° 41′ = 9,7280275 — 10
— log. sin 74° 30′ = 9,9839105 — 10
9,7441170 — 10.
a = 56° 18′ 17″.

log. tg 56° 18′ 17″ = 0,1760057.
num. n = 1,4997 = $^3/_2$.

log. tg b = log. sin 56° 18′ 17″ = 9,9201233 — 10
— log. cotg 74° 30′ = 9,4429883 — 10
0,4771350.
num. m = 3.

Die Gestalt ist $\pi 3O^3/_2$.

β. Gegeben die Winkel der längsten und mittleren Kanten B″ und C″ oder die Winkel der kürzesten und mittleren Kanten A″ und C″.

In den beiden Fällen denke man sich bei einem πmOn im Gleichgewicht die Endpunkte der Kanten C″ durch Linien verbunden und lege, Fig. 71, einen Schnitt durch dieselben, entsprechend der bei $\pi\infty$On erwähnten Construction. Alsdann ist hier, wie dort, eine dreiseitige Pyramide abhebbar, deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist, während ihre übrigen Flächen sich als gleichschenkelige Dreiecke darstellen. Die Neigung einer Seitenfläche zur Basis wird berechnet durch

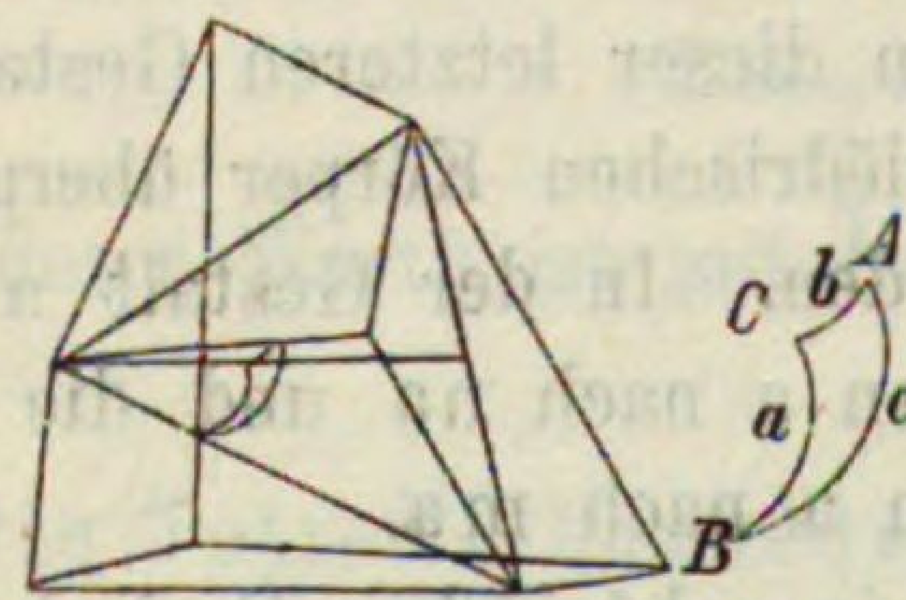


Fig. 71.

ein sphärisches Dreieck, welches: $A = \tfrac{1}{2} C''$.
$C = 90^0$.
$a = 30^0$ enthält.

Man findet $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$. Bildet man nun $A' = 180^0 - B$, so ist dies die Neigung der Fläche von πmOn zur Fläche von O. Hier-

mit kann wieder ein Dreieck gelegt werden, Fig. 72, was folgende Stücke enthält:

$A' =$ eben berechnet.
$B' = {}^1/_2 A''$ oder ${}^1/_2 B''$.
$C' = 54^0\ 44'\ 8''$.

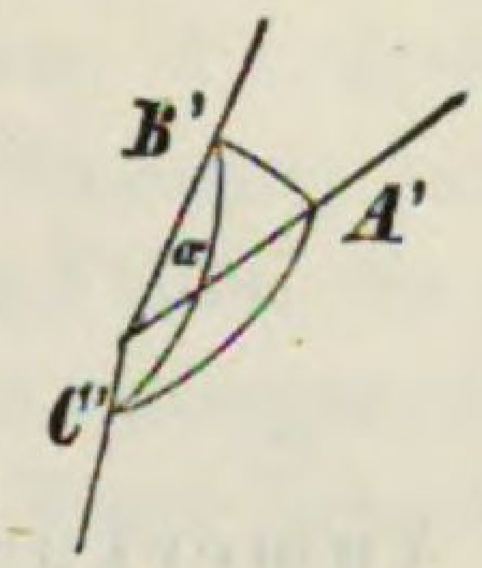


Fig. 72.

Man sucht a′, die Neigung der Kante A″ oder B″ zur Kante von O und hat:

$$\cos\frac{a'}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1/_2(A'+B'-C') . \cos{}^1/_2(A'+C'-B')}{\sin B' . \sin C'}}$$

Bildet man schliesslich $a'' = 45^0 + (180^0 - a')$, so hat man, wenn mit C″ der Winkel A″ gegeben war, $tg\, a'' = m$; wenn dagegen, ausser C″, noch B″ bekannt ist, $tg\, a'' = n$. Die fehlenden Werthe n und m berechnen sich nunmehr auf bekannte Weise aus dem sphärischen Dreieck im vorigen Falle.

Beispiel. Gegeben sei an einem πmOn: $B'' = 154^0\ 47'$.
$C'' = 131^0\ 49'$.

Alsdann ist für das erste Dreieck: $A = 65^0\ 54'\ 30''$.
$C = 90^0$.
$a = 30^0$.

$$\begin{aligned} \log.\sin B = \log.\cos 65^0\ 54'\ 30'' &= 9{,}6108705 - 10 \\ - \log.\cos 30^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ \hline & 9{,}6733399 - 10 \\ B &= 28^0\ 7'\ 18''. \end{aligned}$$

Somit ist $A' = 180^0 - 28^0\ 7'\ 18'' = 151^0\ 52'\ 42''$.

Für das zweite Dreieck ist nunmehr: $A' = 151^0\ 52'\ 42''$.
$B' = 77^0\ 23'\ 30''$.
$C' = 54^0\ 44'\ 8''$.

$$\frac{A+B-C}{2} = 87^0\ 16'\ 2''\ ;\ \frac{A+C-B}{2} = 64^0\ 36'\ 40''.$$

$$\begin{aligned} \log.\cos\frac{a'}{2} = \log.\cos 87^0\ 16'\ 2'' &= 8{,}6783170 - 10 \\ + \log.\cos 64^0\ 36'\ 40'' &= 9{,}6322142 - 10 \\ \hline & 8{,}3105312 - 10 \\ & 9{,}9013528 - 10 \\ \hline & 18{,}4091784 - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\sin 77^0\ 23'\ 30'' &= 9{,}9893987 - 10 \\ + \log.\sin 54^0\ 44'\ 8'' &= 9{,}9119541 - 10 \\ \hline & 9{,}9013528 - 10. \end{aligned}$$

Daraus $\sqrt{\ } = 9{,}2045892 - 10.$

$$\frac{a'}{2} = 80^0\ 46'\ 59''.$$

$$a' = 161^0\ 33'\ 58''.$$

$$a'' = 45^0 + (180^0 - 161^0\ 33'\ 58'') = 63^0\ 26'\ 2''.$$

$\log.\, tg\ 63^0\ 26'\ 2'' = 0{,}3010099.$

num. $n = 1{,}9999 = 2$.

Die Berechnung von m erfolgt nach der zweiten Formel des sphärischen Dreiecks im vorigen Falle:

$$\text{tg}\, b = \frac{\sin a}{\text{cotg}\, B}, \text{ wobei hier: } a = 63^0\, 26'\, 2'' \text{ und } B = 77^0\, 23'\, 30'' \text{ bedeuten.}$$

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg}\, b = \log.\ \sin 63^0\, 26'\, 2'' &= 9{,}9515410 - 10 \\ - \log.\ \text{cotg}\, 77^0\, 23'\, 30'' &= 9{,}3496256 - 10 \\ &\overline{\, 0{,}6019154,} \\ \text{num. } m &= 3{,}9987 = 4. \end{aligned}$$

Die Gestalt ist $\pi 4O2$.

Anmerkung. Das soeben berechnete Dyakisdodekaëder lässt zwischen seinen beiden Ableitungscoëfficienten m und n die Beziehung $m = n^2$ erkennen. Man nennt solche Dyakisdodekaëder parallelkantige, da bei ihnen die Kanten C″ derartig den Kanten B″ parallel laufen, dass immer je vier Flächen der Gestalt in einer Zone liegen; vergl. Tafel III, Fig. 4.

Aus diesem Umstande kann man leicht das Zeichen n^2On erschliessen. Geht man in der erwähnten Figur von der Fläche v.r.o = = na : mb : c * aus und legt sie in Projection, Tafel III, Fig. 5, so wird ihre Sectionslinie von na : mb gehen. Zieht man ferner in Betracht die Fläche v.r.o = ma : b : nc, die mit der ersteren eine Kante C″ bildet, welche der Kante B″ im Hauptschnitt parallel geht (beide Flächen tragen in der Zeichnung zum Zwecke der leichteren Erkennung feine, der Kante B″ parallele Linien), so muss dieser Fläche, bezogen auf c = 1, der Ausdruck $^m/_n a : {}^1/_n b : c$ zukommen. Sie würde also in der Projection durch eine von $^m/_n a : {}^1/_n b$ ziehende Sectionslinie vorgestellt werden. Da aber beide Flächen in eine Zone fallen, deren Zonenaxe der Kante B″ im Hauptschnitt parallel ist, so muss na der ersten Sectionslinie mit dem Schnittpunkt $^m/_n a$ der zweiten zusammenfallen, d. h.:

$$n = {}^m/_n$$

sein. Dies ist nur möglich, wenn $m = n^2$ ist, was die gesuchte Bedingung zwischen m und n ergibt.

s. Die Dyakisdodekaëder in Combinationen.

Von Interesse sind hier die Combinationen eines untergeordneten πmOn mit den vorwaltenden Gestalten $\infty O \infty$, O, $\pi \infty On'$ und $\pi m'On'$. Die Berechnung geschieht am einfachsten entweder aus einer eigenthümlichen Kante der Gestalt, A″ oder B″ und einer Combinationskante, oder aus zwei Combinationskanten einer Fläche von πmOn zu zwei Flächen der genannten Gestalten. In allen diesen Fällen wird

* Die drei gleich grossen, senkrechten Axen sind zum Zwecke der leichteren Unterscheidung mit a, b, c bezeichnet; es gilt für sie also a = b = c.

die Rechnung sich leicht ausführen lassen, wenn man die bei den Combinationen der mOn gegebenen Regeln beachtet.

Schwieriger gestaltet sich jedoch die Sache, wenn die unregelmässigen Kanten C″ und eine Combinationskante zur Rechnung herangezogen werden sollen. Wir werden von den wichtigsten Fällen, die vorkommen, hier nur den untersuchen, in welchem eine untergeordnete Gestalt π mOn an einem vorwaltenden $\infty O \infty$ auf diese Weise berechnet werden soll oder muss und einen anderen Fall dann später bei den Uebungsbeispielen behandeln.

Man habe, Fig. 73, eine Combination $\infty O \infty$, π mOn vor sich und es seien zur Berechnung der letzteren Gestalt gegeben C″ und H′. Alsdann berechne man zunächst, wie bei $\pi\infty$On und π mOn gezeigt, die Neigung der Fläche von π mOn zur Fläche von O. Das zu legende Dreieck enthält: $A = \frac{1}{2} C''$.

$C = 90^0$.

$a = 30^0$.

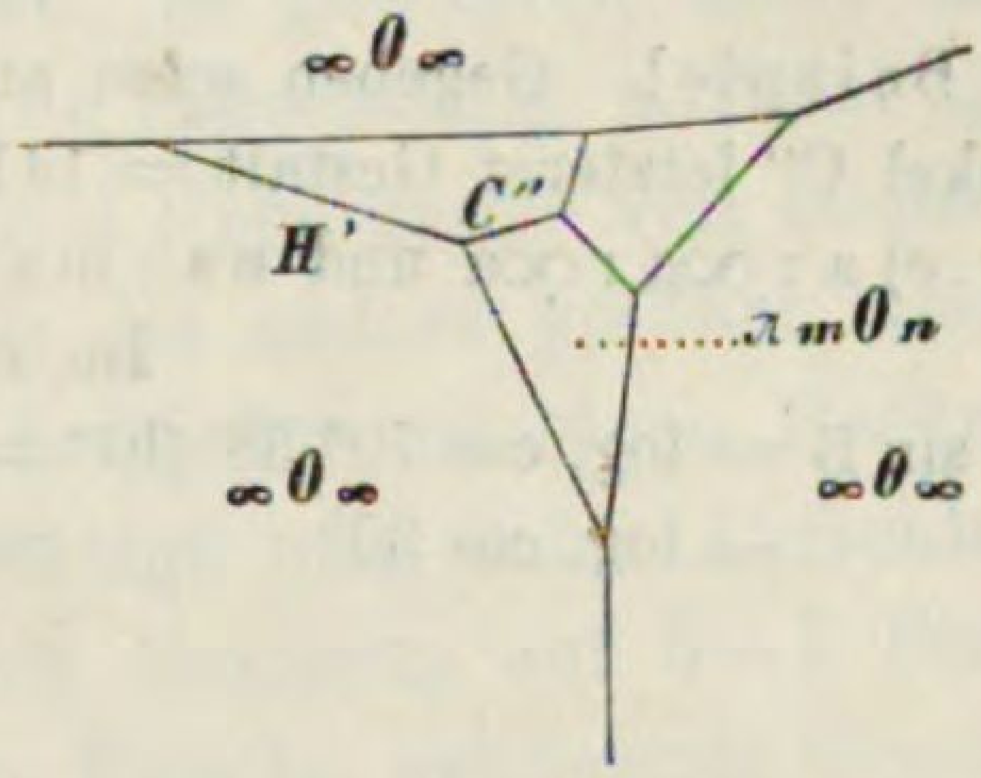


Fig. 73.

In demselben ist $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$

und $180^0 - B$ die Neigung der Fläche von π mOn zur Fläche von O.

Nunmehr stelle man, Fig. 74, ein Dreieck her, das:

$A' = 180^0 - B$.

$B' =$ Combk. H′.

$C' = 125^0\ 15'\ 52''$ enthält.

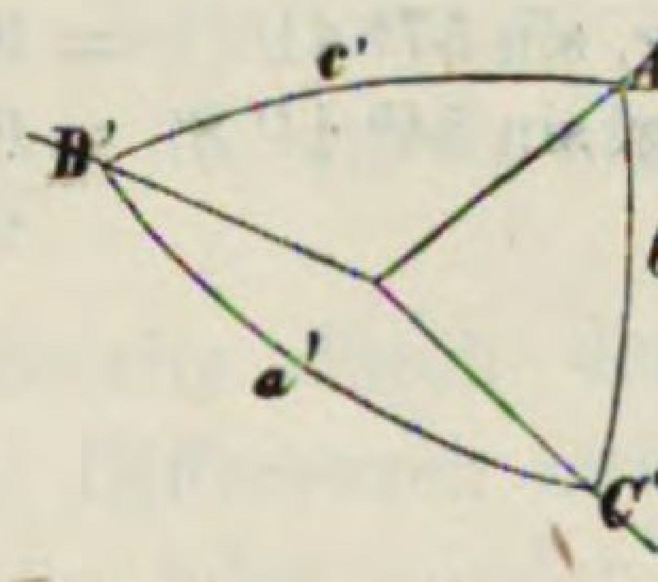


Fig. 74.

In diesem Dreieck ist letzterer Winkel die Neigung O : $\infty O \infty$. Man berechne a′ durch $\cos \frac{a'}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A'+B'-C') \cos \frac{1}{2}(A'+C'-B')}{\sin B' \cdot \sin C'}}$.

Da nun der ebene Winkel, unter dem die Kante $\infty O \infty : \infty O \infty$ zur Kante O : $\infty O \infty$ neigt, $= 135^0$ ist, so beträgt die Neigung der Kante von π mOn : $\infty O \infty$ zur Kante $\infty O \infty : \infty O \infty = 135^0 + (180^0 - a') = v$. Hiermit ist die Kante B″ und ihre Neigung zur Projection der verticalen Hauptaxe auf der vorderen Würfelfläche, Fig. 75, zu berechnen. In dem zu legenden sphärischen Dreieck sind folgende Stücke bekannt:

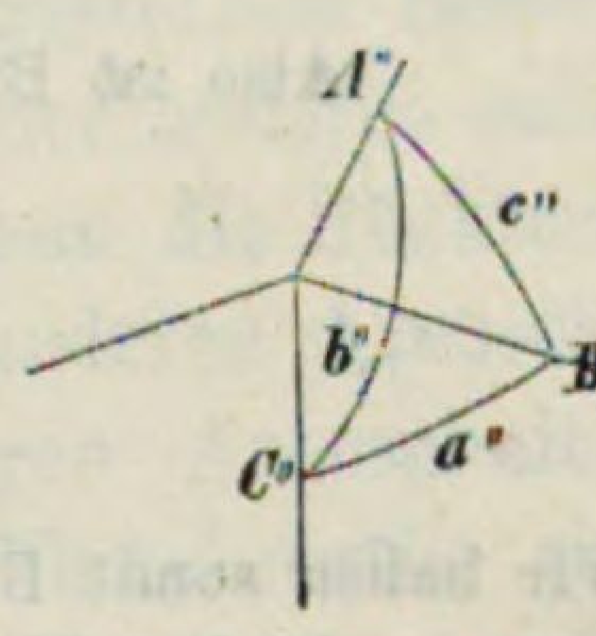


Fig. 75.

$B'' = $ Combk. H'.
$C'' = 90^0$.
$a'' = v - 90^0$.

Man findet $\cos A'' = \sin B'' . \cos a''$; $2A'' =$ Kante B'' v. πmOn, ferner $\operatorname{tg} b'' = \sin a'' . \operatorname{tg} B'' = n$. Eigentlich müsste $\operatorname{tg}(180^0 - b'') = n$ stehen, da aber $B'' =$ Combk. H', immer $> 90^0$ ist, so wird der Ausdruck $\operatorname{tg} b'' = \sin a'' . \operatorname{tg} B''$ negativ, und man kann, da $\operatorname{tg}(-b'') = -\operatorname{tg} b''$, $= \operatorname{tg}(180^0 - b'')$ ist, ihn direct $= n$ setzen. Die Berechnung von m erfolgt wie bei πmOn unter α.

Beispiel. Gegeben seien an einer Combination von $\infty O \infty$ und πmOn der Winkel C'' letzterer Gestalt $= 141^0\ 47'$, ferner die Combinationskante der Flächen (v.r.o) a : ∞a : ∞a und na : ma : a $= 122^0\ 19'$.

Im ersten Dreieck ist alsdann: $A = 70^0\ 53'\ 30''$. $C = 90^0$. $a = 30^0$.

$$\begin{aligned} \log.\sin B &= \log.\cos 70^0\ 53'\ 30'' = 9{,}5150194 - 10 \\ &\quad - \log.\cos 30^0 \qquad\ \ = 9{,}9375306 - 10 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ 9{,}5774888 - 10 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad B = 22^0\ 12'\ 35''. \end{aligned}$$

Für das zweite Dreieck hat man: $A' = 157^0\ 47'\ 25''$. $B' = 122^0\ 19'$. $C' = 125^0\ 15'\ 52''$.

$$\frac{A' + B' + C'}{2} = 77^0\ 25'\ 16^1/_2{}'' \ ; \ \frac{A' + C' - B'}{2} = 80^0\ 22'\ 8^1/_2{}''.$$

$$\begin{aligned} \log.\cos\frac{a'}{2} &= \log.\cos 77^0\ 25'\ 16^1/_2{}'' = 9{,}3380205 - 10 \\ &\quad + \log.\cos 80^0\ 22'\ \ 8^1/_2{}'' = 9{,}2235005 - 10 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 8{,}5615210 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\sin 57^0\ 41' &= 9{,}9269114 - 10 \\ + \log.\sin 54^0\ 44'\ 8'' &= 9{,}9119541 - 10 \\ &\ \ \ 9{,}8388655 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad 9{,}8388655 - 10 \\ &18{,}7226555 - 20 \end{aligned}$$

Daraus $\sqrt{\ } = 9{,}3613277 - 10$

$$\frac{a'}{2} = 76^0\ 42'\ 55'' \ ; \ a' = 153^0\ 25'\ 50''.$$

$$v = 135^0 + (180^0 - 153^0\ 25'\ 50'') = 161^0\ 34'\ 10''.$$

Für das dritte Dreieck ist: $B'' = 122^0\ 19'$. $C'' = 90^0$. $a'' = 71^0\ 34'\ 10''$.

$$\begin{aligned} \log.\cos A'' &= \log.\sin 57^0\ 41' = 9{,}9269114 - 10 \\ &\quad + \log.\cos 71^0\ 34'\ 10'' = 9{,}4999001 - 10 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ 9{,}4268115 - 10. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A'' = 74^0\ 30'\ 11''. \end{aligned}$$

Also ist B'' von πmOn $= 149^0\ 0'\ 22''$.

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{tg} b'' &= \log.\operatorname{tg} 57^0\ 41' \qquad = N.\ 0{,}1988839 \\ &\quad + \log.\sin 71^0\ 34'\ 10'' = \quad\ 9{,}9771324 - 10 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad N.\ 0{,}1760163. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{num. } n = {}^3/_2. \end{aligned}$$

Wir haben somit $B'' = 149^0\ 0'\ 22''$ und die Neigung von B'' zur verticalen Hauptaxe ermittelt. Mit nahezu denselben Werthen rechneten wir beim Dyakisdodekaëder unter α. die Gestalt zu $\pi 3O^3/_2$ aus.

— Die Rückrechnung der gemessenen Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten lässt sich entweder vermittelst der Winkelformel, oder durch die gegebenen Formeln der sphärischen Trigonometrie bewirken. Erstere Methode gibt jeden Winkel direct als Function der Axenschnitte der ihn bildenden Flächen und des Axenverhältnisses, letztere Berechnungsweise liefert zwar auch die wichtigsten Winkel sofort, doch können auch Fälle eintreten, in denen erst grössere Umwege eingeschlagen werden müssen, bis der gewünschte Winkel zu finden ist. Werden alle Winkel einer flächenreichen Combination berechnet, so gewähren beide Rechnungsweisen ziemlich gleiche Vortheile. Die Berechnung mittelst sphärischer Trigonometrie muss jedoch, wenn viel Uebergänge von Dreiecken in einander stattfinden, etwas genauer als die andere geführt werden, damit sich die kleinen Fehler, die man bei jeder einzelnen Rechnung begeht, nicht zu sehr häufen. Berücksichtigt man beim Aufschlagen der Winkel halbe Secunden und zieht den Numerus auf 6—7 Stellen in Betracht, so wird eine für die meisten Zwecke genügende Genauigkeit erreicht.

Man pflegt bei krystallographischen Beschreibungen sämmtliche Kantenwinkel der einfachen, die Combination bildenden Gestalten zu berechnen und dann auch noch die Winkel in den wichtigsten Zonen anzugeben. Seltener wird es erforderlich sein, alle Winkel, die die Flächen der Gestalten unter einander bilden, darzustellen. Die Gruppirung der gerechneten Winkel kann nach den Gestalten oder nach den Zonen stattfinden, man stellt ersteren Werthen die durch Messung erhaltenen zur Seite.

Sind die Axenschnitte der Gestalten bereits durch den Zonenverband bekannt, so erfährt man durch die Differenzen zwischen gemessenen und berechneten Winkeln die mehr oder minder grösseren Fehler im Bau, welche theils als Abweichungen der Flächen von der theoretisch geforderten Lage, theils als mangelhafte Flächenbeschaffenheit, theils als Beides zugleich zum Ausdruck kommen und jene Differenzen nach sich ziehen.

Ist aus der auf Grund von Messungen angestellten Berechnung nicht zu entscheiden, ob gewisse Axenschnitte oder andere, nahe stehende, einer Gestalt oder Fläche zukommen, so kann die Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den einen und den anderen Axenschnitten zur Entscheidung beitragen. Es werden diejenigen Axenschnitte die grössere Wahrscheinlichkeit haben, aus denen Winkelwerthe sich berechnen lassen, die, im Vergleich mit den gemessenen, die geringsten Differenzen aufweisen.

4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

a. Rothkupfererz.*

Die Combination, Tafel III, Fig. 6. besteht aus den Gestalten:

O,	$\infty O \infty$,	∞O,	mOm,	∞On,	mO,	mOn.
P,	a,	m,	b,	c,	n,	e.

1. Nachdem O nach seiner Symmetrie und seinen unter einander gleichen Kantenwinkeln von 109° 28′ 16″ erkannt ist, bestimmen sich $\infty O \infty$, ∞O aus dem Zonenverband ohne Weiteres.

2. Der Gestalt b kommt, weil in der Zone O : $\infty O \infty$ gelegen, das Zeichen mOm zu. Da die Flächen der Gestalt überdies die Kanten von ∞O gerade abstumpfen, so wird, vergl. die Projection, Taf. III, Fig. 7, m = 2 und die Gestalt zu 2O2. (Die Flächen am Krystalle und die ihnen entsprechenden Sectionslinien in der Projection sind in gleicher Weise mit unterstrichenen Buchstaben bezeichnet.)

3. Die Gestalt c liegt in der Zone ∞O : $\infty O \infty$, daher gehört sie einem ∞On an. Gleichzeitig stumpfen ihre Flächen aber die Kanten B von 2O2 ab. In Folge dessen, vergl. die Projection, wird die Gestalt zu $\infty O2$.

4. Die Gestalt n liegt in einer Zone zwischen ∞O und O, daher gehört sie einem mO an. Zur Bestimmung von m ist eine Winkelmessung erforderlich. Wählen wir hierzu ∞O : mO = 160° 32′, so ergibt sich daraus ½ B von mO = 70° 32′, folglich ist:

$$\begin{aligned} \log . \operatorname{tg} b = \log . \sin 45^{\circ} &= 9{,}8494850 - 10 \\ - \log . \operatorname{cotg} 70^{\circ}\, 32' &= 9{,}5483452 - 10 \\ \hline & \ 0{,}3011398 \end{aligned}$$

Die Gestalt ist 2O. num. m = 2.

5. Die übrig bleibende Gestalt e gehört einem mOn an. Aus der einen Zone, in welche diese Gestalt fällt, ∞O : 2O2, kommt ihr das Zeichen $mO\frac{m}{m-1}$ zu, eine zweite Zone, nämlich $\infty O2$: O ist am Krystalle nicht vollständig offen darliegend, aber leicht durch das Reflexionsgoniometer nachzuweisen. Zu dem Ende stelle man die in einer Kante zusammenstossenden Flächen c und e beispielsweise ein, alsdann wird, beim Drehen des Krystalls, die Fläche P, als mit den

* Vergl. Phillips, Mineralogy 1823, p. 307; Naumann, Lehrb. d. rein. u. ang. Kryst. 1830, B. I, p. 242 u. f.

beiden in einer Zone befindlich, sich zu erkennen geben. Damit ist aber das Hexakisoktaëder als auch zwischen den Grenzgestalten $\infty O 2$ und O liegend erkannt, folglich sein Zeichen $= mO\frac{2m}{m+1}$.*

Wir können somit setzen: $\frac{m}{m-1} = \frac{2m}{m+1}$; dies ergibt m = 3 und n = $^3/_2$.

Berücksichtigt man nur die erste Zone, so muss zur Berechnung noch ein Winkel gemessen werden. Wählen wir hierzu $\underline{e} : \underline{b} = 169^0\ 6'$, so folgt daraus $^1/_2$A von $mO\frac{m}{m-1} = 79^0\ 6'$. In dem beifolgenden sphärischen Dreieck, Fig. 76, ist a zu berechnen; die Tangente desselben ist = n.

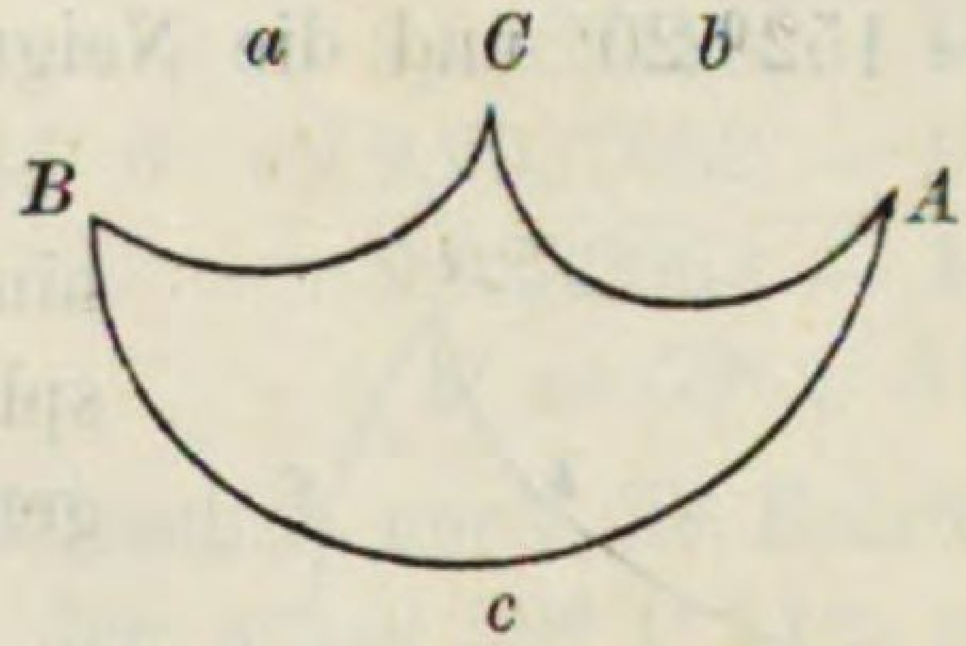


Fig. 76.

Man hat:

$A = 79^0\ 6' = {}^1/_2 A$ v. $mO\frac{m}{m-1}$.
$b = 54^0\ 44'\ 8''$.
$C = 45^0$.

Die Rechnung vereinfacht sich jedoch,** wenn man noch die Kante B der Gestalt $= 149^0\ 0'$ hinzunimmt und daraus für das obige Dreieck $B = 74^0\ 30'$ bildet. Alsdann ist $\sin a = \frac{\sin A \,.\, \sin b}{\sin B}$ und tga = n.

$$\begin{array}{rl}
\log.\ \sin a = \log.\ \sin 79^0\ 6' = & 9{,}9920932 - 10 \\
+ \log.\ \sin 54^0\ 44'\ 8'' = & 9{,}9119541 - 10 \\
\hline
 & 9{,}9040473 - 10 \\
- \log.\ \sin 74^0\ 30' = & 9{,}9839105 - 10 \\
\hline
\log.\ tg\ 56^0\ 18'\ 27'' = 0{,}1760513 \qquad & 9{,}9201368 - 10 \\
\text{num. } n = {}^3/_2. \qquad & a = 56^0\ 18'\ 27''.
\end{array}$$

Aus $\frac{m}{m-1} = {}^3/_2$ folgt m = 3; die Gestalt ist also $3O^3/_2$ und die ganze Combination: O, $\infty O \infty$, ∞O, 2O2, $\infty O 2$, 2O, $3O^3/_2$.

b. Boracit von Lüneburg.***

Die Combination, Tafel III, Fig. 8, besteht aus den Gestalten:

* Wir führen die Projection, Tafel III, Fig. 7, nicht aus, da dieselben Gestalten bereits in der Projection Tafel I, Fig. 4 dargestellt sind, wenn man sich nur die Axen gleich gross und rechtwinkelig vorstellt. Jedenfalls kann man daselbst den von Axengrösse und Axenwinkeln unabhängigen Zonenzusammenhang der Gestalten verfolgen. —

** Ueber eine weitere Vereinfachung, vergl. d. Nachtrag auf p. 143.

*** Vergl. Schrauf, Atlas d. Krystallf. IV, 1873. T. XXXVI, Fig. 2.

$$+\frac{O}{2}\,,\ -\frac{O}{2}\,,\ \infty O\infty\,,\ \infty O\,,\ -\frac{2O2}{2}\,,\ +\frac{mOn}{2}\,.$$
$$P\ ,\quad P'\ ,\quad a\ ,\quad m\ ,\quad b\ ,\quad v.$$

1. Die Bestimmung von $+\frac{O}{2}$, $-\frac{O}{2}$, $\infty O\infty$, ∞O, $-\frac{2O2}{2}$ erfolgt ohne Mühe, namentlich wird letztere Gestalt als $-\frac{2O2}{2}$ daran erkannt, dass sie die Kanten von ∞O in den abwechselnden Octanten gerade abstumpft.

2. Zur Bestimmung von $+\frac{mOn}{2}$ messen wir dessen Kante A = 152° 20′ und die Neigung zu $\infty O\infty$ = 147° 41′ = H′.

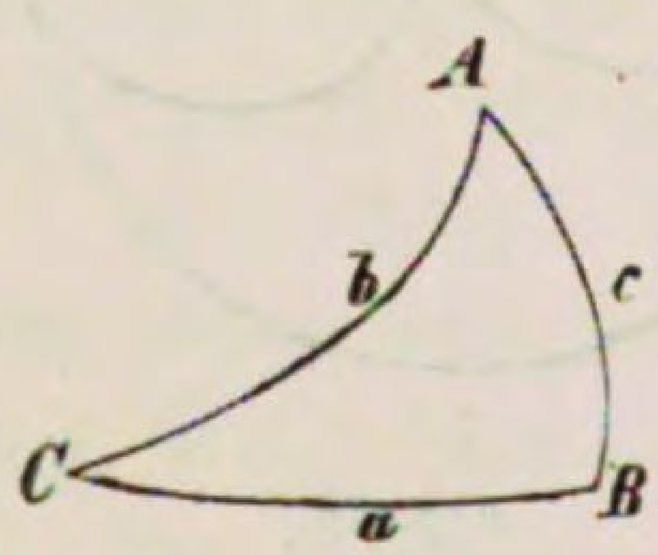


Fig. 77.

Alsdann kann man, wie bei der Combination von $\infty O\infty$ mit mOn gezeigt, ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 77, was folgende Stücke enthält: A = 76° 10′.
B = 147° 41′.
C = 90°.

Man sucht b und findet $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$.

$$\begin{aligned} \log.\cos b = \log.\cos 32^0\,19' &= \text{N. } 9{,}9269114 - 10 \\ -\log.\sin 76^0\,10' &= \phantom{\text{N. }} 9{,}9872171 - 10 \\ \hline & \text{N. } 9{,}9396943 - 10 \\ & \text{N. } 29^0\,30'\,2''. \\ & b = 150^0\,29'\,58''. \end{aligned}$$

Bildet man nun 150° 29′ 58″ — 90°, so ist 60° 29′ 58″ die Neigung der Kante A zur Hauptaxe.

Hiermit ist ein weiteres Dreieck* zu legen, Fig. 78, was:
B′ = 76° 10′.
C′ = 45°.
a′ = 60° 29′ 58″ enthält.

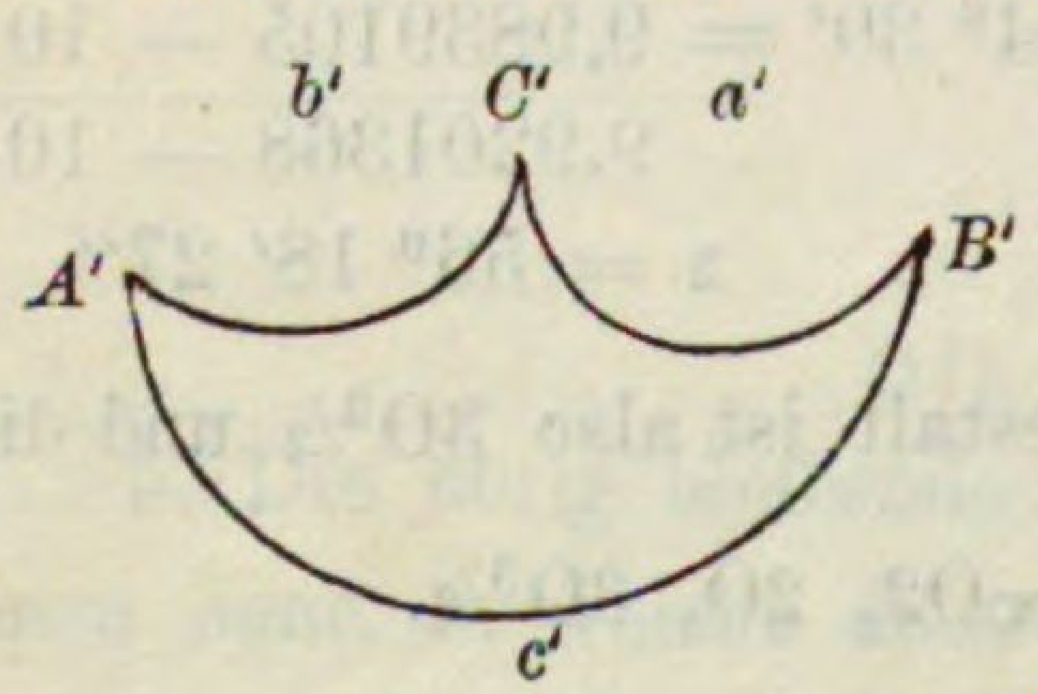


Fig. 78.

In diesem Dreieck sind A′ und b′ zu bestimmen. 2A′ ist gleich der Kante B von mOn, b′ ist die Neigung dieser Kante zur Hauptaxe.

Man hat: $\cos A' = \frac{\cos B' \,.\, \sin\,(C' - \varphi')}{\sin \varphi'}$

mit $\operatorname{cotg}\varphi' = \operatorname{tg} B' \,.\, \cos a'$.

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{cotg}\varphi' = \log.\operatorname{tg} 76^0\,10' &= 0{,}6086405 \\ +\log.\cos 60^0\,29'\,58'' &= 9{,}6923462 - 10 \\ \hline & 0{,}3009867 \\ & \varphi' = 26^0\,34'\,2''. \end{aligned}$$

* Ueber eine Vereinfachung der Rechnung, vergl. den Nachtrag auf p. 143.

$$\begin{aligned}\log.\cos A' = \log.\cos 76^0\ 10' &= 9{,}3785767 - 10\\ +\log.\sin 18^0\ 25'\ 58'' &= 9{,}4999507 - 10\\ \hline & \ 8{,}8785274 - 10\\ -\log.\sin 26^0\ 34'\ 2'' &= 9{,}6505479 - 10\\ \hline & \ 9{,}2279795 - 10\end{aligned}$$

$2A' = B$ von $mOn = 160^0\ 32'\ 12''$. $A' = 80^0\ 16'\ 6''$.

Nunmehr findet sich b′ durch $\sin b' = \frac{\sin B'.\sin a'}{\sin A'}$; ferner hat man $\operatorname{tg} b' = n$.

$$\begin{aligned}\log.\sin b' = \log.\sin 76^0\ 10' &= 9{,}9872171 - 10\\ +\log.\sin 60^0\ 29'\ 58'' &= 9{,}9396944 - 10\\ \hline & \ 9{,}9269115 - 10\\ -\log.\sin 80^0\ 16'\ 6'' &= 9{,}9937052 - 10\\ \hline & \ 9{,}9332063 - 10\end{aligned}$$

$\log.\operatorname{tg} 59^0\ 1'\ 51'' = 0{,}2217558$

num. $n = {}^5/_3$. $b' = 59^0\ 1'\ 51''$.

Zur Berechnung von m hat man schliesslich noch die Relation $\operatorname{tg} b'' = \sin a''.\operatorname{tg} B'' = m$ aufzulösen, in der $a'' = 59^0\ 1'\ 51''$ und $B'' = 80^0\ 16'\ 6''$ bedeuten.

$$\begin{aligned}\log.\operatorname{tg} b'' = \log.\sin 59^0\ 1'\ 51'' &= 9{,}9332063 - 10\\ +\log.\operatorname{tg} 80^0\ 16'\ 6'' &= 0{,}7657307\\ \hline & \ 0{,}6989370\end{aligned}$$

num. $m = 5$.

Die Gestalt ist daher $+\frac{5O^5/_3}{2}$ und die ganze Combination lautet:

$$+\frac{O}{2},\ -\frac{O}{2},\ \infty O\infty,\ \infty O,\ -\frac{2O2}{2},\ +\frac{5O^5/_3}{2}.$$

c. Eisenkies von Elba.

Die Combination, Tafel III, Fig. 9, weist folgende Gestalten auf:

$\pi\infty On$, πmOn, O.

1. Zur Bestimmung von $\pi\infty On$ messen wir den Winkel der längeren Kanten $= 126^0\ 52'$, danach ist $\operatorname{tg} 63^0\ 26' = n$.

$\log.\operatorname{tg} 63^0\ 26' = 0{,}3009994$

Die Gestalt ist $\pi\infty O2$. num. $n = 2$.

2. Zur Bestimmung von πmOn schreitend, bemerken wir zunächst, dass die Gestalt in eine Zone von $\pi\infty O2 : O$ fällt, folglich vom Zeichen $\pi mO\frac{2m}{m+1}$ ist.

Zur völligen Bestimmung ist also ein Winkel genügend; wir messen die Neigung in den unregelmässigen Kanten $= 141^0\ 47'$. Die

Rechnung würde sich aus Kenntniss der Combinationskante $\pi \infty O2 : \pi mOn = 162^0\ 59'$ einfacher gestaltet haben, allein wir ziehen den ersteren Weg als den interessanteren vor, der zweite versteht sich alsdann von selbst.

Da aber πmOn an einem vorherrschenden $\pi \infty O2$ auftritt, so müssen wir von dieser Gestalt erst einige Elemente kennen, um das Dyakisdodekaëder berechnen zu können. Es sind dies die unregelmässigen Kanten und die ebenen Winkel, unter denen dieselben zu den regelmässigen Kanten geneigt sind.

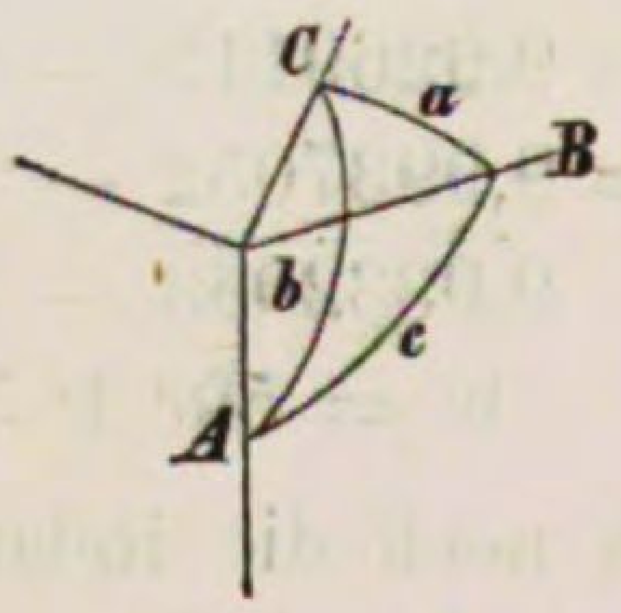


Fig. 79.

Man lege zur Berechnung an $\pi \infty O2$ ein sphärisches Dreieck, Fig. 79, an, was folgende Stücke enthält: $A = 63^0\ 26'\ 6''$.

$C = 90^0$.

$b = 116^0\ 33'\ 54''$.

In diesem Dreieck ist der Winkel A aus der Rückrechnung erhalten, indem man zu log. num. 2 = 0,3010300 die tg sucht und dadurch den Winkel zu $63^0\ 26'\ 6''$ findet; die Seite b ist, da die Kante A'' von $\pi \infty O2$, die Höhenlinie auf der Fläche von $\pi \infty O2$ und die verticale Hauptaxe in einer Ebene liegen $= 180^0 - 63^0\ 26'\ 6''$.

Man bestimmt $\cos B = \sin A . \cos b$.

$$\begin{aligned} \log. \cos B &= \log. \sin 63^0\ 26'\ 6'' = \quad 9{,}9515452 - 10 \\ &+ \log. \cos 63^0\ 26'\ 6'' = N.\ 9{,}6505142 - 10 \\ & \qquad\qquad N.\ 9{,}6020594 - 10 \\ & \qquad\qquad N.\ 66^0\ 25'\ 19''. \\ & \qquad\qquad B = 113^0\ 34'\ 41''. \end{aligned}$$

Ferner ist $\operatorname{cotg} c = \dfrac{\cos A}{\operatorname{tg} b}$.

$$\begin{aligned} \log. \operatorname{cotg} c &= \log. \cos 63^0\ 26'\ 6'' = \quad 9{,}6505142 - 10 \\ &- \log. \operatorname{tg} 63^0\ 26'\ 6'' = N.\ 0{,}3010300 \\ & \qquad\qquad N.\ 9{,}3494842 - 10 \\ & \qquad\qquad N.\ 77^0\ 23'\ 44''. \\ & \qquad\qquad c = 102^0\ 36'\ 16''. \end{aligned}$$

Nunmehr denke man sich an der Combination, Tafel III, Fig. 9, in ähnlicher Weise wie bei der Berechnung des Dyakisdodekaëders, einen Schnitt durch die Combinationskanten $\pi \infty O2 : \pi mOn$ gelegt und die aus den Flächen von πmOn gebildete, durch O abgestumpfte dreiseitige Pyramide abgehoben.

In derselben ist die Neigung einer Seitenfläche zur Basis zu be-

rechnen. Man lege, wie beim Dyakisdodekaëder unter β gezeigt, ein sphärisches Dreieck, das: $A = 70^0\ 53'\ 30''$.
$C = 90^0$.
$a = 30^0$ enthält.

In diesem Dreieck sucht man B und findet $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$.

$$\begin{aligned} \log.\ \sin B = \log.\ \cos 70^0\ 53'\ 30'' &= 9{,}5150194 - 10 \\ -\log.\ \cos 30^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ & \overline{9{,}5774888 - 10} \\ B &= 22^0\ 12'\ 35''. \end{aligned}$$

Nachdem die dreiseitige Pyramide in der soeben erwähnten Weise abgehoben ist, bleibt die Combination $\pi\infty O2$ mit O zurück. Man berechne nun, Fig. 80, die Neigung von $\pi\infty O2$ zu O und die Neigung der Combinationskante $\pi\infty O2 : O$ zur Kante C'' von $\pi\infty O2$.

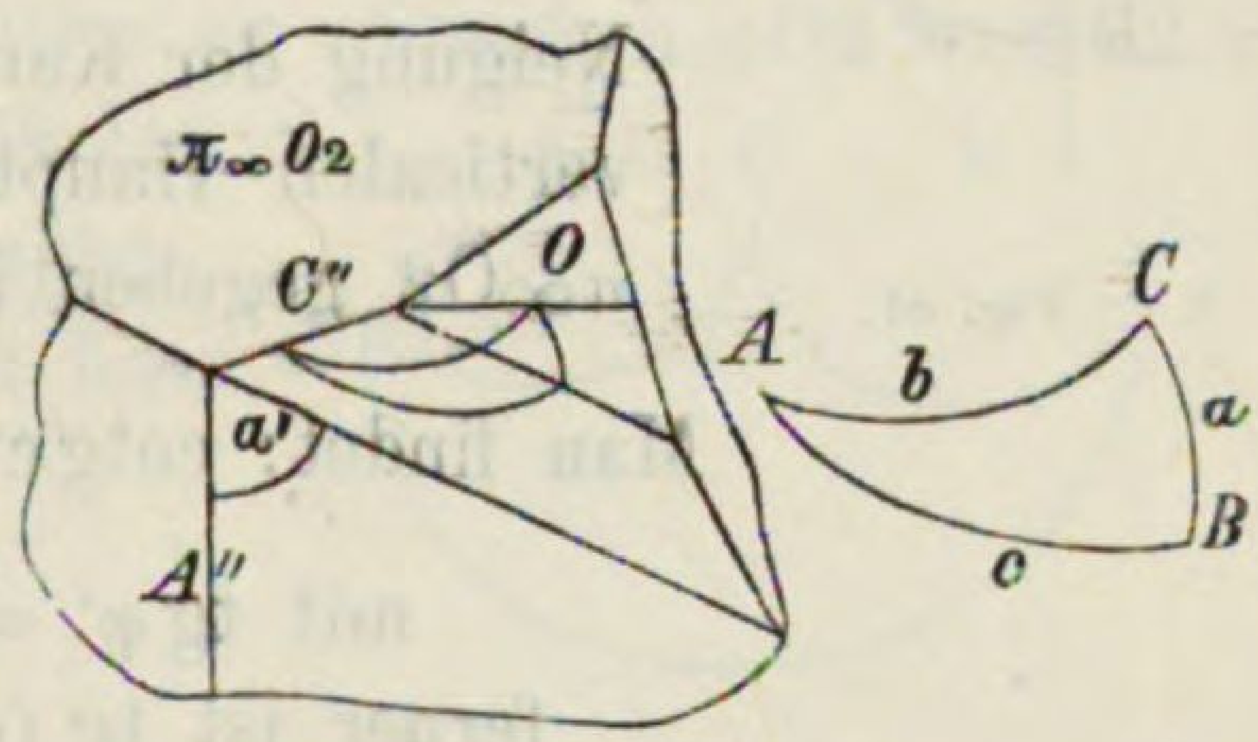


Fig. 80.

In dem zu legenden Dreieck ist:
$A = 56^0\ 47'\ 20''$.
$C = 90^0$.
$a = 30^0$.

Man hat $\sin B = \frac{\cos A}{\cos a}$.

$$\begin{aligned} \log.\ \sin B = \log.\ \cos 56^0\ 47'\ 20'' &= 9{,}7385629 - 10 \\ -\log.\ \cos 30^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ & \overline{9{,}8010323 - 10} \\ B &= 39^0\ 13'\ 54''. \end{aligned}$$

Die Natur der Aufgabe erfordert B als stumpfen Winkel zu nehmen, somit wird er $= 140^0\ 46'\ 6''$.

Mit diesem Winkel und dem im vorigen Dreieck gerechneten von $22^0\ 12'\ 35''$ kennt man aber die Neigung $\pi\infty O2 : \pi mOn = 140^0\ 46'\ 6'' + 22^0\ 12'35'' = 162^0\ 58'\ 41''$.

In demselben Dreieck ist $\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}$.

$$\begin{aligned} \log.\ \sin c = \log.\ \sin 30^0 &= 9{,}6989700 - 10 \\ -\log.\ \sin 56^0\ 47'\ 20'' &= 9{,}9225480 - 10 \\ & \overline{9{,}7764220 - 10} \\ c &= 36^0\ 41'\ 58''. \end{aligned}$$

Die Natur der Aufgabe erfordert auch hier c als stumpfen Winkel $= 143^0\ 18'\ 2''$ in Rechnung zu ziehen.

Zieht man nun, vergl. Fig. 80, die Ergänzung von c zu 180^0, also 36^0

41′ 58″ von 102° 36′ 16″, der Neigung der Kante C″ von π∞O2 zur Kante A″ derselben Gestalt, ab, so bleibt ein Winkel a′ = 65° 54′ 58″ übrig, unter dem die Combinationskante von π∞O2 : O (also auch die Combinationskante von π∞O2 : πmOn) zur Kante A″ von π∞O2 geneigt ist. Es folgt dies aus dem Umstand des Zonenverbandes von π∞O2, πmOn und O, nach welchem die genannten Gestalten parallele Combinationskanten besitzen.

Hiermit kann ein letztes Dreieck gelegt werden, Fig. 81, das:

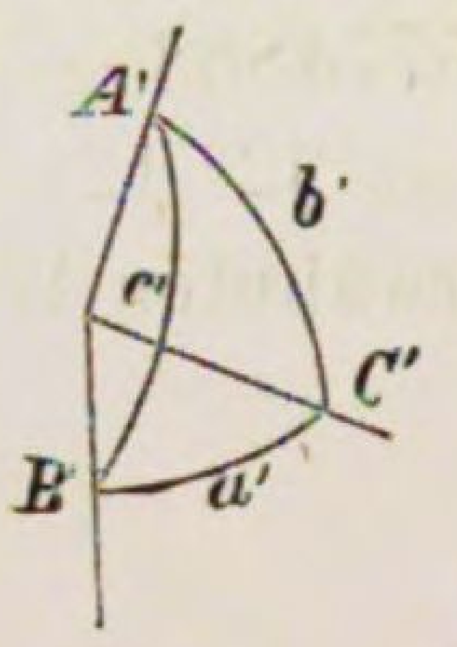


Fig. 81.

B′ = 63° 26′ 6″ = ½ A″ von π∞O2.
C′ = 162° 58′ 41″ = Cbk. π∞O2 : πmOn.
a′ = 65° 54′ 48″ enthält.

Man berechnet in diesem Dreieck c′, d. i. die Neigung der Kante A″ von πmOn zur Projection der verticalen Hauptaxe, die durch die Kante A″ von π∞O2 gegeben ist.

Man findet: $\cot g\, c' = \dfrac{\cot g\, a' . \sin(B' + \varphi')}{\sin \varphi'}$

mit $tg\, \varphi' = \cos a' . tg\, C'$;

ferner ist tg (c′ — 90°) = m.

log. tg φ′ =	log. cos 65° 54′ 48″ =	9,6107858 — 10
	+ log. tg 17° 1′ 19″ =	N. 9,4859336 — 10
		N. 9,0967194 — 10
φ′ = 172° 52′ 41″.		N. 7° 7′ 19″.
log. cotg. c′ =	log. cotg 65° 54′ 48″ =	9,6503487 — 10
	+ log. sin 56° 18′ 47″ =	N. 9,9201654 — 10
		N. 9,5705141 — 10
	— log. sin 7° 7′ 19″ =	9,0933570 — 10
		N. 0,4771571.
		c′ = 161° 33′ 59″.

log. tg (161° 33′ 59″ — 90°) = 0,4771571

num. m = 3.

Hieraus folgt: $n = \dfrac{2m}{m+1} = \frac{3}{2}$ und die Gestalt ist π3O³/₂.

Die ganze Combination aber lautet: π∞O2, π3O³/₂, O.

d. Eisenkies von Traversella.*

Die Combination, Tafel IV, Fig. 1 besteht aus:

πmOn ,	π∞On ,	zwei untergeordneten πmOn ,	∞O∞ ,	O.
e′ ,	v′ ,	s und r ,	a ,	P.

* Vergl. Strüver, Studi sulla Mineralogia Italiana 1869. T. VI. Fig. 104.

1. Zur Bestimmung von $e' = \pi mOn$ messen wir die Winkel $A'' = 115^0\ 22'$ und $B'' = 149^0\ 0'$ und erhalten, wie beim Dyakisdodekaëder unter α. gezeigt, $e' = \pi 3O^3/_2$.

2. $\pi \infty On$ bestimmen wir aus der Messung $\infty O \infty$ (oben) : $\pi \infty On =$ $= 153^0\ 26'$, indem wir daraus $^1/_2 A''$ von $\pi \infty On = 63^0\ 26'$ bilden und, wie im vorigen Beispiel, die Gestalt zu $\pi \infty O2$ ableiten.

3. $s = \pi mOn$ wird in seinen Kanten B'' durch $\pi \infty O2$ gerade abgestumpft, die Flächen dieser Gestalt haben also dieselbe Neigung zur Hauptaxe, wie die Kanten B'' von πmOn. Man ersieht daraus, dass auch im Dyakisdodekaëder $n = 2$ sein muss.

Um m zu finden, kann man entweder die Rechnung oder die Projection heranziehen.

Wählen wir ersteren Weg, so wäre zu messen $\pi \infty O2 : \pi mO2 =$ $= 167^0\ 24'$ und daraus $^1/_2 B'' = 77^0\ 24'$ darzustellen. Man kann hiernach ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 82, was folgende Stücke enthält:

$B = 77^0\ 24'$.
$C = 90^0$.
$a = 63^0\ 26'$.

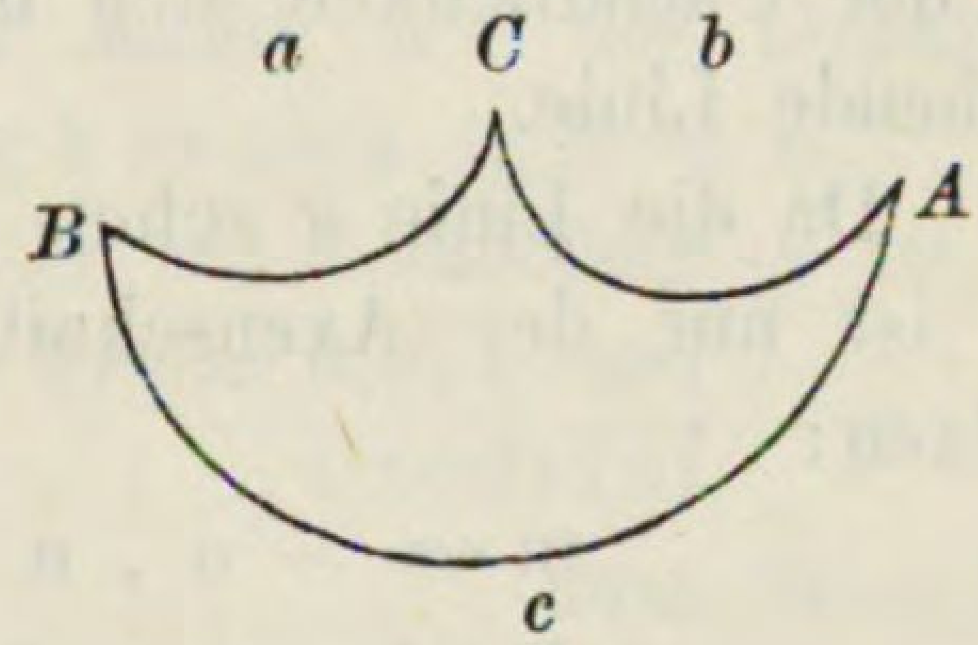


Fig. 82.

Man sucht b, d. h. die Neigung der Kante A'' zur Hauptaxe und findet $tg b = \sin a . tg B = m$.

$$\begin{aligned} \log.\ tg b = \log.\ \sin 63^0\ 26' &= 9{,}9515389 - 10 \\ + \log.\ tg\ 77^0\ 24' &= 0{,}6506710 \\ \hline & \ 0{,}6022099 \end{aligned}$$

Die Gestalt ist also: $\pi 4O2$. num. $m = 4$.

Will man m aus dem Zonenverband ableiten, so kann man die Zone $\infty O \infty : \pi mO2 : \pi 3O^3/_2$ berücksichtigen, die in der Fig. 1, Taf. IV durch die Buchstaben $\underline{a} : \underline{s} : \underline{e'}$ fixirt ist. Da bei dieser Zone die obere Würfelfläche, d. h. die Projectionsebene, mit in Betracht kommt, so wird die Rechnung etwas umständlicher, als wenn wir die anderen Würfelflächen und anliegende tautozonale Flächen der Dyakisdodekaëder herangezogen hätten. Wir wollen jedoch zur Uebung den schwierigeren Weg einschlagen.

Die Fläche $\underline{v'}$ von $\pi \infty O2$ geht in der Projection von $2a : \infty b$.* Die Gestalt $\pi mO2$ liegt mit ihren Flächen $\underline{s'}$ und $\underline{s}$ mit $\underline{v'}$ in einer Zone, geht also jedenfalls auch von $2a$ aus, aber nach einem zu bestimmenden mb. Die Fläche $\underline{e'}$ der Gestalt $\pi 3O^3/_2$ bildet nun mit $\underline{a}$

* Zur besseren Unterscheidung sind auch hier die Axen v.r.o mit a, b, c bezeichnet. Man hat dabei nicht zu vergessen, dass $a = b = c$ ist.

von $\infty O \infty$ eine Kante, die durch $\underline{s}$ von $\pi m O 2$ mit parallelen Combinationskanten abgestumpft wird, folglich liegen $\underline{e}'$, $\underline{s}$, $\underline{a}$ in einer Zone.

Es sind zunächst die Coordinaten des Zonenpunktes von $\underline{a}$ und $\underline{e}'$ zu bestimmen.

Die Fläche $\underline{a}$ geht von $\infty a : \infty b : c$, die Fläche $\underline{e}'$ von $^3/_2 a : 3b : c$. Man hat also $\mu = 0$, $\nu = 0$; $\mu_{,} = {}^2/_3$, $\nu_{,} = {}^1/_3$.

$$\frac{{}^1/_3 - 0}{0 \cdot {}^1/_3 - {}^2/_3 \cdot 0}\, a : \frac{0 - {}^2/_3}{0 \cdot {}^1/_3 - {}^2/_3 \cdot 0}\, b = \frac{{}^1/_3}{0({}^1/_3 - {}^2/_3)}\, a : \frac{-{}^2/_3}{0({}^1/_3 - {}^2/_3)}\, b =$$

$= -\frac{a}{0} : \frac{b}{{}^1/_2 \cdot 0}$; d. h. der Zonenpunkt liegt in der Unendlichkeit, hat eine unendlich grosse, negative Coordinate a und eine unendlich grosse, positive Coordinate b. Die Richtung jedoch, in welcher der Zonenpunkt in der Unendlichkeit sich befindet, ist gegeben durch eine von $a : 2b$ gehende Linie.

Da die Linie s schon auf der Axe a im Abstand 2 einschneidet, so ist nur der Axenschnitt auf b zu rechnen, und wir haben zu setzen:

$$m = -0,\ n = {}^1/_2 \cdot 0;\ m_{,} = {}^1/_2,\ n_{,} = \varkappa.$$

$$\frac{({}^1/_2 \cdot {}^1/_2 \cdot 0) - (-0 \cdot \varkappa)}{{}^1/_2 \cdot 0 \cdot \varkappa({}^1/_2 - [-0])}\, b = \frac{{}^1/_4 + \varkappa}{{}^1/_4 \varkappa + {}^1/_2 \cdot 0 \cdot \varkappa}\, b.$$

Wird mit $\varkappa$ dividirt, dann $\varkappa = \infty$ gesetzt, so folgt: $\frac{1}{{}^1/_4}\, b = 4b$.

Die Linie geht also von $2a : 4b$, d. h. aus $2a$ der Linie $^3/_2 a : 3b$ parallel. Die Gestalt ist demnach $\pi 4 O 2$.

4. Die letzte Gestalt $r = \pi m O n$ muss berechnet werden. Wir messen $\pi m O n : \pi \infty O 2 = 171^0\ 52'$ und $\pi m O n : \pi m O n$ Kante $B'' = 167^0\ 54'$. Hiermit kann, Fig. 83, ein sphärisches Dreieck gelegt werden, das folgende Stücke enthält:

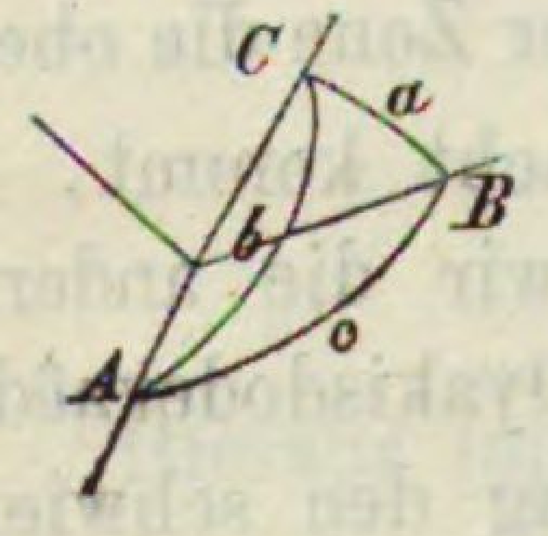


Fig. 83.

$$A = 83^0\ 57'.$$
$$B = 171^0\ 52'.$$
$$C = 90^0.$$

Wir suchen in diesem Dreieck b, d. h. die Neigung der Kante B'' von $\pi m O n$ zur Höhenlinie auf der Fläche von $\pi \infty O 2$. Man hat $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$.

log. cos b = log. cos $8^0\ 8'$ =	N.	9,9956095 — 10
— log. sin $83^0\ 57'$		9,9975743 — 10
b = $174^0\ 33'\ 15''$.	N.	9,9980352 — 10
	N.	$5^0\ 26'\ 45''$.

Da nun die Höhenlinie von $\pi\infty O2$ zur verticalen Hauptaxe unter $63^0\,26'\,6''$ neigt, so bildet die Kante B″ von πmOn mit derselben Hauptaxe einen Winkel von $57^0\,59'\,21''$.

Wir haben alsdann $tg.57^0\,59'\,21'' = n$.

$$\log.\ tg\ 57^0\,59'\,21'' = 0{,}2040281.$$

$$num.\ n = 1{,}6 = {}^8/_5.$$

Zur Berechnung von m geht man in ein Dreieck ein, Fig. 84, welches wie das Dreieck im Falle α der Berechnung des Dyakisdodekaëders liegt. In demselben sind bekannt: $B = 83^0\,57'$. $C = 90^0$. $a = 57^0\,59'\,21''$.

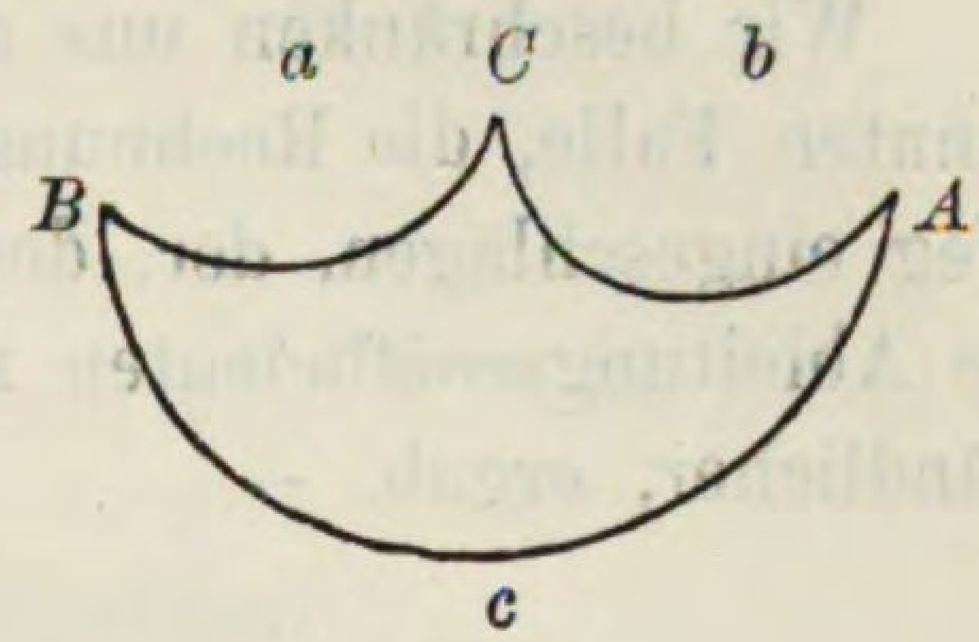


Fig. 84.

Man sucht b, d. i. die Neigung der Kante A″ des Dyakisdodekaëders zur Hauptaxe; es findet sich $tg b = sin a . tg B = m$.

$$\log.\ tg b = \log.\ sin\ 57^0\,59'\,21'' = 9{,}9283691 - 10$$
$$+ \log.\ tg\ 83^0\,57' = 0{,}9747490$$
$$0{,}9031181$$
$$num.\ m = 8.$$

Die Gestalt ist $\pi 8O{}^8/_5$ und die ganze Combination lautet:

$$\pi 3O{}^3/_2,\ \pi\infty O2,\ \pi 4O2,\ \pi 8O{}^8/_5,\ \infty O\infty,\ O.$$

Nachtrag.

Bei den Berechnungen der mOn und $\frac{mOn}{2}$ in Combinationen (auch die Berechnung von $\frac{mOn}{2}$ aus Kenntniss von A′ und C′ gehört hierher, vergl. p. 117) kommt es vor, dass die Kante A und ihre Neigung zu einer der Hauptaxen, z. B. der vertical gerichteten, die Hauptelemente der Rechnung sind.

Man kann alsdann dieselbe auch durchaus mit rechtwinkeligen Dreiecken führen, wenn man von der Neigung der Kante A zur verticalen Hauptaxe, zu der von A zur rhombischen Zwischenaxe, die im horizontalen Hauptschnitt sich befindet, übergeht.

Durch ein rechtwinkeliges Dreieck ist sowohl die Kante A″, vergl. Fig. 33 und p. 103, als auch deren Neigung zur rhombischen Zwischenaxe zu berechnen. Ferner ist die Neigung von A″ zu der vom Mittelpunkt nach vorn gerichteten Hauptaxe zu ermitteln, und die Neigung der Kante B des Holoëders zu dieser Hauptaxe darzustellen. Die Tangente des ersteren Winkels ergibt $^{m}/_{na}$, die des letzteren $^{1}/_{na}$.

Wir beschränken uns auf diese Andeutungen, welche, in dem genannten Falle, die Rechnung etwas vereinfachen und haben oben einen Weg eingeschlagen, der, den Bedürfnissen des Anfängers entsprechend, die Ableitungscoëfficienten m und n direct, wenn auch ein wenig umständlicher, ergab. —

II. Quadratisches System.

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse.

Die Krystalle des quadratischen Systems haben fünf Hauptschnitte, von denen einer der Reductionsebene des basischen Endflächenpaares entspricht, während die vier anderen durch die Reductionsebenen der Flächenpaare der ersten und zweiten Säule dargestellt werden. Diese letzteren vier Hauptschnitte sind tautozonal und schneiden sich unter gleichen Winkeln, der erstere steht auf ihnen senkrecht.

Wir nehmen zu Axenebenen vorab stets den einen Hauptschnitt, der der Reductionsebene des basischen Endflächenpaares entspricht und von den vier anderen, nach unserer Wahl, zwei, die sich unter 90° schneiden.

Lassen wir die so erhaltenen drei auf einander senkrechten Axenebenen zum Schnitt kommen, so entstehen drei senkrechte Axen, von denen die zwei in der Ebene der Basis liegenden a, a gleich gross und von der dritten, c, verschieden sind. Diese dritte Axe c, die demnach vertical steht, sprechen wir als Hauptaxe an (ihr entspricht auch die optische Axe) und bezeichnen die Axen a, a als Nebenaxen. Zwischen den beiden Nebenaxen können wir uns dann, in der Ebene der Basis, noch Axen b oder Zwischenaxen denken, die die Winkel von 90°, welche jene mit einander bilden, halbiren. Man kann sich diese Zwischenaxen vorstellig machen als Schnittlinien der vorhin nicht zu Axenebenen erwählten zwei, auch unter 90° geneigten Hauptschnitte mit der Basis. Somit hätten alle fünf Hauptschnitte Verwendung zu Axenebenen gefunden. Man nennt die zwei Schnitte, gelegt durch die Axe c und je eine der Axen a, normale Hauptschnitte, bezeichnet als diagonale Hauptschnitte diejenigen zwei, welche durch c und je eine Axe b gehen und hat schliesslich, in dem Schnitte durch die Axen a und b, den basischen Hauptschnitt.

Stellen wir die Hauptaxe vertical, die eine der Nebenaxen (oder die eine der Zwischenaxen) auf den Beobachter zu verlaufend und die andere der Nebenaxen (oder die andere der Zwischenaxen) von rechts nach links sich erstreckend, so genügen alle vollflächigen Gestalten des quadratischen Systems der Symmetrieforderung gebildet zu sein:

„Oben, wie unten und, davon verschieden, aber unter sich gleich: vorn, wie hinten, wie rechts, wie links."

Man stellt, nachdem man sich über die Wahl der Axen schlüssig gemacht hat, stets die Hauptaxe vertical, die eine Nebenaxe auf den Beobachter zu und die andere von rechts nach links sich erstreckend.

Wie wir sahen, sind die Axen a, a und c alle unter 90° zu einander geneigt, ein Umstand, der aus der Rechtwinkeligkeit der sie erzeugenden Axenebenen folgt. Ferner erweisen sich die Nebenaxen als gleich gross und von der Hauptaxe verschieden; es leitet sich dies Verhalten aus dem durch die Symmetrie des Systems bedingten Werth der zwei unter sich gleichartigen Axenebenen ab, welcher von dem der dritten Axenebene, die zu den beiden ersten senkrecht steht, verschieden ist.

Wir wollen diese allgemeine Betrachtung auf den Grundkörper des Systems, die quadratische Pyramide, übertragen.

Stellen wir uns eine solche in richtiger Stellung vor, so wendet sie ein Paar der acht unter einander gleichen Scheitel- oder Polkanten auf uns zu, während die vier Seiten- oder Randkanten in der Ebene der Basis liegen. In dieser Stellung genügt die Pyramide der Symmetrieforderung des quadratischen Systems und es verbinden die vier Randecken die Nebenaxen, die zwei Polecken, die Hauptaxe. Auf Grund der Symmetrie kann nun jede quadratische Pyramide durch einen Schnitt, der in dreierlei Art geführt werden kann, so getheilt werden, dass sie in zwei gleiche Hälften zerlegt wird. Nur einer dieser Schnitte erfüllt aber die Bedingung, dass jede Hälfte vier gleiche Winkel in den Polkanten besitzt, sowie davon verschieden, aber unter sich gleich, vier Winkel gebildet durch die Flächen der Pyramide und die Schnittfläche. Dieser Schnitt führt durch die Randkanten, die Winkel derselben halbirend und muss ein Quadrat sein, d. h. gleich lange, rechtwinkelige und sich im Mittelpunkt halbirende Diagonalen besitzen. — Jeder der beiden anderen Schnitte, die man durch die Polkanten der Pyramide legen kann, theilt diese zwar auch in zwei gleiche Hälften, allein die Winkel der Polkanten einer solchen Theilpyramide sind nur zu je zweien einander gleich, während die vier Winkel, gebildet von den Flächen der Pyramide und der Schnittfläche, alle unter einander gleich

sind. Die letzteren Schnitte müssen daher Rhomben sein, d. h. zwei ungleich lange, rechtwinkelige, sich im Mittelpunkt halbirende Diagonalen besitzen.

Da diese Diagonalen aber geradezu die Axen a, a, c des Grundkörpers selbst sind, so folgt für dieselben Rechtwinkeligkeit und für zwei derselben, die Nebenaxen, gleiche Grösse, sowie Verschiedenheit von der dritten, der Hauptaxe. Nennt man die Nebenaxen $a = a = 1$,* so ist $c >$ oder < 1 und diese Länge ist für die Grundform eines jeden quadratischen Krystalls besonders zu bestimmen.

Man habe z. B. am Zirkon den Randkantenwinkel von P durch sorgfältige Messungen zu 84° 19′ 46″ gefunden, so ist das Axenverhältniss:

$$a : a : c = 1 : 1 : 0{,}640373,$$

denn man hat, Fig. 85, ein sphärisches Dreieck mit:

$$B = 42^0\ 9'\ 53''.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 45^0.$$

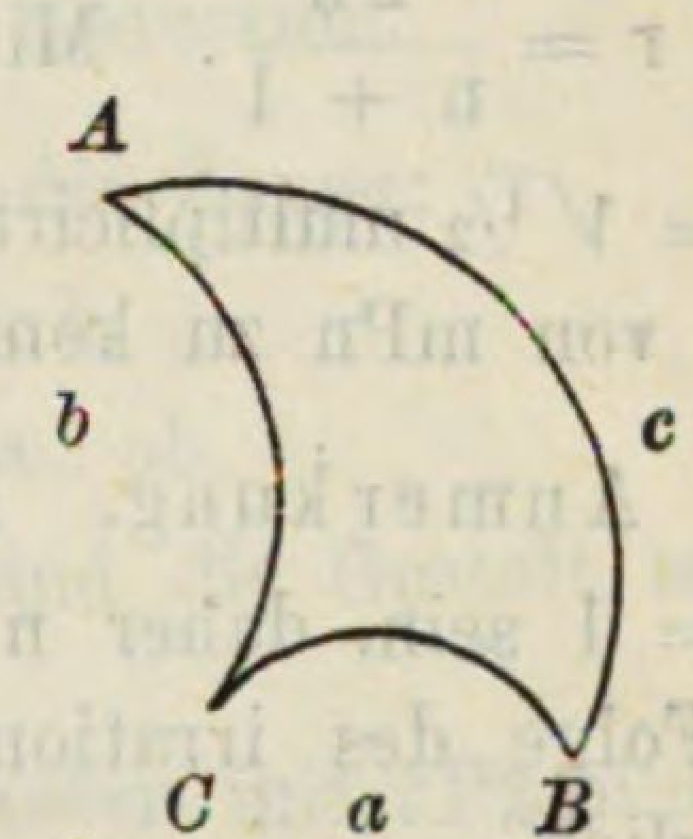


Fig. 85.

In diesem Dreieck ist a gleich der Neigung der Randkante zur Nebenaxe in der Basis. Man sucht b, d. h. die Neigung der Polkante zur Nebenaxe und findet $\text{tg}\,b = \sin a \,.\, \text{tg}\,B = c$.

$$\log.\ \text{tg}\,b = \log.\ \sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$+ \log.\ \text{tg}\ 42^0\ 9'\ 53'' = 9{,}9569476 - 10$$
$$9{,}8064326$$
$$\text{num.}\ c = 0{,}640373.$$

— Was die Zwischenaxen anlangt, die von geringerer Bedeutung sind, so ist ihre Ausmündungsstelle bei mP in der Mitte der Randkanten, bei $mP\infty$ in den Randecken, bei mPn an den im basischen Schnitt liegenden Endpunkten der Polkanten Y.

Um für mPn ihre Länge zu bestimmen, diene folgende Ueberlegung.

Es sei gegeben die Gleichung einer der zwei im Octanten der positiven Halbaxen liegenden Flächen von mPn durch:

$$x + \frac{y}{n} + \frac{z}{mc} = 1;$$

ferner die Gleichungen der auf der Grenze der Octanten v.r.o und v.r.u liegenden Zwischenaxe:

$$z = o\ ;\ x - y = o.$$

* Wir verstehen in der Folge unter „Axen“ immer, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, hier, wie im regulären und den folgenden Systemen, die vom Mittelpunkt ausgehenden Halbaxen.

Alsdann hat man für die Coordinaten des Schnittpunktes von Fläche und Zwischenaxe:

$$x = y = \frac{n}{n+1}.$$

Da aber die Centrodistanz des Schnittpunktes $= x\sqrt{2}$ ist, so beträgt die Länge der Zwischenaxe:

$$R = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}.$$

Diese Länge geht für P über in $\sqrt{1/2}$. Zieht man vorstehenden Werth aus obigem Ausdruck heraus, so ist der Coëfficient der Zwischenaxe $r = \frac{2n}{n+1}$. Mit diesem Werth muss die halbe Zwischenaxe von $P = \sqrt{1/2}$ multiplicirt werden, um auf die Länge der halben Zwischenaxe von mPn zu kommen.

Anmerkung. Für die regelmässig achtseitige Pyramide würde $R = 1$ sein, daher $n = 1 + \sqrt{2}$ werden. Derartige Pyramiden sind in Folge des irrationalen Werthes von n in der Krystallwelt unmöglich.

2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen.

Zum Ausgangspunkt der Betrachtungen wählen wir die Entwickelung einer Combination des Idokrases, wie sie Naumann, Elem. d. theor. Kryst. 1856. p. 173, Fig. 56 gibt. — Tafel IV. Fig. 3. —

Nimmt man e als Grundpyramide an, so bestimmen sich b und r als zwei mP mit $m > 1$. Die Gestalt o ist P∞, weil sie die Polkanten von P gerade abstumpft, die Gestalt u ist 2P∞, weil ihre Polkanten durch die Flächen von P gerade abgestumpft werden. M bestimmt sich zu ∞P∞, d zu ∞P, f zu ∞Pn, P zu oP. Die Gestalten x und z gehören der Zone P : ∞P∞ an; aus der Analogie der Gestalten mOm des regulären Systems, die tautozonal zwischen O und ∞O∞ liegen, können wir schliessen, das Zeichen ersterer Gestalten sei mPm. Endlich sind noch zwei mPn, nämlich a und e vorhanden, von denen e tautozonal mit z und f liegt, diese drei Gestalten haben also den Werth n in ihrem Zeichen gleich und gemeinsam.

1. Man beginnt mit der Projection von P, P∞, 2P∞, ∞P∞ und ∞P auf oP, Tafel IV, Fig. 4, und wendet sich dann zur Gestalt b. Eine Fläche $\underline{b}$ derselben fällt in die Zonen:

$\underline{M} : \underline{u}$; Coord. des Zonenp.: $\frac{1}{2}a : ob.$ *

$\underline{c} : \underline{d}$; Coord. des Zonenp.: $\infty a : -\infty b$.

Der Schnitt auf der Axe a ist also bekannt = $\frac{1}{2}a$ und die Aufgabe, den Schnitt auf b zu finden, löst sich ohne alle Rechnung, da man aus $\frac{1}{2}a$, parallel der Sectionslinie a : b eine Gerade zu ziehen hat; dieselbe wird die Axe b ebenfalls in dem Abstand $\frac{1}{2}$ treffen. Wir haben demnach $b = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c = 2P$ gefunden. Wollte man dies Resultat durch die Rechnung bestätigen, so hätte man, unter Berücksichtigung der Coordinaten der Zonenpunkte, zu setzen:

$$m = 2 \,,\, n = \varkappa \quad ; \quad m_{,} = o \,,\, n_{,} = -o$$

und erhielte für den Axenschnitt auf b, da der auf a bereits bekannt ist:

$$\frac{(o.\varkappa) - (2.-o)}{\varkappa.-o\,(o-2)}\, b = \frac{1}{2}\, b \text{ nach der Reduction.}$$

2. Die Gestalt z fällt mit der Fläche $\underline{z}$ in die Zonen:

$\underline{M} : \underline{c}$; Coord. des Zonenp. $o a : b$.

und: $\underline{u} : \underline{b}$; Coord. des Zonenp. $\frac{1}{2}a : ob$.

Die Sectionslinie geht daher von $\frac{1}{2}a : b$ und die Gestalt selbst ist : $\frac{1}{2}a : b : c = 2P2$.

3. Die Gestalt f, horizontale Combinationskanten mit 2P2 bildend, ist $\infty P2$.

4. Die Gestalt a liegt mit der Fläche $\underline{a}$ in den Zonen:

$\underline{u} : \underline{c}$; Coord. d. Zonenp. $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$.

$\underline{o} : \underline{z}$; Coord. d. Zonenp. $a : -b$.

Wir haben daher: $m = 2 \,,\, n = 2 \quad ; \quad m_{,} = 1 \,,\, n_{,} = -1$.

$$\frac{(1.2)-(2.-1)}{2.1\,(2-[-1])}\, a : \frac{(1.2)-(2.-1)}{2.-1\,(1-2)}\, b =$$

$$= \frac{4}{6}\, a : \frac{4}{2}\, b = \tfrac{2}{3}a : 2b : c = \tfrac{3}{2}P3.$$

5. Die Gestalt e ist, wie wir oben sahen, vom Zeichen mP2, weil mit z und f in einer Zone gelegen. Wäre b = P, so würde e in Bezug auf P ein mPm sein und zwar 2P2. Es folgt dies aus der Zone M : b. Nun ist aber b nicht P selbst, sondern 2P, folglich wird $\underline{e}$ zu $4P2 = \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}b : c$.

6. Die Gestalt x ist vom Zeichen mPm, weil sie in der Zone M : e liegt; die Coordinaten des Zonenpunktes sind $o a : b$. Zur völligen Bestimmung ist zu berücksichtigen, dass die normale Polkante von $\underline{x}$ liegt, wie die von e, was sich aus der Zone e, x, $\underline{x}$, $\underline{e}$ ergibt,

* **In der Projection sind die Axen v . r mit a, b bezeichnet, der besseren Unterscheidung wegen; man wolle berücksichtigen, dass a = b ist. —**

also in $^1/_4$a. Die Sectionslinie geht daher von $^1/_4$a : b, d. h. die Fläche von $^1/_4$a : b : c, woraus sich das Zeichen 4P4 ergibt.

7. Die letzte Gestalt ist eine Pyramide mP = $\underline{r}$. Auch ihre Polkante liegt in $^1/_4$a, wie aus der Zone $\underline{x}$, $\underline{e}$, $\underline{r}$ folgt. Als Pyramide der ersten Art muss sie daher gehen von $^1/_4$a : $^1/_4$b : c, d. h. = 4P sein.

Die ganze Combination lautet also: P, 2P, 4P, ∞P, P∞, 2P∞, ∞P∞, oP, 2P2, 4P2, ∞P2, 4P4, $^3/_2$P3. Eine Einsicht in den Zonenzusammenhang der Gestalten gewährt die Projection auf Tafel IV, in Fig. 4.

— Ehe wir zur Betrachtung der wichtigsten Zonen des quadratischen Systems überhaupt übergehen, wird es nicht unzweckmässig sein, zu untersuchen, in welche quadratische Formen die Hauptrepräsentanten der sieben einfachen Körper des regulären Systems zerfallen, wenn eine Axe, z. B. die auf der Projectionsebene senkrecht stehende, von der Einheit verschieden wird. Zur Unterstützung dieser Betrachtungen und zur Uebung wolle man die Fig. 4, Tafel I heranziehen und sich in dieser Projection die Axen a und b gleich gross und rechtwinkelig, sowie die Axe c von a = b verschieden, aber senkrecht auf der Projectionsebene, vorstellen.

Man erhält alsdann folgende Uebersicht:

1.	O	des regulären Systems wird zu:	a	:	a	:	c	=	P.
2.	∞O∞	„ „ „ „ „	a	:	a	:	∞c	=	∞P∞.
			∞a	:	∞a	:	c	=	oP.
3.	∞O	„ „ „ „ „	a	:	∞a	:	c	=	P∞.
			a	:	a	:	∞c	=	∞P.
4.	2O2	„ „ „ „ „	2a	:	2a	:	c	=	$^1/_2$P.
			$^1/_2$a	:	a	:	c	=	2P2.
5.	∞O2	„ „ „ „ „	2a	:	∞a	:	c	=	$^1/_2$P∞.
			$^1/_2$a	:	∞a	:	c	=	2P∞.
			a	:	2a	:	∞c	=	∞P2.
6.	2O	„ „ „ „ „	a	:	2a	:	c	=	P2.
			$^1/_2$a	:	$^1/_2$a	:	c	=	2P.
7.	3O$^3/_2$	„ „ „ „ „	$^3/_2$a	:	3a	:	c	=	$^2/_3$P2.
			$^2/_3$a	:	2a	:	c	=	$^3/_2$P3.
			$^1/_3$a	:	$^1/_2$a	:	c	=	3P$^3/_2$.

Diese Betrachtungen werden wir bei der nun folgenden Untersuchung der Hauptzonen des quadratischen Systems mit Nutzen verwerthen können. Zur Einsicht fertigen wir uns, Tafel IV,

Fig. 5, eine Projection von P, $\frac{1}{2}$P, ∞P, P∞, 2P∞, ∞P∞ auf oP an. Alsdann sind folgende Zonen besonders wichtig:

a. Die Hauptaxenzone. Alle Gestalten, die der Hauptaxe parallel gehen, kommen in Betracht. Der Zonenpunkt ist der Projectionsmittelpunkt. Die möglichen Gestalten sind: ∞P∞, ∞Pn, ∞P.

b. Die Nebenaxenzonen. Sie sind in der Zahl zwei vorhanden und begreifen in sich die Gestalten, welche mit ihren Flächen einer Nebenaxe parallel gehen. In der Projection stellen sich diese Zonen als zwei Systeme von parallelen Linien dar, die den entsprechenden zwei Nebenaxen parallel gerichtet sind. Die möglichen Gestalten sind: oP, nP∞ ($n < 1$), P∞, mP∞ ($m > 1$), ∞P∞.

c. Die Zwischenaxenzonen sind gleichfalls in der Zahl zwei vorhanden, und es gilt für sie das soeben Gesagte in Bezug auf die Zwischenaxen. Es kommen in diesen Zonen folgende Gestalten vor: oP, nP ($n < 1$), P, mP ($m > 1$), ∞P.

d. Die Polkantenzonen von P. Es gibt deren vier. Sie begreifen folgende Gestalten in sich: ∞P∞, mPm, P, Pn, P∞. Eine derselben ist in der Projection mit K. Z. v. P. bezeichnet. — Im regulären Systeme waren diese Zonen in der Zahl sechs als Kantenzonen des Oktaëders vorhanden und enthielten: ∞O∞, mOm, O, mO, ∞O.

e. Die Diagonalzonen von P. Sie sind, wie die vorigen, zu vier vorhanden. In der Projection ist diejenige mit den Coordinaten $\frac{1}{2}$a : $\frac{1}{2}$b mit D. Z. v. P. bezeichnet. Sie werden am Krystalle durch die Höhenlinien der Flächen von P angezeigt. Es fallen in diese Zonen P, 2P∞ und ∞P, ferner aber zwei Arten von mPn, nämlich solche, die zwischen P und 2P∞ liegen und andere, die sich zwischen 2P∞ und ∞P befinden. Wir wollen die allgemeinen Zeichen dieser zwei Arten von mPn herleiten.

α. mPn, gelegen zwischen P und 2P∞.

In der Diagonalzone der Grundform tritt mPn mit zwei Flächen auf, folglich werden in jedem Diagonalzonenpunkt zwei Sectionslinien zu finden sein. Gehen wir von dem Diagonalzonenpunkt im positiven Quadranten aus und berücksichtigen die Sectionslinie, welche a im kleineren, b im grösseren Abstand schneidet.* Da mPn zwischen P und 2P∞ liegt, so wird der Axenschnitt auf $a > \frac{1}{2} < 1$, der auf $b < \infty > 1$ sein.

Denkt man sich nun die Sectionslinie, parallel sich selbst herausgerückt bis nach a, so geht die derselben entsprechende Fläche von

* Die Axen v.r.o sind zur Unterscheidung mit a, b, c bezeichnet. Es ist nicht zu vergessen, dass a = b ist.

a : nb : mc. So lange sich die Sectionslinie aber noch in dem Diagonalzonenpunkt befand, ging die ihr entsprechende Fläche durch c in der Einheit, folglich auch von $1/ma : n/mb$.

Zur Bestimmung des Axenschnittes der Sectionslinie auf b, welcher in Werthen von m auszudrücken ist, sind gegeben:

1. Der Axenschnitt der Sectionslinie auf a.C.d. Z.: $1/ma : o\,b$.
2. Die Coord. d. Diagonalzonenp.: $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$.

Die Sectionslinie liegt in diesen beiden Punkten, folglich wird der Schnitt auf b in bekannter Weise dargestellt werden können.

Man hat: $m = m$, $n = \varkappa$; $m_, = 2$, $n_, = 2$.

$$\frac{2.\varkappa - m.2}{\varkappa.2(2-m)} b = \frac{1}{2-m} b \text{ nach der Reduction.}$$

Nun ist aber der Axenschnitt auf $b = \frac{n}{m}$, folglich erhalten wir:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{2-m}; \text{ woraus } n = \frac{m}{2-m} \text{ folgt.}$$

Das allgemeine Zeichen ist daher: $mP\frac{m}{2-m}$. P und $2P\infty$, die Grenzgestalten, stehen vorab unter demselben, dann aber auch beispielsweise: $\frac{3}{2}P3$, $\frac{4}{3}P2$, $\frac{5}{3}P5$.

β. mPn, gelegen zwischen $2P\infty$ und ∞P.

Die Lage der Sectionslinien ist so, dass der Schnitt auf $a > o < \frac{1}{2}$ ist, während der auf b sich zwischen den Grenzen $> o < -\infty$ bewegt. Die Flächenlage ist $1/ma : -n/mb : c$. Für den Schnitt auf b folgt, der vorigen Rechnung entsprechend: $\frac{1}{2-m}$.

Dies Mal ist aber, da der negative Zweig von b in Betracht kommt: $-\frac{n}{m} = \frac{1}{2-m}$, daher $n = \frac{m}{m-2}$.

Das allgemeine Zeichen ist daher: $mP\frac{m}{m-2}$. Ausser den Grenzgestalten $2P\infty$ und ∞P stehen: 4P2, $5P\frac{5}{3}$ unter diesem Zeichen; auch ein mPm, nämlich 3P3, nimmt an dieser Zone Theil, wie man leicht ersieht, wenn man den Schnitt auf $b = -1$ setzt; man erhält dann $-1 = \frac{1}{2-m}$, d. h. $m = 3$.

f. Die Polkantenzonen von $P\infty$. Dieselben sind gleichfalls in der Zahl vier vorhanden. In der Projection ist die eine, der die Coordinaten a : b zukommen, mit K. Z. v. $P\infty$ bezeichnet. Es fallen in diese Zonen die Flächen von $P\infty$, ∞P und $\frac{1}{2}P$, dann liegen zwei

Arten von mPn in denselben, nämlich solche, die zwischen $\frac{1}{2}P$ und $P\infty$ und solche, die zwischen $P\infty$ und ∞P fallen.

α. mPn, gelegen zwischen $\frac{1}{2}P$ und $P\infty$.

Soll wieder, wie früher, auf a das kleinere, auf b das grössere Stück abgeschnitten werden, so ist die Lage der Sectionslinie so, dass der Schnitt auf $a > 1 < 2$, der auf $b < \infty > 2$ ist.

Die im Zonenpunkt mit den Coordinaten a : b liegende Sectionslinie entspricht einer Fläche, welche geht von xa : yb : c, worin x und y nicht bekannt sind. Wird die Sectionslinie, parallel sich selbst zurück gerückt, bis sie nach a kommt, so wird die Fläche jetzt jedenfalls von a : nb : mc gehen, worin dies Mal $m < 1$ ist, also ging sie früher, als die Sectionslinie noch in der ursprünglichen Lage war, von $\frac{1}{m}a : \frac{n}{m}b : c$.

Die Sectionslinie, welche auf a mit dem Werthe $\frac{1}{m}$ einschneidet, ist in Bezug auf ihren Axenschnitt b zu berechnen. Es sind zur Bestimmung gegeben:

1. Der Axenschnitt auf a. Coord. d. Z.: $\frac{1}{m}a : ob$.
2. Die Coord. des Kantenzonenpunktes: a : b.

Man hat daher: $m = m$, $n = \varkappa$; $m_{,} = 1$, $n_{,} = 1$.

$$\frac{1.\varkappa - m.1}{\varkappa.1(1-m)}\,b = \frac{1}{1-m}\,b \text{ nach der Reduction.}$$

Nun ist aber der Axenschnitt auf $b = \frac{n}{m}$, folglich erhalten wir:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{1-m}\text{; woraus } n = \frac{m}{1-m} \text{ folgt.}$$

Das allgemeine Zeichen ist daher: $mP\frac{m}{1-m}$. Ausser $\frac{1}{2}P$ und $P\infty$ stehen unter demselben beispielsweise: $\frac{2}{3}P2$, $\frac{3}{4}P3$.

β. mPn, gelegen zwischen $P\infty$ und ∞P.

Der Schnitt der Sectionslinie erfolgt auf der Axe a derartig, dass stets ein Stück $> o < 1$ abgeschnitten wird, auf der Axe b bewegt sich die Sectionslinie zwischen den Grenzen $> o$ und $< -\infty$. Die Flächenlage ist $\frac{1}{m}a : -\frac{n}{m}b : c$, der Schnitt auf b wird $= \frac{1}{1-m}$, wie vorhin. Dies Mal ist aber $-\frac{n}{m} = \frac{1}{1-m}$ zu setzen, woraus $n = \frac{m}{m-1}$ folgt.

Das allgemeine Zeichen ist daher: $mP\frac{m}{m-1}$ und es stehen, ausser $P\infty$ und ∞P, die Gestalten: $\frac{3}{2}P3$, $2P2$, $\frac{5}{2}P\frac{5}{3}$, $3P\frac{3}{2}$, $4P\frac{4}{3}$ unter demselben.

Hiermit wären die wichtigsten Zonen des quadratischen Systems und die in ihnen auftretenden Gestalten untersucht.

3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss.

a. Die Pyramiden mP.

Man bezeichnet die Winkel der Polkanten mit X, die der Randkanten mit Z.

α. Gegeben der Winkel in den Polkanten X.

Man lege, Fig. 86, ein sphärisches Dreieck, das:

$$A = \tfrac{1}{2}X.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 45^0 \text{ enthält.}$$

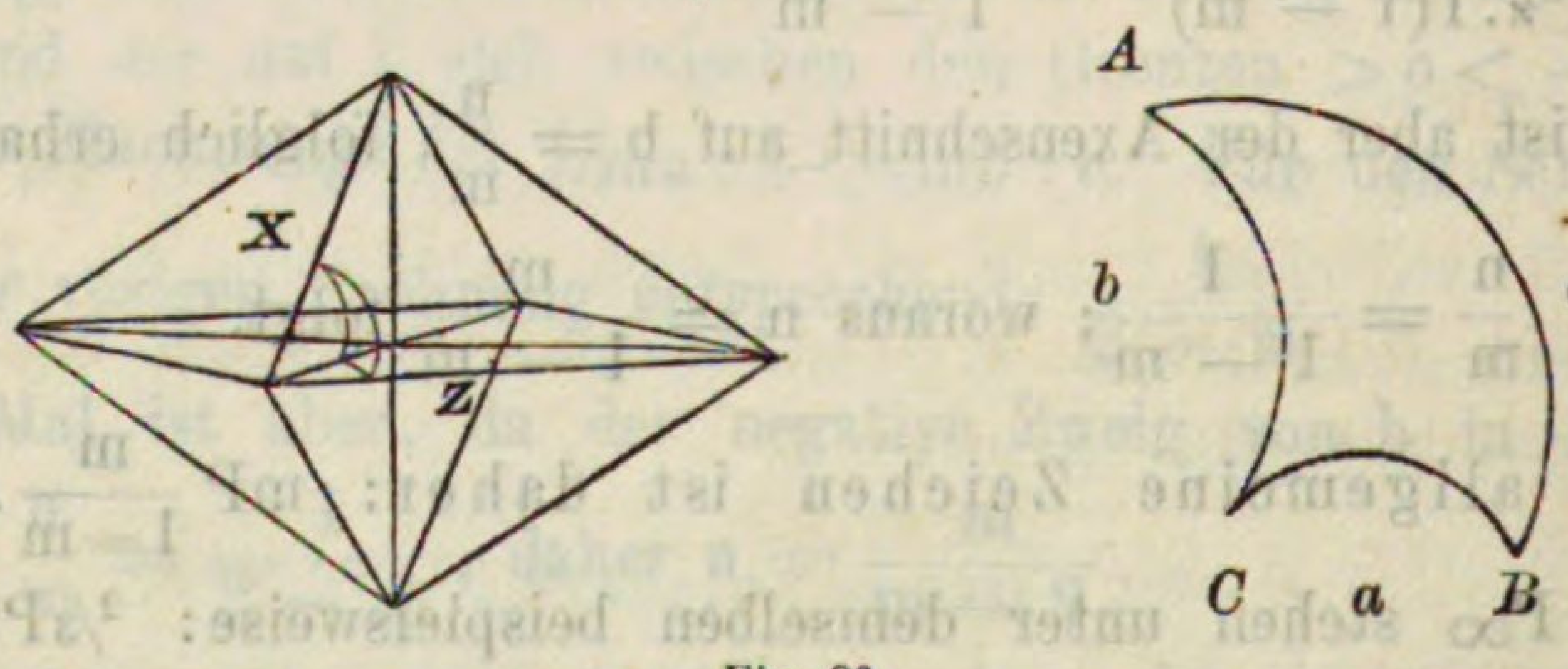


Fig. 86.

In demselben ist $\sin b = \operatorname{cotg} A$ und $\operatorname{tg} b = mc$. Betrachtet man die zu berechnende Pyramide als P, so ist $\operatorname{tg} b = c$.

Beispiel. Am Anatas ($c = 1{,}77713$) kommt eine Pyramide vor, deren Polkantenwinkel $= 152^0\ 22'$ ist; das Zeichen der Pyramide ist zu berechnen.

Man hat in dem zu legenden sphärischen Dreieck: $A = 76^0\ 11'$.
$C = 90^0$.
$a = 45^0$.

$$\log.\sin b = \log.\operatorname{cotg} 76^0\ 11' = 9{,}3908151 - 10.$$
$$b = 14^0\ 14'\ 23''.$$
$$\log.\operatorname{tg} 14^0\ 14'\ 23'' = 9{,}4044519 - 10$$
$$\text{num. } mc = 0{,}253777.$$

Vergleicht man dies Resultat mit c = 1,77713, so resultirt m = $^1/_7$; die Pyramide ist daher $^1/_7$P. — Bei grösseren Rechnungen schlägt man den log. num. c ein für alle Male auf und subtrahirt ihn von dem log. tg b, um sodann nach der Formel $\frac{\text{tg b}}{\text{c}}$ = m, direct den Ableitungscoëfficienten zu erhalten.

β. Gegeben der Winkel in den Randkanten Z.

In demselben Dreieck, Fig. 86, sind nun bekannt:

$$B = \tfrac{1}{2}Z.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 45^0.$$

Man findet tg b = sin a . tg B = mc. Ist die Pyramide P selbst, so ist tg b = c.

Beispiel. Am Zirkon (c = 0,640373) messe der Randkantenwinkel einer zu berechnenden mP = 122° 12′. Alsdann ist im sphärischen Dreieck: B = 61° 6′.
C = 90°.
a = 45°.

log. tg b = log. sin 45° = 9,8494850 — 10
+ log. tg 61° 6′ = 0,2580376
0,1075226
num. mc = 1,28092.

Vergleichen mit c von P, resultirt m = 2; die Pyramide ist somit 2P.

b. Die Pyramiden mP∞.

Man bezeichnet die Winkel der Polkanten mit Y, die der Randkanten mit Z.

α. Gegeben der Winkel in den Polkanten Y.

Man ziehe die Höhenlinie auf einer Fläche und lege, Fig. 87, ein sphärisches Dreieck mit:

$$A = \tfrac{1}{2}Y.$$
$$B = 45^0.$$
$$C = 90^0.$$

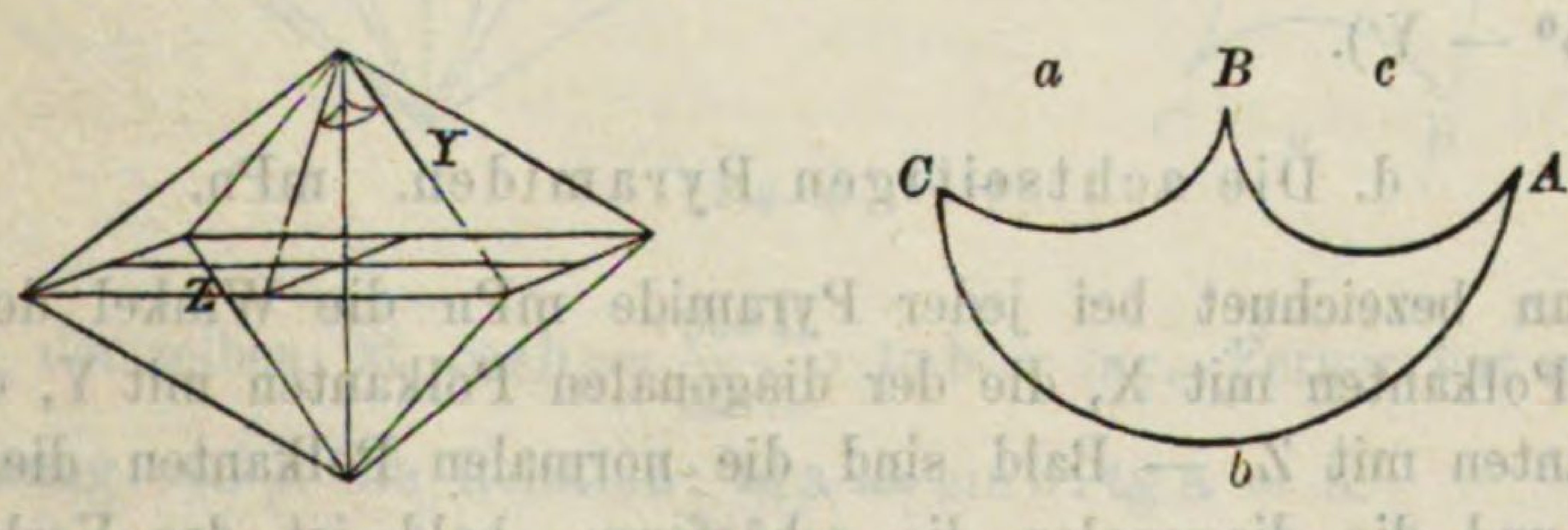


Fig. 87.

Man findet $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$; cotg a = mc.

Liegt P∞ selbst vor, so ist cotg a = c.

Beispiel. Am Kupferkies ($c = 0{,}98525$) sei gemessen der Polkantenwinkel von $mP\infty = 101^0\ 49'$.

Alsdann hat man zur Berechnung ein Dreieck mit: $A = 50^0\ 54^1/_2{}'$. $B = 45^0$. $C = 90^0$.

$$\begin{aligned} \log.\cos a = \log.\cos 50^0\ 54^1/_2{}' &= 9{,}7997284 - 10 \\ -\log.\sin 45^0 &= 9{,}8494850 - 10 \\ \hline &\ \ 9{,}9502434 - 10 \\ a &= 26^0\ 54'\ 21''. \end{aligned}$$

$\log.\operatorname{cotg} = 26^0\ 54'\ 21'' = 0{,}2946008$; num. $mc = 1{,}9706$.

Verglichen mit c von P resultirt $m = 2$, die Pyramide ist daher $= 2P\infty$.

β. Gegeben der Winkel in den Randkanten Z.

Da die Nebenaxen in der Mitte der Randkanten münden, vergl. Fig. 87, so ist $\operatorname{tg} {}^1/_2 Z = mc$, oder, wenn $P\infty$ vorliegt $= c$.

c. Die Prismen und das Pinakoid.

Von diesen Gestalten bedürfen ∞P, $\infty P\infty$ und oP keiner Berechnung; es bleiben nur die Prismen ∞Pn übrig.

Berechnung der Prismen ∞Pn.

Man bezeichnet bei denselben die Winkel in den normalen Hauptschnitten (an den Nebenaxen) mit X, die Winkel in den diagonalen Hauptschnitten (an den Zwischenaxen) mit Y.

α. Gegeben der Winkel im normalen Hauptschnitt X, oder die Combinationskante zu $\infty P\infty = X'$.

Ist X gegeben, so hat man $\operatorname{tg} {}^1/_2 X = n$. Ist X′ gegeben, so ist $\operatorname{tg}(X' - 90^0) = n$.

β. Gegeben der Winkel im diagonalen Hauptschnitt Y oder die Combinationskante zu $\infty P = Y'$.

Ist Y gegeben, so erhält man durch $\operatorname{tg}(135^0 - {}^1/_2 Y)$ den Ableitungscoëfficienten n. Bei gegebenem Y′ erhält man n durch $\operatorname{tg}(225^0 - Y')$.

d. Die achtseitigen Pyramiden. mPn.

Man bezeichnet bei jeder Pyramide mPn die Winkel der normalen Polkanten mit X, die der diagonalen Polkanten mit Y, die der Randkanten mit Z. — Bald sind die normalen Polkanten die stumpferen und die diagonalen die schärferen, bald ist das Verhältniss umgekehrt; es hängt dies vom Werthe von n ab. Zur Einsicht stellen wir uns den Quadrant vorn rechts einer Projection * von mP und

* In dieser Projection ist die verticale Axe = mc gesetzt. —

mP∞ auf oP vor, Fig. 88, und denken uns die regelmässig achtseitige Pyramide, die in der Krystallwelt nicht vorkommt, gleichfalls in Projection gelegt. Im vorstehenden Viereck o.v.r.v sind alsdann die Winkel $v + v = r = 135^{0}$; daher ist $\text{tg}\, 67\frac{1}{2}^{0} = n$. Ausgerechnet

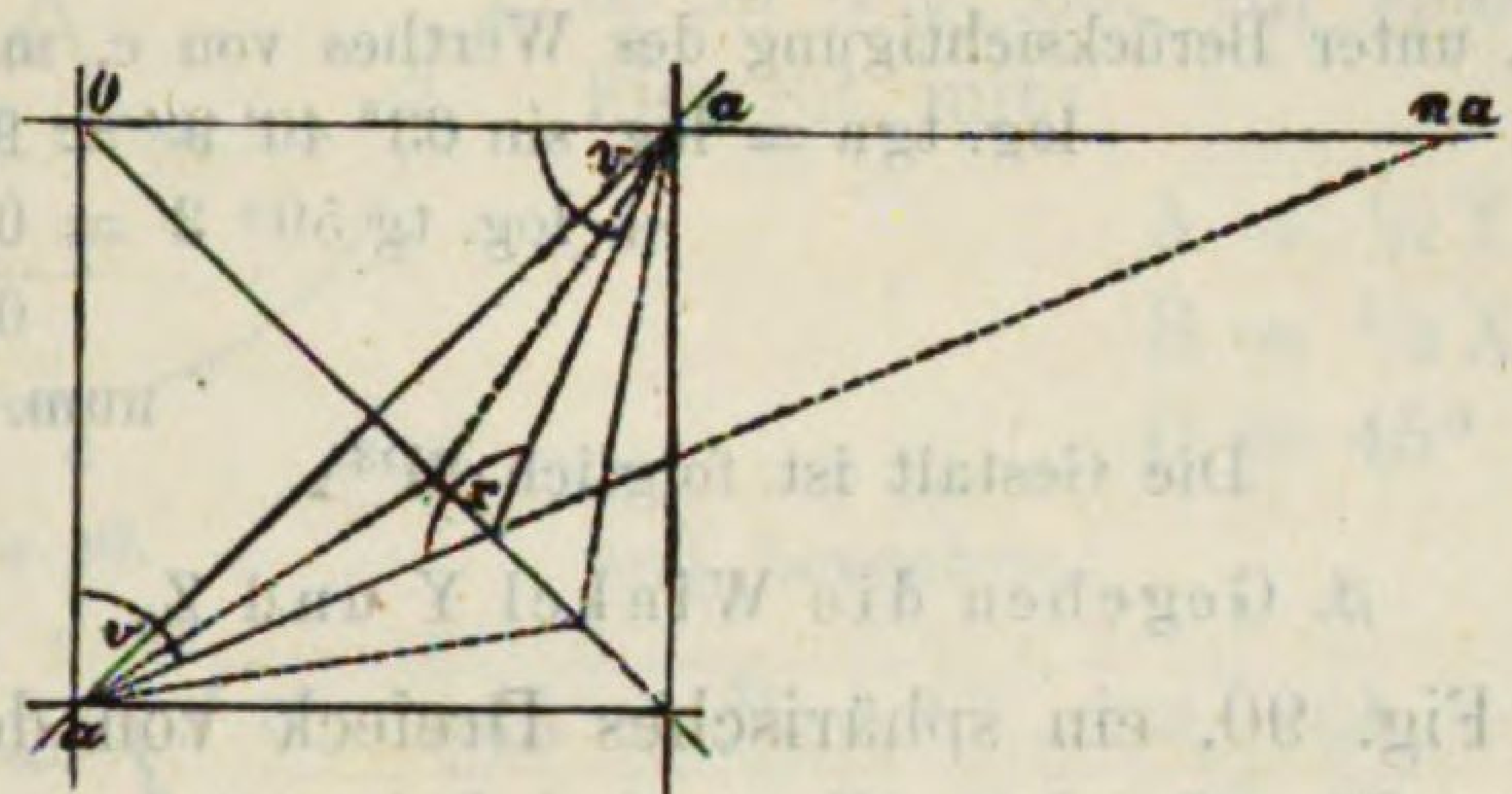


Fig. 88.

findet sich $n = 2{,}41421$. Es ist dies der irrationale Werth von n der regelmässig achtseitigen Pyramide. Alle mPn, deren $n > 2{,}41421$ ist, haben ihre stumpferen Polkanten im normalen Hauptschnitt, ihre schärferen im diagonalen; für alle mPn mit $n < 2{,}41421$ gilt das Umgekehrte.

a. Gegeben die Winkel X und Z.

Man lege, Fig. 89, ein sphärisches Dreieck 1. mit:

$$A = \tfrac{1}{2} X.$$
$$B = \tfrac{1}{2} Z.$$
$$C = 90^{0}.$$

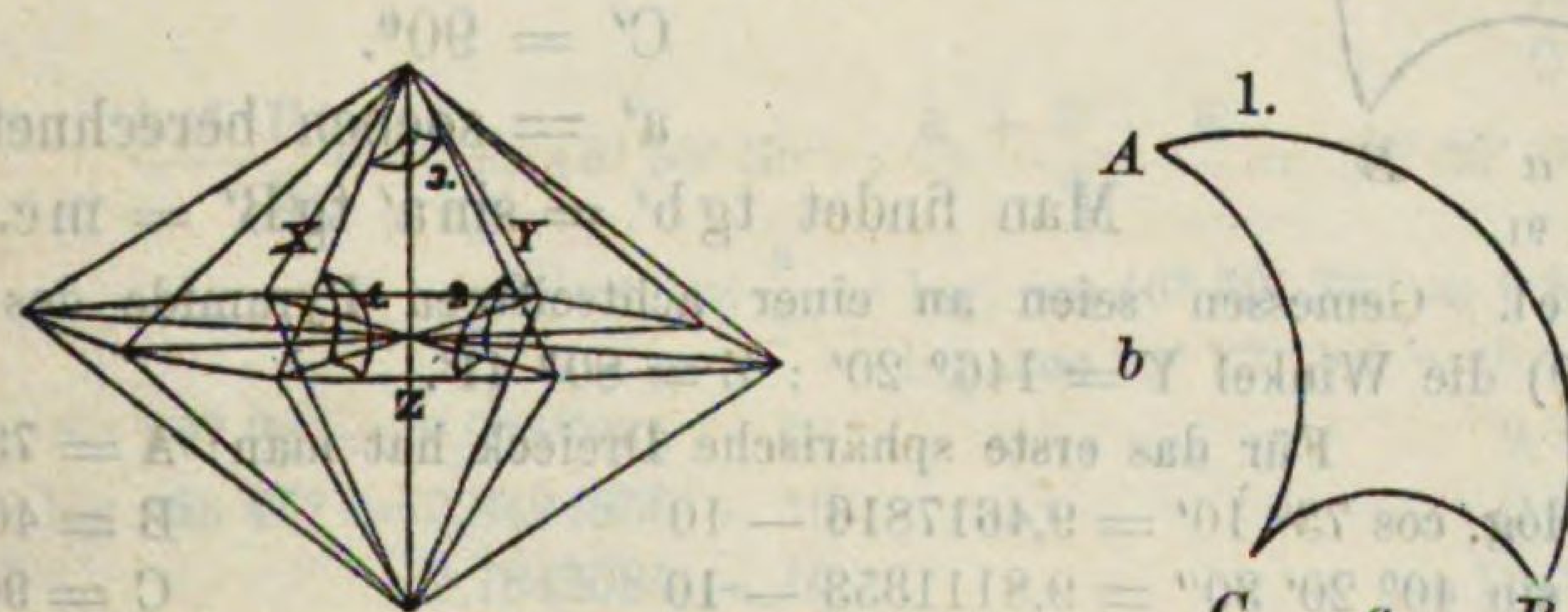


Fig. 89.

In demselben ist $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$; $\text{tg}\, b = mc$. Ferner hat man zur Berechnung von n die Relation: $\text{tg}\, a = \sin b \,.\, \text{tg}\, A = n$.

Beispiel. Gegeben sei am Zinnstein ($c = 0{,}672394$) eine achtseitige Pyramide zur Berechnung, deren Kanten $X = 118^{0}\ 6'$, $Z = 135^{0}\ 17'$ messen. Alsdann hat man ein sphärisches Dreieck mit: $A = 59^{0}\ 3'$.

$$B = 67^{0}\ 38'\ 30''.$$
$$C = 90^{0}.$$

$$\log.\cos b = \log.\cos 67^0\ 38'\ 30'' = 9{,}5802381 - 10$$
$$-\log.\sin 59^0\ 3' = 9{,}9332931 - 10$$
$$9{,}6469450 - 10$$
$$\log.\operatorname{tg} 63^0\ 40'\ 9'' = 0{,}3054821 \qquad b = 63^0\ 40'\ 9''.$$
$$\text{num. } mc = 2{,}02061.$$

Hieraus folgt, unter Berücksichtigung des Werthes von c, $m = 3$.

$$\log.\operatorname{tg} a = \log.\sin 63^0\ 40'\ 9'' = 9{,}9524282 - 10$$
$$+\log.\operatorname{tg} 59^0\ 3' = 0{,}2220851$$
$$0{,}1745133$$
$$\text{num. } n = 1{,}494 = {}^3/_2.$$

Die Gestalt ist folglich $3P^3/_2$.

β. Gegeben die Winkel Y und Z.

Man lege, Fig. 90, ein sphärisches Dreieck von der Position des Dreiecks 2., Fig. 89. In demselben sind bekannt:

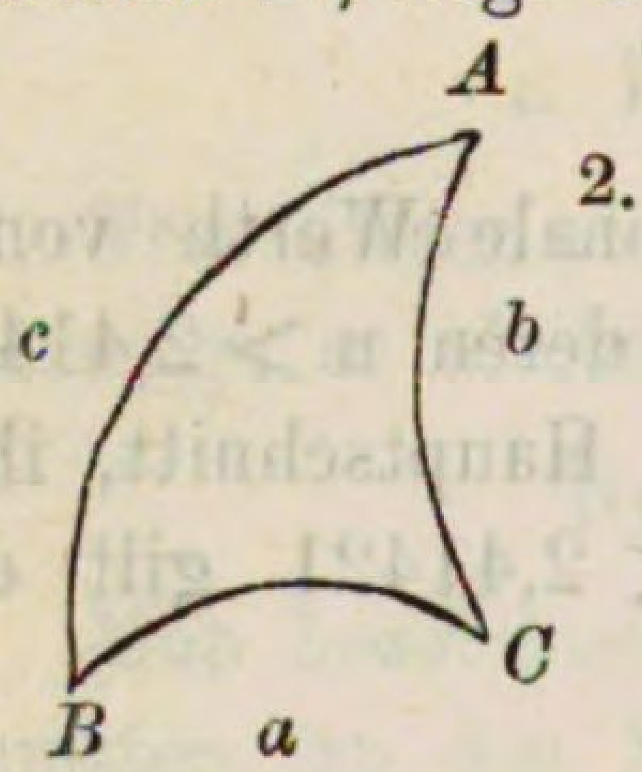


Fig. 90.

$$A = {}^1/_2 Y.$$
$$B = {}^1/_2 Z.$$
$$C = 90^0.$$

Man hat alsdann $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$. Nennt man ferner a′ die Neigung von Z gegen die Nebenaxe in der Basis, so ist $a' = 180^0 - (45^0 + a)$ und $\operatorname{tg} a' = n$.

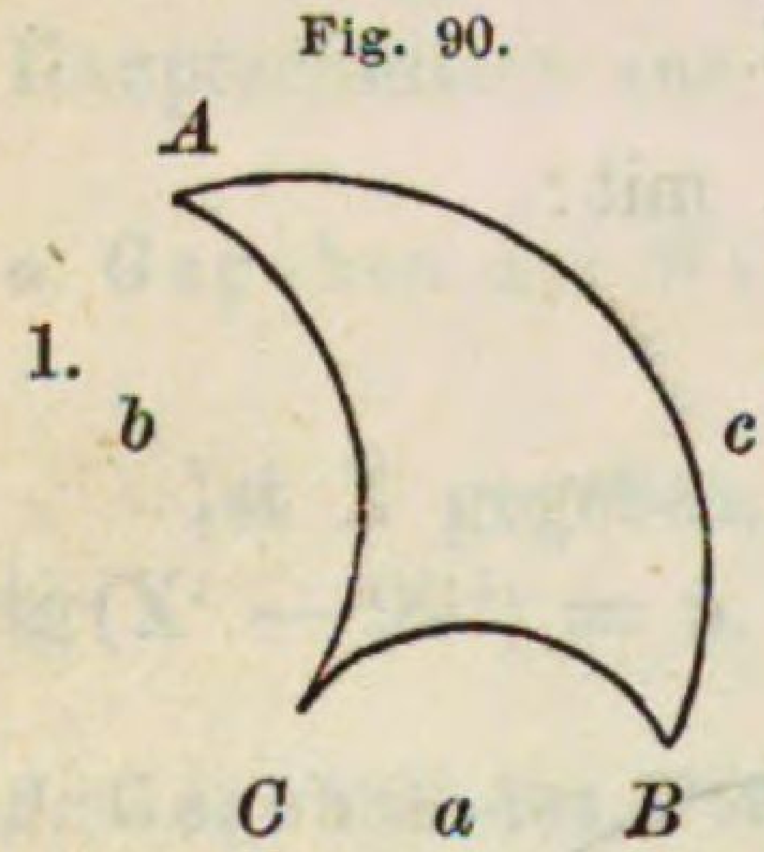


Fig. 91.

Zur Ermittelung von m hat man in ein zweites Dreieck, Fig. 91, einzugehen, das liegt wie Dreieck 1., in Fig. 89. In diesem Dreieck sind bekannt:

$$B' = {}^1/_2 Z.$$
$$C' = 90^0.$$
$$a' = \text{soeben berechnet.}$$

Man findet $\operatorname{tg} b' = \sin a' \operatorname{tg} B' = mc$.

Beispiel. Gemessen seien an einer achtseitigen Pyramide des Idokrases ($c = 0{,}53719$) die Winkel $Y = 146^0\ 20'$; $Z = 80^0\ 41'$.

Für das erste sphärische Dreieck hat man: $A = 73^0\ 10'$.

$$\log.\cos a = \log.\cos 73^0\ 10' = 9{,}4617816 - 10 \qquad B = 40^0\ 20'\ 30''.$$
$$-\log.\sin 40^0\ 20'\ 30'' = 9{,}8111353 - 10 \qquad C = 90^0.$$
$$9{,}6506463 - 10.$$
$$a = 63^0\ 25'\ 35''.$$
$$a' = 180^0 - (45^0 + 63^0\ 25'\ 35'') = 71^0\ 34'\ 25''.$$
$$\log.\operatorname{tg} 71^0\ 34'\ 25'' = 0{,}4773376.$$
$$\text{num. } n = 3.$$

Für das zweite Dreieck ist: $B' = 40^0\ 20'\ 30''$.

$$C' = 90^0.$$
$$\log.\operatorname{tg} b' = \log.\sin 71^0\ 34'\ 25'' = 9{,}9771429 - 10 \qquad a' = 71^0\ 34'\ 25''.$$
$$+\log.\operatorname{tg} 40^0\ 20'\ 30'' = 9{,}9290676 - 10$$
$$9{,}9062105 - 10$$
$$\text{num. } mc = 0{,}80577$$

Verglichen mit c der Stammform folgt $m = {}^3/_2$, es ist daher die Gestalt ${}^3/_2 P3$.

γ. Gegeben die Winkel X und Y.

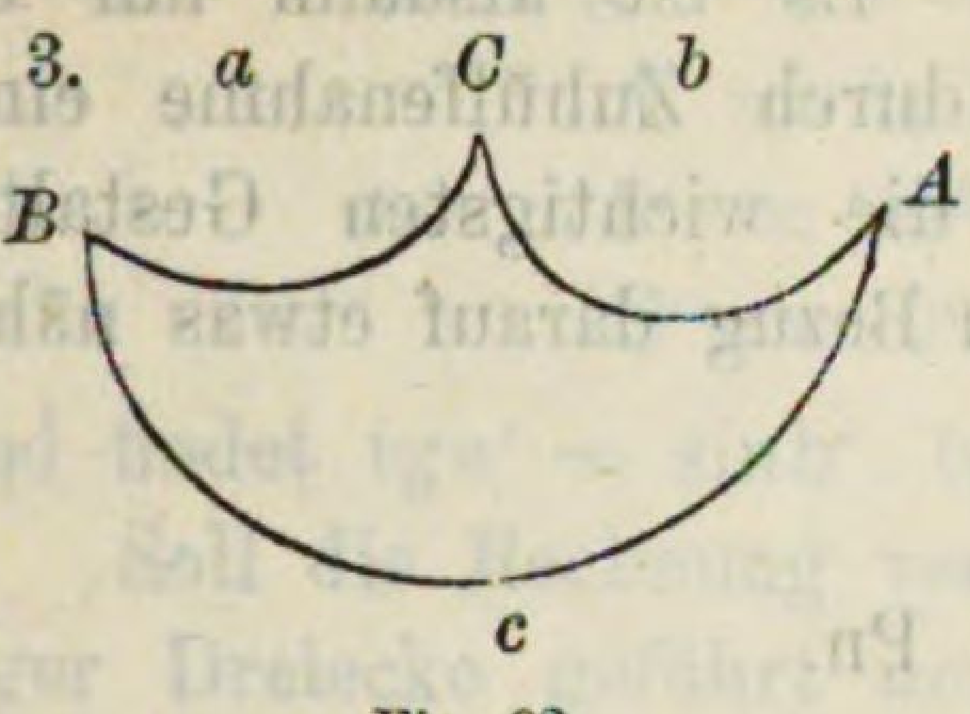


Fig. 92.

Man lege, entsprechend dem Dreieck 3. in Fig. 89, ein sphärisches Dreieck, Fig. 92, mit:

$$A = {}^1/_2 Y.$$
$$B = {}^1/_2 X.$$
$$C = 45^0$$

und berechne:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2 (A + B - C) \cdot \cos {}^1/_2 (A + C - B)}{\sin B \cdot \sin C}}.$$

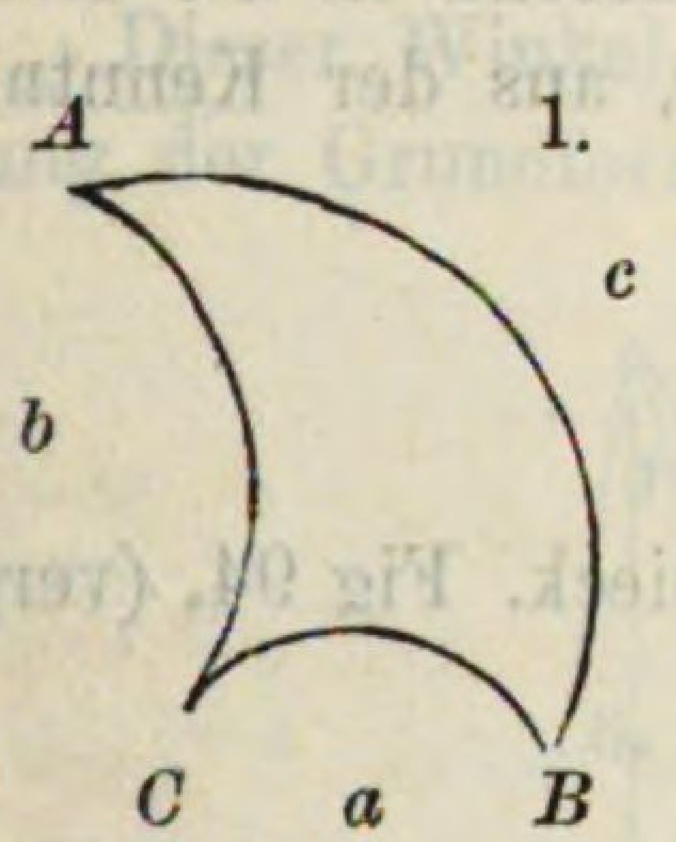


Fig. 93.

Ist a gefunden, so bestimme man $b' = 90^0 - a$, dann ist $\operatorname{tg} b' = mc$.

In einem zweiten sphärischen Dreieck, Fig. 93, von der Lage des Dreiecks 1. in Fig. 89 ist:

$$A' = {}^1/_2 X.$$
$$C' = 90^0.$$
$$b' = \text{soeben berechnet.}$$

Man hat $\operatorname{tg} a' = \sin b' \cdot \operatorname{tg} A' = n$.

Beispiel: Gegeben sei am Rutil ($c = 0{,}64418$) eine achtseitige Pyramide mit $X = 118^0\ 44'$; $Y = 159^0\ 14'$.

Für das erste sphärische Dreieck ist: $A = 79^0\ 37'$.
$B = 59^0\ 22'$.
$C = 45^0$.

$$\frac{A + B - C}{2} = 46^0\ 59'\ 30'' \ ; \ \frac{A + C - B}{2} = 32^0\ 37'\ 30''.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 46^0\ 59'\ 30'' = 9{,}8338511 - 10$$
$$+ \log.\cos 32^0\ 37'\ 30'' = 9{,}9254241 - 10$$
$$9{,}7592752 - 10$$

$$\log.\sin 59^0\ 22' = 9{,}9347235 - 10$$
$$+ \log.\sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$9{,}7842085 - 10$$

$$9{,}7842085 - 10$$
$$19{,}9750667 - 20$$

Daraus $\sqrt{} = 9{,}9875333 - 10$

$$\frac{a}{2} = 13^0\ 39'\ 46''.$$
$$a = 27^0\ 19'\ 32''.$$

$b' = 90^0 - 27^0\ 19'\ 32'' = 62^0\ 40'\ 28''$.

$\log.\operatorname{tg} 62^0\ 40'\ 28'' = 0{,}2867586$.

num. $mc = 1{,}9353$.

Verglichen mit c der Stammform folgt $m = 3$.

Für das zweite sphärische Dreieck ist: $A' = 59^0\ 22'$.
$C' = 90^0$.
$b' = 62^0\ 40'\ 28''$.

$$\log.\operatorname{tg} a' = \log.\sin 62^0\ 40'\ 28'' = 9{,}9486147 - 10$$
$$+ \log.\operatorname{tg} 59^0\ 22' = 0{,}2275434$$
$$0{,}1761581 \quad \text{num. } n = 1{,}5.$$

Die Gestalt ist $3P^3/_2$.

— Kann aus Zonenverhältnissen erkannt werden, dass die mPn ihren Coëfficienten n in Werthen vom m ausdrücken lassen, oder vom Zeichen Pn sind, so vereinfacht sich die Aufgabe. Es ist alsdann nur ein Coëfficient zu berechnen und dies kann durch Zuhülfenahme einer Winkelmessung geschehen. Wir wollen die wichtigsten Gestalten dieser Art, die Pyramiden Pn und mPm in Bezug darauf etwas näher betrachten.

e. Die Pyramiden Pn.

Sie fallen in eine Zone P : P∞, folglich hat ihre normale Polkante dieselben Neigungen zur Hauptaxe und zur Nebenaxe, wie die Polkante von P. Führt man diese Neigungen passend in die Rechnung ein, so kann dieselbe, wie bereits mitgetheilt, aus der Kenntniss eines Kantenwinkels geführt werden.

α. Gegeben der Winkel X.

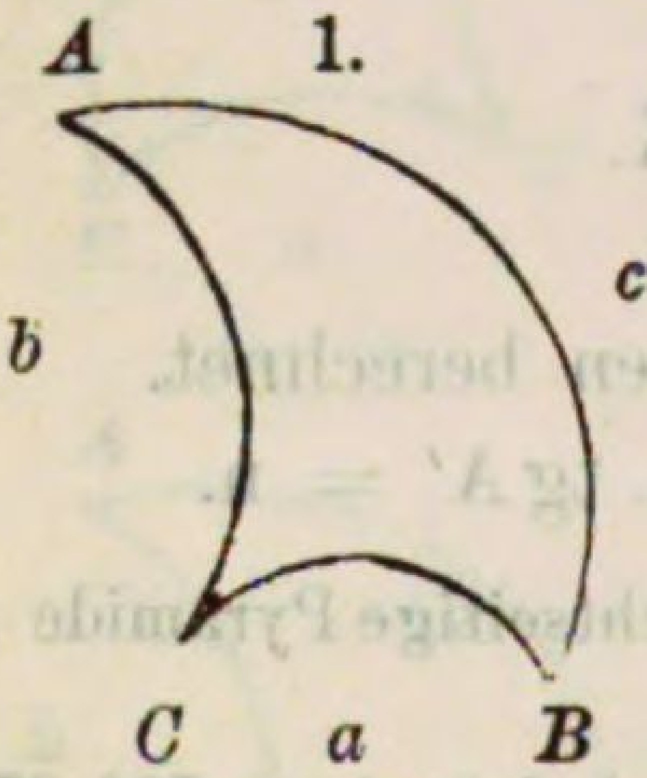


Fig. 94.

In dem sphärischen Dreieck, Fig 94, (vergl. Fig. 89, 1) sind bekannt:

$A = \frac{1}{2} X.$
$C = 90^\circ.$
$b =$ bekannt von P her.

Man hat $\operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} A = n.$

β. Gegeben der Winkel Z.

In demselben Dreieck sind nunmehr gegeben: $B = \frac{1}{2} Z.$
$C = 90^0.$
$b =$ bek. v. P her.

Man hat $\sin a = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{tg} b$; $\operatorname{tg} a = n.$

γ. Gegeben der Winkel Y.

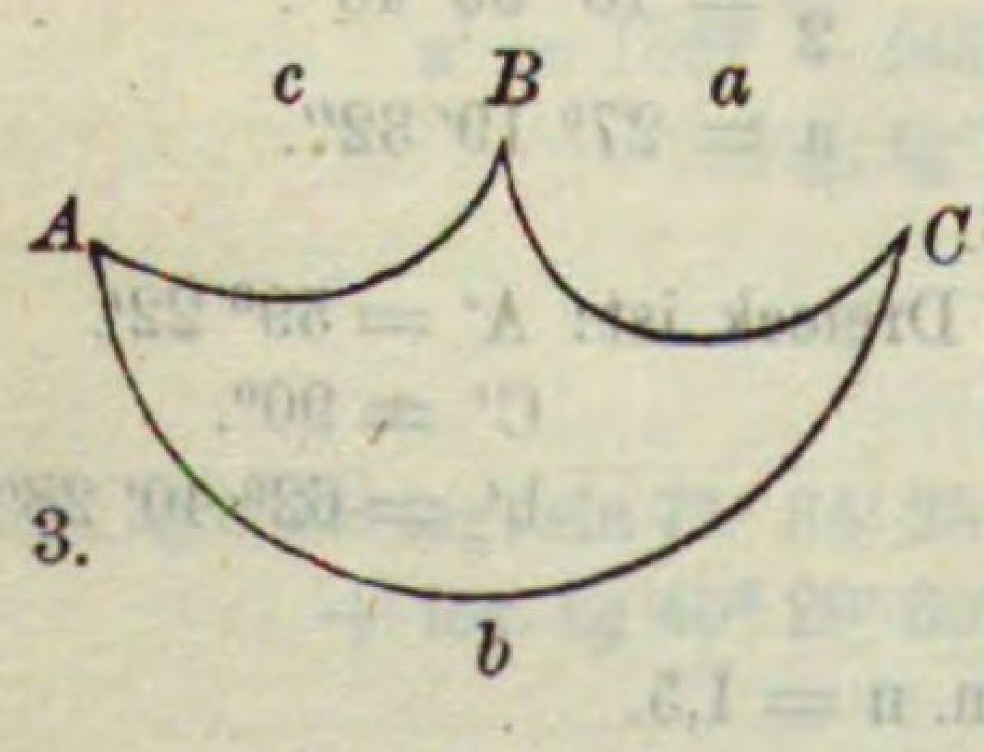


Fig. 95.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 95, von der Lage des Dreiecks 3. in Fig. 89 mit: $B = 45^0.$
$C = \frac{1}{2} Y.$
$c =$ bek. v. P her.

Man hat $\sin(A - \varphi) = \frac{\cos C \cdot \sin \varphi}{\cos B}$,
mit $\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} B \cdot \cos c.$

Der hiermit berechnete Winkel A ist = $\frac{1}{2}$X von mPn. In einem zweiten Dreieck, Fig. 96, das liegt wie Dreieck 1. in Fig. 89, hat man:

$$A' = \tfrac{1}{2} X.$$
$$b' = 90^0 - c.$$
$$C' = 90^0$$

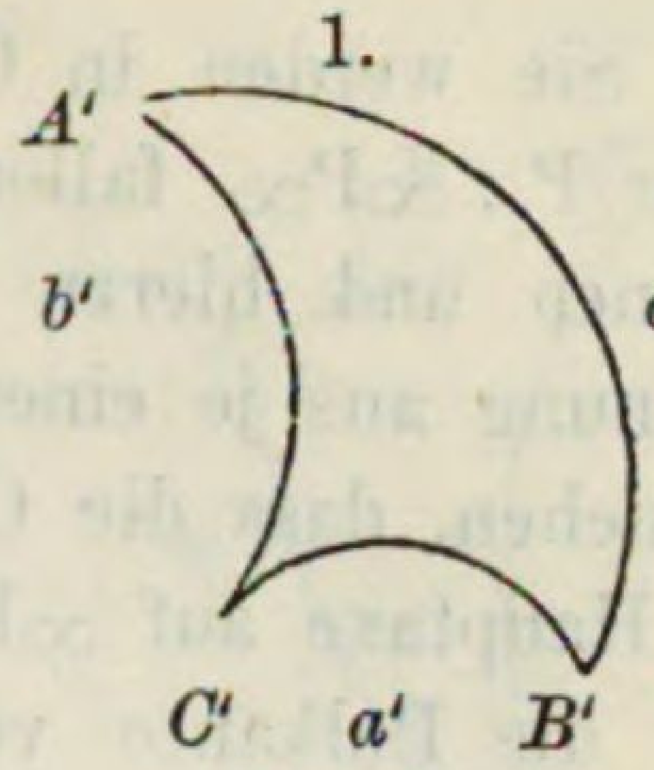


Fig. 96.

und findet $\operatorname{tg} a' = \sin b' \,.\, \operatorname{tg} A' = n$.

Soll die Rechnung vermittelst rechtwinkeliger Dreiecke geführt werden, so ist zu berücksichtigen, Fig. 97, dass die Combinationskante Pn : P zur Combinationskante Pn : P unter demselben ebenen Winkel neigt, unter welchem die Polkante von P zur Polkante von P steht.

Dieser Winkel, er heisse c, ist entweder schon aus der Berechnung der Grundform bekannt, oder kann, wenn dies nicht der Fall

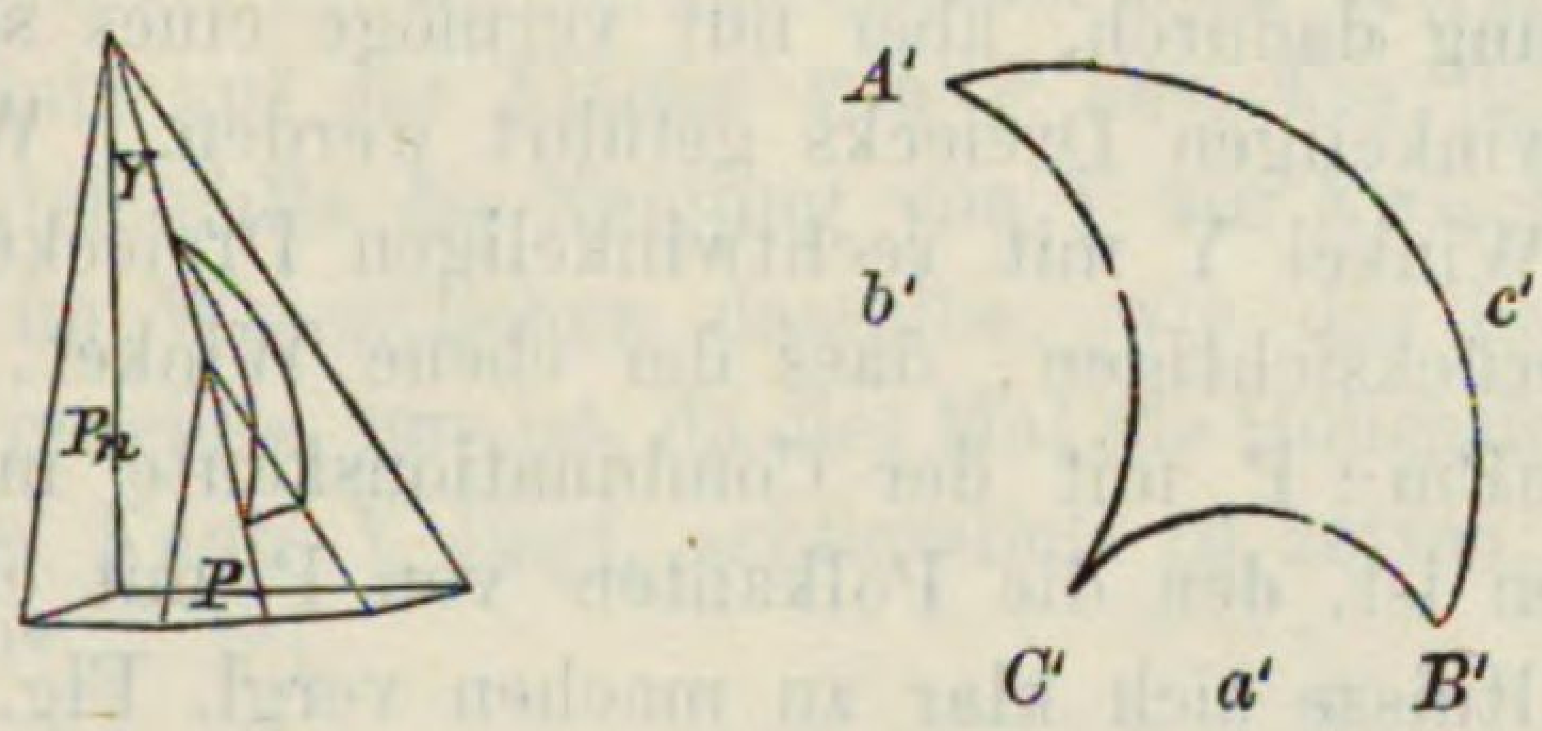


Fig. 97.

leicht berechnet werden durch die Relation: $\cos c = \operatorname{cotg}^2 A$, wobei A den halben Polkantenwinkel von P bedeutet.

Nunmehr ist ein sphärisches Dreieck zu legen, Fig. 97, was folgende Stücke enthält:

$$A' = \tfrac{1}{2} Y.$$
$$C' = 90^0.$$
$$a' = \tfrac{1}{2} c.$$

Man bestimmt $\sin b' = \operatorname{cotg} A' \,.\, \operatorname{tg} a'$ und hat in b', das als stumpfer Winkel zu nehmen ist, die Neigung der Polkante Y zur Höhenlinie auf der Fläche von P; folglich ist die Neigung von Y zur Zwischenaxe in der Basis $b'' = \frac{1}{2}$ Rdkw. von P — $(180^0 - b')$. Mit Y und der Neigung von Y zur Zwischenaxe berechnet man erst die Neigung von Z zur Zwischenaxe durch ein Dreieck, das liegt wie Dreieck 2, Fig. 90 bei der Berechnung von mPn unter β. In demselben sind bekannt:

$$A'' = \tfrac{1}{2} Y.$$
$$C'' = 90^0.$$
$$b'' = \text{soeben berechnet.}$$

Man findet $\operatorname{tg} a'' = \sin b'' \,.\, \operatorname{tg} A''$, setzt $a''' = 180^0 - (45 + a'')$ und erhält $\operatorname{tg} a''' = n$.

f. Die Pyramiden mPm.

Sie werden in Combinationen daran erkannt, dass sie in eine Zone P : ∞P∞ fallen. Es ist nur ein Ableitungscoëfficient zu berechnen und hierzu nur eine Winkelmessung nöthig. Soll die Berechnung aus je einer Kante X, Y oder Z erfolgen, so ist in Betracht zu ziehen, dass die Combinationskante mPm : ∞P∞ zu der Projection der Hauptaxe auf ∞P∞ unter demselben ebenen Winkel neigt, unter dem die Polkante von P zur Hauptaxe steht, oder dass die Combinationskante mPm : ∞P∞ zur Combinationskante ∞P∞ : ∞P∞ unter einem ebenen Winkel neigt, der die Ergänzung der vorigen Neigung zu 180° und gleich der Neigung der Polkante von P zur Nebenaxe + 90° ist.

Mit Hülfe dieser Ueberlegungen findet man die zur Rechnung nöthigen Elemente bei gegebenen Winkeln X und Z. Auch aus Y kann die Rechnung dadurch, aber nur vermöge eines schiefwinkeligen und eines rechtwinkeligen Dreiecks geführt werden. Will man auch bei gegebenem Winkel Y mit rechtwinkeligen Dreiecken operiren, so hat man zu berücksichtigen, dass der ebene Winkel, den die Combinationskante mPm : P mit der Combinationskante mPm : P bildet, gleich demjenigen ist, den die Polkanten von P mit einander bilden. Um diese Verhältnisse sich klar zu machen vergl. Fig. 98.

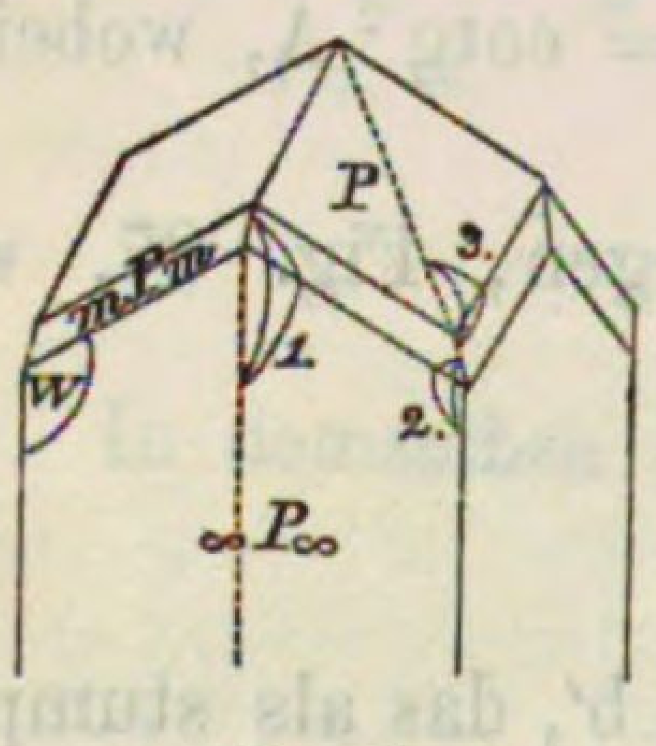


Fig. 98.

α. Gegeben der Winkel X.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 98. 1, was folgende Stücke enthält: A = ½ X.
C = 90°.
a = bek. v. P her.

Man findet sin b = cotg A . tg a, nimmt b als stumpfen Winkel und hat: tg (b — 90°) = = mc.

Anmerkung: In der Praxis werden die mPm am häufigsten aus der Combinationskante zu ∞P∞ allein berechnet. In dem obenstehenden Dreieck 1. sind alsdann bekannt: B = Combk. mPm : ∞P∞.
C = 90°.
a = bekannt von P her.

Es ist tg b = sin a . tg B und man hat schliesslich tg(b — 90°) = = mc.

β. Gegeben der Winkel Y.

Die Auflösung kann auf zwei Arten erfolgen. Berücksichtigen wir zunächst die mit einem schiefwinkeligen und einem rechtwinkeligen

Dreieck, so ist, Fig. 99, ein Dreieck zu legen von der Position des Dreiecks 2. in Fig. 98. In demselben hat man:

$B = 45^0.$

$C = \frac{1}{2}Y.$

$c =$ bekannt v. P. her.

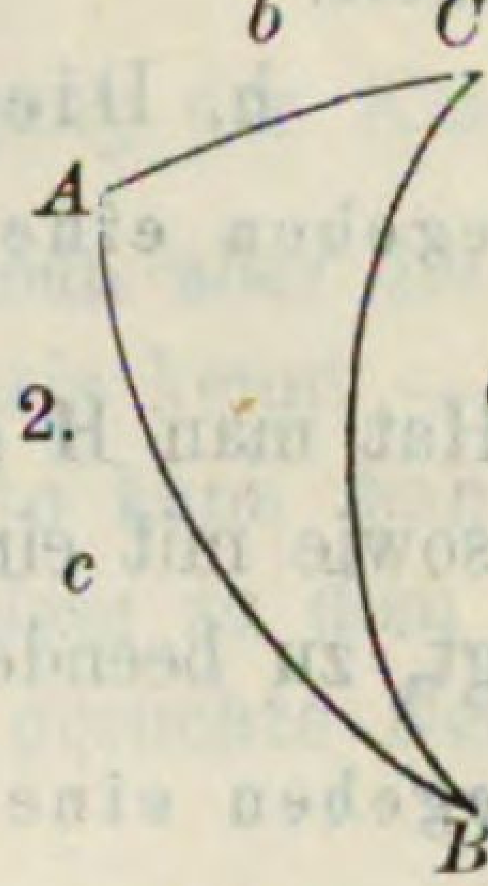


Fig. 99.

Man sucht a und findet:

$\cos(a + \varphi) = - \cot g C . tg B . \cos\varphi,$

mit $\cot g \varphi = tg c . \cos B.$

Bildet man nun $a - 90^0$, so erhält man die Neigung von Y zur Zwischenaxe in der Basis, womit man leicht die Neigung von Z zu derselben und dann zur Nebenaxe findet. Die tg dieser Neigung ist n, was, da die Pyramide eine mPm ist, auch = m zu setzen ist.

Mit rechtwinkeligen Dreiecken rechnet man zuerst die Neigung von Y zur Höhenlinie auf der Fläche von P aus, Fig. 98, Dreieck 3. und stellt daraus gleichfalls die Neigung von Y zur Zwischenaxe dar. Das Verfahren ist im Wesentlichen dasselbe, wie das bei Pn unter γ im letzten Theile gezeigte, nur ist, da dies Mal die Höhenlinie auf der Fläche von P über der Kante Y liegt, schliesslich zu setzen: $b'' = \frac{1}{2}$ Rdkw. von $P + (180^0 - b')$.

γ. Gegeben der Winkel Z.

Man lege, Fig. 100, ein sphärisches Dreieck mit:

$A = \frac{1}{2}Z.$

$C = 90^0.$

$a = w - 90^0.$

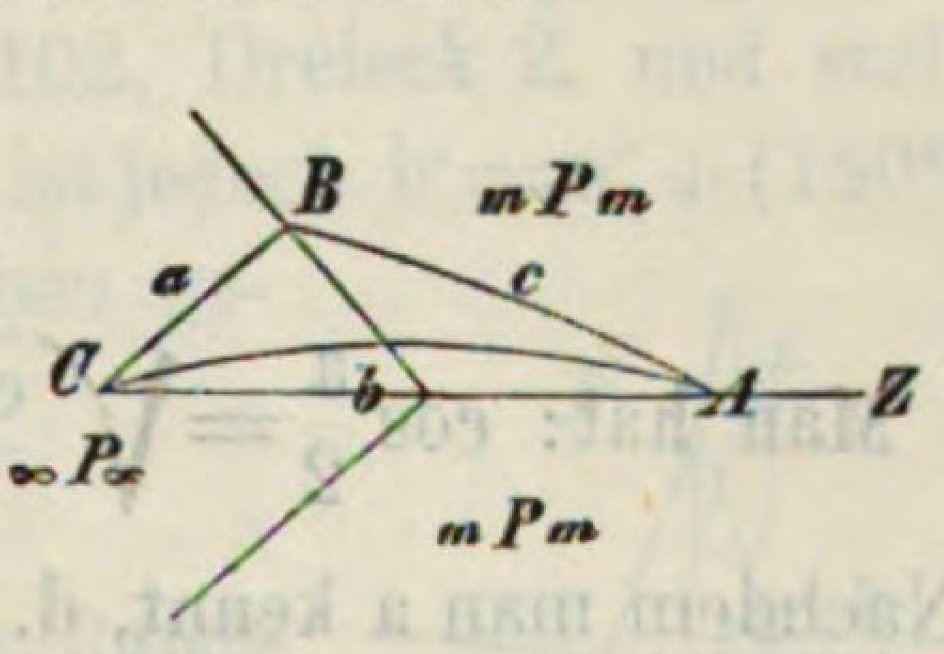


Fig. 100.

Wegen des letzteren ebenen Winkels a, vergleiche Fig. 98; man sieht aus derselben, dass das betreffende Stück identisch mit der Neigung der Polkante von P zur Nebenaxe ist.

Man hat $\sin b = \cot g A . tg a$; b ist als stumpfer Winkel zu nehmen und es wird $tg(b - 90^0) = n$, also, in diesem speciellen Falle, auch = m.

g. Die quadratischen Sphenoide, Skalenoëder und Pyramiden der dritten Art.

Was die Sphenoide anlangt, so ist ihre Berechnung in der der Pyramiden enthalten, wenn man bedenkt, dass von den sechs Kantenwinkeln jener Körper, zwei die Supplemente der Randkanten und vier die Supplemente der Polkanten der sie erzeugenden Gestalten vorstellen.

Die Skalenoëder und Pyramiden der dritten Art kommen nur untergeordnet vor und werden wie Pyramiden mPn in Combinationen behandelt.

h. Die Pyramiden mPn in Combinationen.

α. Gegeben eine eigenthümliche Kante X oder Y und die Combinationskante H zu oP.

Hat man H gemessen, so ist stets $180^0 - H = {}^1/_2 Z$ und hiermit, sowie mit einer der Kanten X oder Y, ist die Rechnung, wie oben gezeigt, zu beenden.

β. Gegeben eine eigenthümliche Kante X, Y oder Z und die Combinationskante O zu P.*

aa. mPn liegt mit 8 Flächen in den Polecken von P.

Gegeben X und O.

Man lege, Fig. 101, ein sphärisches Dreieck 1., das:

A = Combk. O.
B = $^1/_2$X v. mPn.
C = $^1/_2$X v. P enthält.

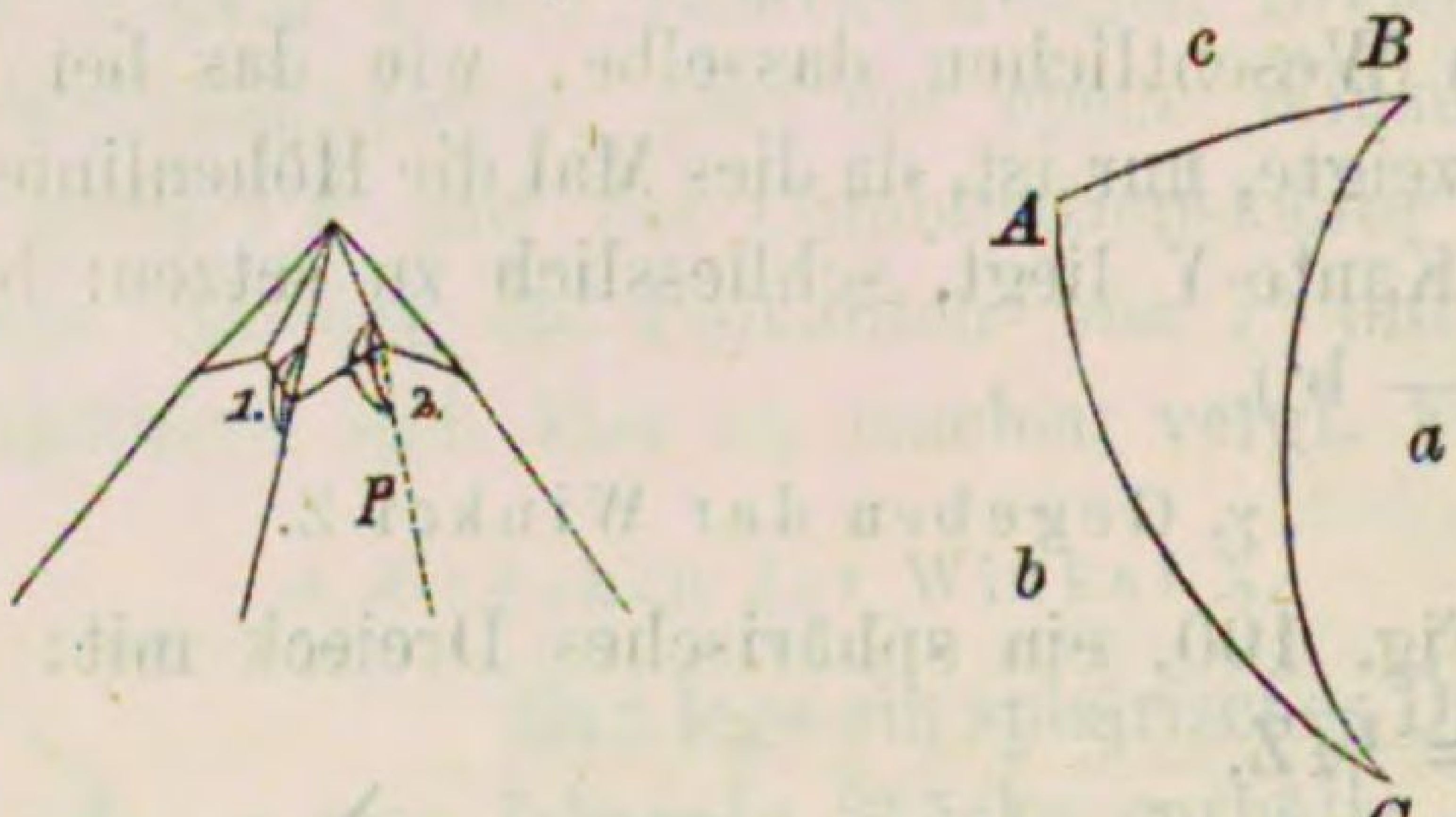


Fig. 101.

$$\text{Man hat: } \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2 (A + B - C) . \cos {}^1/_2 (A + C - B)}{\sin B . \sin C}}.$$

Nachdem man a kennt, d. h. die Neigung der Kante X von mPn zur Polkante von P, kann man auch die Neigung ersterer Kante zur Nebenaxe in der Basis darstellen. Nennt man zu diesem Zwecke die Neigung der Polkante von P zur Nebenaxe in der Basis = n', so ist b', d. i. die Neigung von X zur Nebenaxe $= n' - (180^0 - a)$.

Alsdann hat man $\operatorname{tg} b' = mc$, ferner: $\operatorname{tg} a' = \sin b' . \operatorname{tg} A' = n$, wobei $A' = {}^1/_2 X$ von mPn ist.

Gegeben Y und O.

Man ziehe die Höhenlinie auf einer Fläche von P und lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 101, 2., das:

* In den nunmehr zu betrachtenden Hauptfällen *β*, *γ* und *δ* sind P und P∞ als vorherrschende Gestalten gewählt. Die Rechnungen gelten jedoch auch für alle mP und mP∞.

A = Combk. O.
B = ½Y.
C = 90° enthält.

Man hat $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$ und somit ist die Neigung der Kante Y zur Höhenlinie auf der Fläche von P dargestellt. Da man aber die Neigung der Höhenlinie von P zur Zwischenaxe in der Basis kennt — diese Neigung ist der halbe Randkantenwinkel von P —, so kann man auch die Neigung von Y zur Zwischenaxe darstellen. Heisse zu dem Ende halbe Randkantenwinkel von P = n′, so ist b′, die gesuchte Neigung von Y zur Zwischenaxe = n′ — (180° — a).

Der Fall ist hierdurch im Wesentlichen auf die bei mPn unter β gezeigte Berechnung zurückgeführt: man kennt Y und die Neigung von Y zur Zwischenaxe, rechnet Z und die Neigung von Z zur Zwischenaxe, stellt ferner die Neigung von Z zur Nebenaxe dar, um mit diesem ebenen Winkel und der Kenntniss von Z schliesslich die Neigung von X zur Nebenaxe zu finden.

ββ. mPn schärft die Polkanten von P zu.

Die Gestalt ist dann Pn und nach den bei der Berechnung der Pn gegebenen Regeln zu behandeln.

γγ. mPn liegt mit 4 Flächen in den Randecken von P.*

Gegeben X und O.

Man berechne, wie soeben im Falle β. unter αα. gezeigt, die Neigung von X zur Polkante von P, Fig. 102, Dreieck 2. und stelle die Neigung von X zur Nebenaxe dar; dies Mal ist jedoch b′ = n′ + (180° — a). Hiermit ist die Rechnung, wie am oben genannten Orte gezeigt, zu beenden.

Gegeben Z und O.

Man berechne die Neigung von Z zur Randkante von P, indem man in Dreieck 2, Fig. 102:

A = Combk. O.
B = ½Z v. mPn.
C = ½Z v. P setzt.

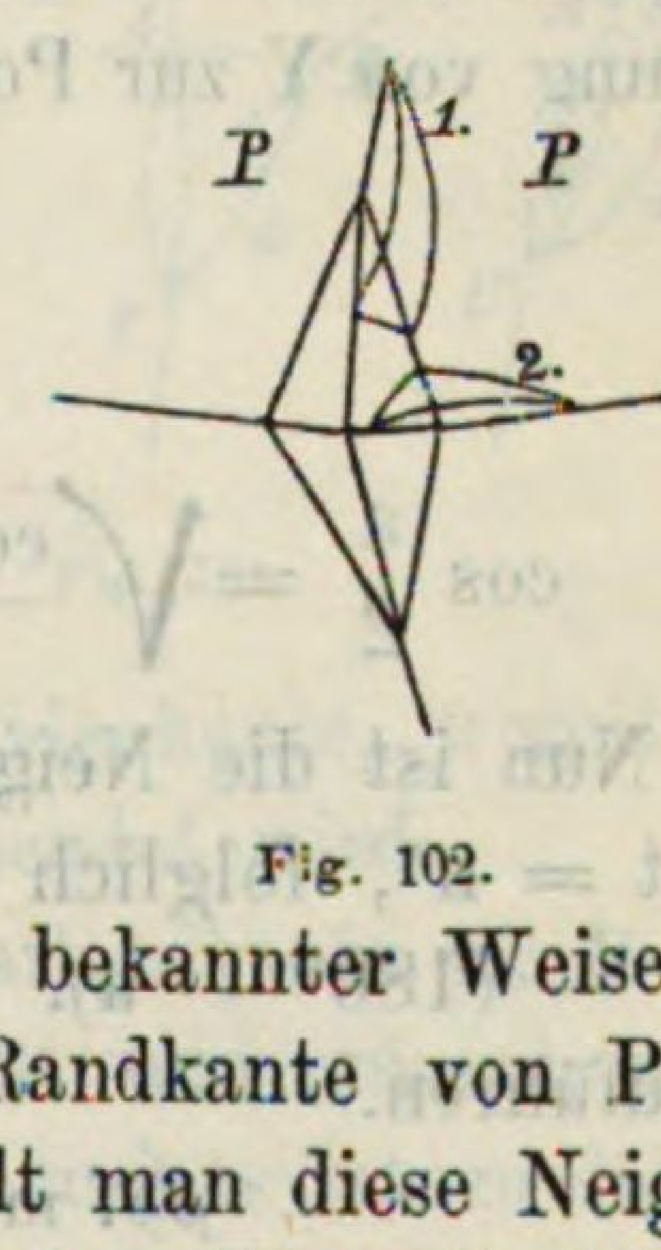


Fig. 102.

Das zu suchende Stück ist a und wird in bekannter Weise gefunden. Da man nun aber die Neigung der Randkante von P zur Nebenaxe in der Basis kennt = 45°, so ermittelt man diese Neigung für Z von mPn nämlich a′ = 45° + (180° — a). Hiermit ist die Rechnung, wie bei mPn unter β gezeigt, zu beenden.

* Sind die Combinationskanten mPn : P, den Polkanten von P parallel, liegt also mPn in einer Zone ∞P∞ : P, so ist es ein mPm.

γ. Gegeben eine eigenthümliche Kante X, Y oder Z und die Combinationskante D zu P∞.

αα. mPn liegt mit 8 Flächen in den Polecken von P∞.

Gegeben X und D.

Man denke sich die Höhenlinie auf einer Fläch von P∞ gezogen und lege folgendes Dreieck, Fig. 103, 1. mit: A = Combk. D.
B = ½X.
C = 90°.

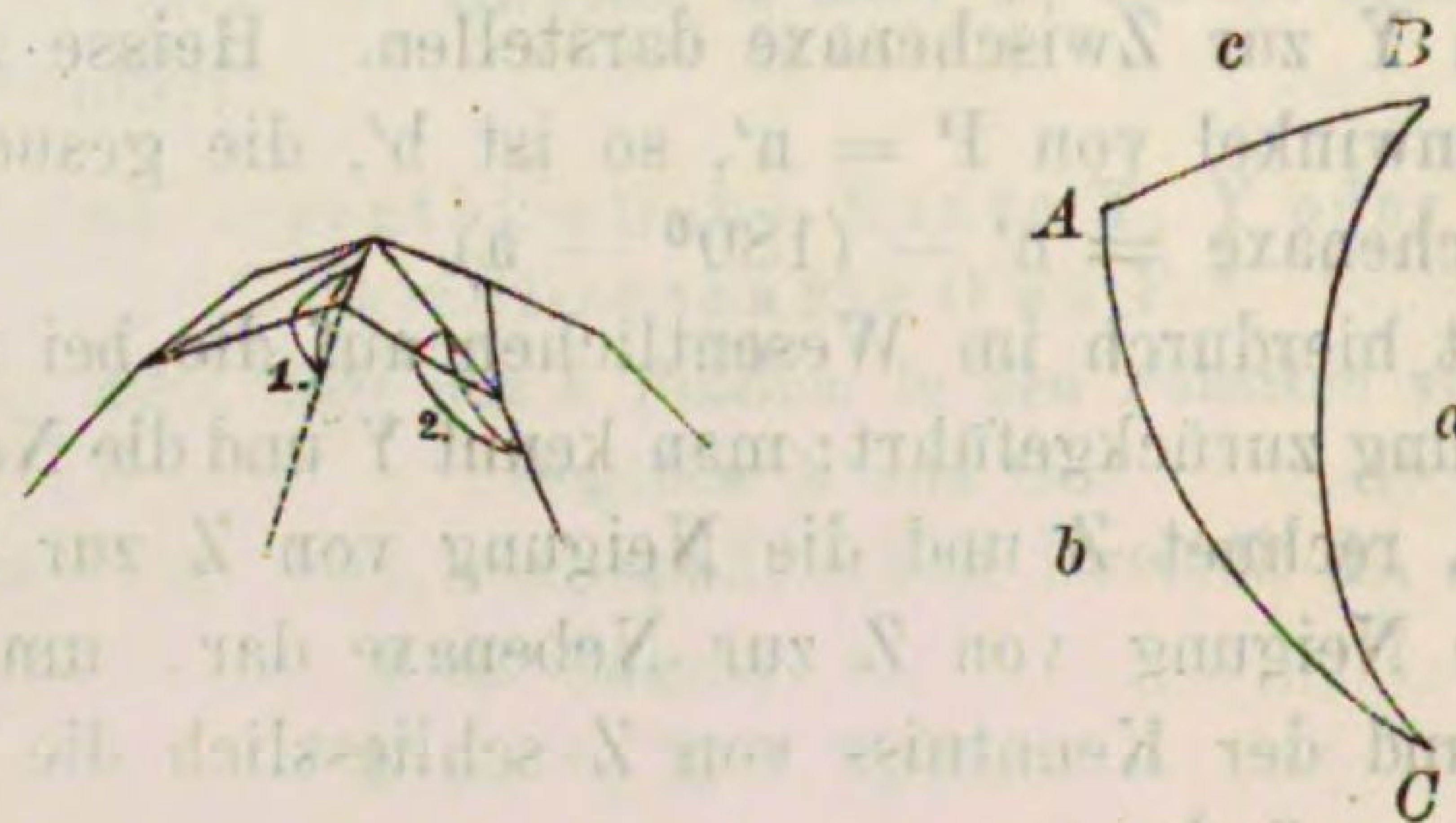


Fig. 103.

Man hat $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$ und somit die Neigung von X zur Höhenlinie auf einer Fläche von P∞ dargestellt. Nun ist aber die Neigung der Höhenlinie von P∞ zur Nebenaxe in der Basis, d. h. der halbe Randkantenwinkel von P∞ = n′, folglich die Neigung der Kante X zu derselben Nebenaxe = b′ = n′ — (180° — a). Hiermit ist die Rechnung in bekannter Weise zu vollenden.

Gegeben Y und D.

Man berechne durch ein sphärisches Dreieck, Fig. 103, 2., die Neigung von Y zur Polkante von P∞. Das betreffende Dreieck enthält:
A = Combk. D.
B = ½ Y von mPn.
C = ½ Y von P∞.

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cdot \cos \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \cdot \sin C}}.$$

Nun ist die Neigung der Polkante von P∞ zur Zwischenaxe bekannt = n′, folglich die Neigung von Y zur Zwischenaxe = b′ = = n′ — (180° — a). Hiermit ist die Rechnung in bekannter Weise fortzuführen.

ββ. mPn schärft die Polkanten von P∞ zu.

Die Gestalt ist vom Zeichen $mP\frac{m}{1-m}$ und zur Berechnung ist in Betracht zu ziehen, dass ihre Polkante Y gerade so zu Hauptaxe und Zwischenaxe neigt, wie die Polkante von P∞.

$\gamma\gamma$. mPn liegt mit 4 Flächen in den Randecken von P∞.*

Gegeben Y und D.

Man stelle, wie soeben im Falle γ. unter $\alpha\alpha$. zum Schluss gezeigt, die Neigung von Y zur Polkante von P∞ dar = a. Heisse dann die Neigung der Polkante von P∞ zur Zwischenaxe = n', so ist die Neigung von Y zur Zwischenaxe in der Basis = b' = n' + (180° — a). Hiermit vollendet sich die Rechnung in bekannter Weise.

Gegeben Z und D.

Man berechne, wie im Falle β. unter $\gamma\gamma$. zum Schluss gezeigt, die Neigung von Z zur Randkante, dies Mal aber von P∞. Diese Neigung sei = a. Da nun die Randkante von P∞ zur Nebenaxe unter 90° geneigt ist, so folgt die Neigung von Z zur Nebenaxe = a' = a — 90°. Mit Z und a' vollendet man die Rechnung ohne Mühe.

δ. Gegeben zwei Combinationskanten von mPn zu P oder P∞, oder auch eine Combinationskante zu P und eine solche zu P∞.

In diesen Fällen, namentlich aber im ersten, in dem zwei Combinationskanten von mPn zu P oder P∞ gegeben sind, berücksichtige man das im regulären System, pag. 123 Gesagte und vergegenwärtige sich auch die Lage von zwei Flächen von mPn, die symmetrisch einer Kante von P oder P∞ anliegen, Fig. 104 a. und dann die Lage nur einer Fläche der Gestalt mPn an einer Kante von P oder P∞, Fig. 104 b.

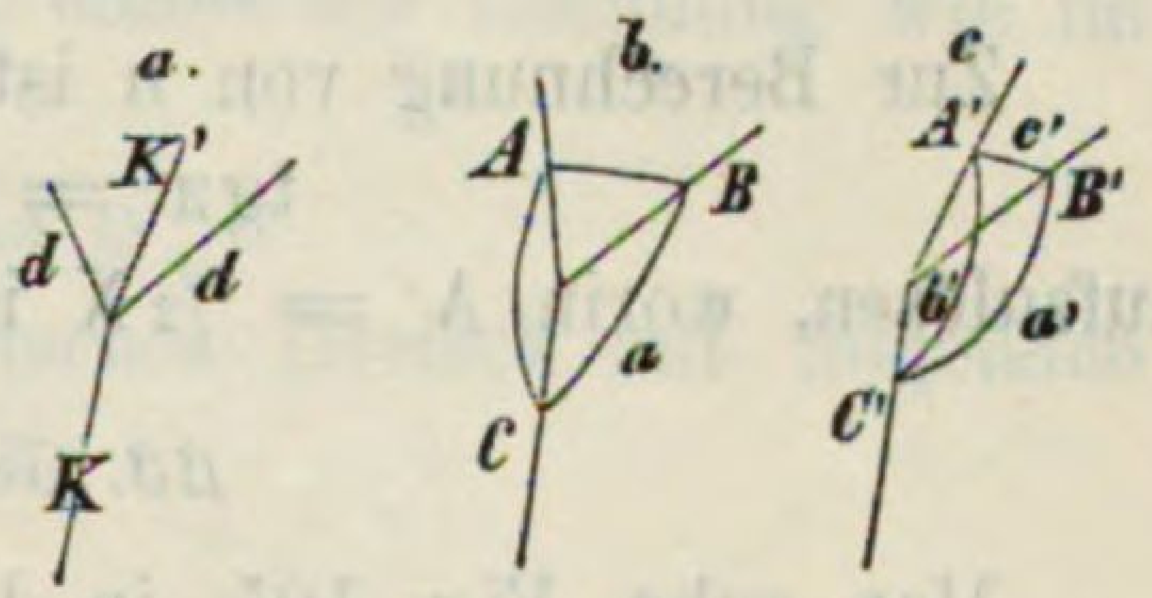


Fig. 104.

Man berechne, wie dort, die Neigung der Combinationskante auf der zugehörigen Seite zur Pyramidenkante, also im Dreieck der Figur 104 b. die Seite a. Alsdann gehe man in ein weiteres Dreieck über, Fig. 104 c, und berechne in demselben in früher erläuterter Weise die betreffende Polkante von mPn und ihre Neigung zu der Pyramidenkante, womit die Rechnung in bekannter Weise fortgeführt und beendet wird.

In dem zweiten Falle, in dem eine Combinationskante zu P und eine solche zu P∞ gegeben sind, wird man bestrebt sein müssen, möglichst mit rechtwinkeligen Dreiecken zu operiren, und es ist zu diesem Behufe zu berücksichtigen, dass im Verlaufe der Rechnung aus der

* Sind die Combinationskanten mPn : P∞ den Polkanten von P∞ parallel, liegt also mPn in einer Zone ∞P : P∞, so ist es ein mP$\frac{m}{m-1}$.

Kenntniss von X und der Combinationskante von mPn zu P∞, sowie aus Y und der Combinationskante von mPn zu P ein Eingehen in rechtwinkelige, sphärische Dreiecke möglich ist. —

ε. Gegeben eine eigenthümliche Kante X oder Y* und die Combinationskante H′ zu ∞P∞.

αα. **Gegeben X und H′.**

Man ziehe, Fig. 105, eine Höhenlinie auf der Fläche von ∞P∞ und lege ein sphärisches Dreieck 1. mit:

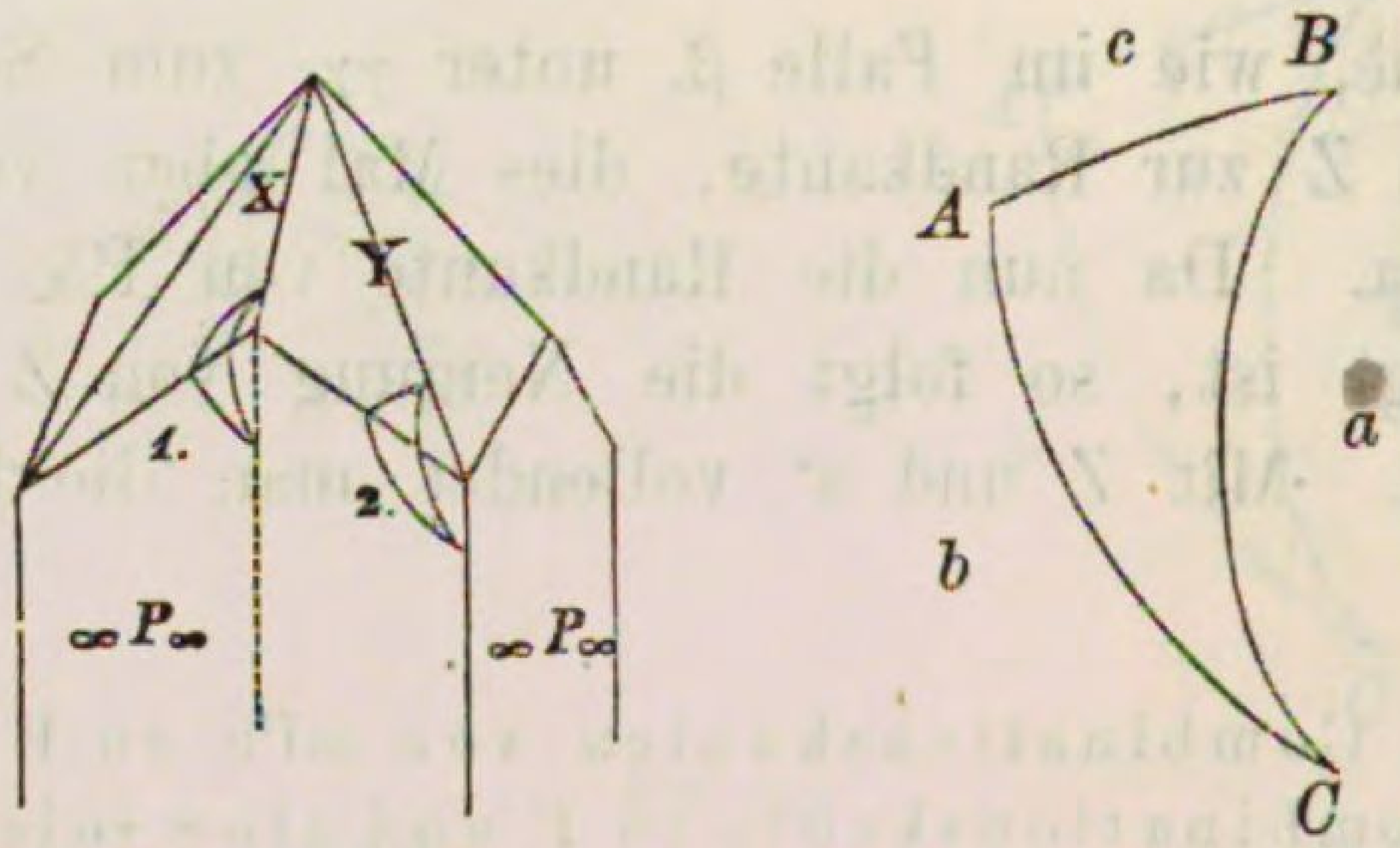


Fig. 105.

A = Combk. H′.
B = $^1/_2$ X.
C = 90°.

Man berechnet a durch $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$, setzt $b' = a - 90°$

und hat $\operatorname{tg} b' = mc$.

Zur Berechnung von n ist die Relation:

$$\operatorname{tg} a' = \sin b' \,.\, \operatorname{tg} A' = n$$

aufzulösen, worin $A' = {}^1/_2 X$ ist.

ββ. **Gegeben Y und H′.**

Man gehe, Fig. 105, in das Dreieck 2. ein, was folgende Stücke enthält:

A = Combk. H′.
B = $^1/_2$ Y.
C = 45°.

Alsdann ist: $\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2 (A + B - C) \,.\, \cos {}^1/_2 (A + C - B)}{\sin B \,.\, \sin C}}$.

* Der Fall, in dem Z in Betracht kommt, stellt eine vorherrschende Pyramide mPn mit untergeordnetem ∞P∞ vor. Es kann die Pyramide dann ohne Zuhülfenahme der Combinationskante berechnet werden. Aus Z und der Combinationskante mPn : ∞P∞ bestimmt sich jedoch auch leicht die Neigung von Z zur Nebenaxe, womit, wie bekannt, weiter zu rechnen ist.

Die Neigung der Kante Y zur Zwischenaxe ist = b′ = a — 90°. Hiermit vollendet sich die Rechnung in bekannter Weise, indem zuerst Z und die Neigung von Z zur Zwischenaxe gerechnet und sodann die Neigung von Z zur Nebenaxe dargestellt wird; die tg letzterer Neigung ist = n. Der Ableitungscoëfficient m findet sich, indem man die Neigung von X zur Nebenaxe rechnet und die tg dieser Neigung nimmt.

δ. Gegeben eine eigenthümliche Kante X oder Y* und die Combinationskante D′ zu ∞P.

αα. Gegeben X und D′.

Zur Berechnung lege man ein sphärisches Dreieck, Fig. 106. 1., das folgende Stücke enthält:

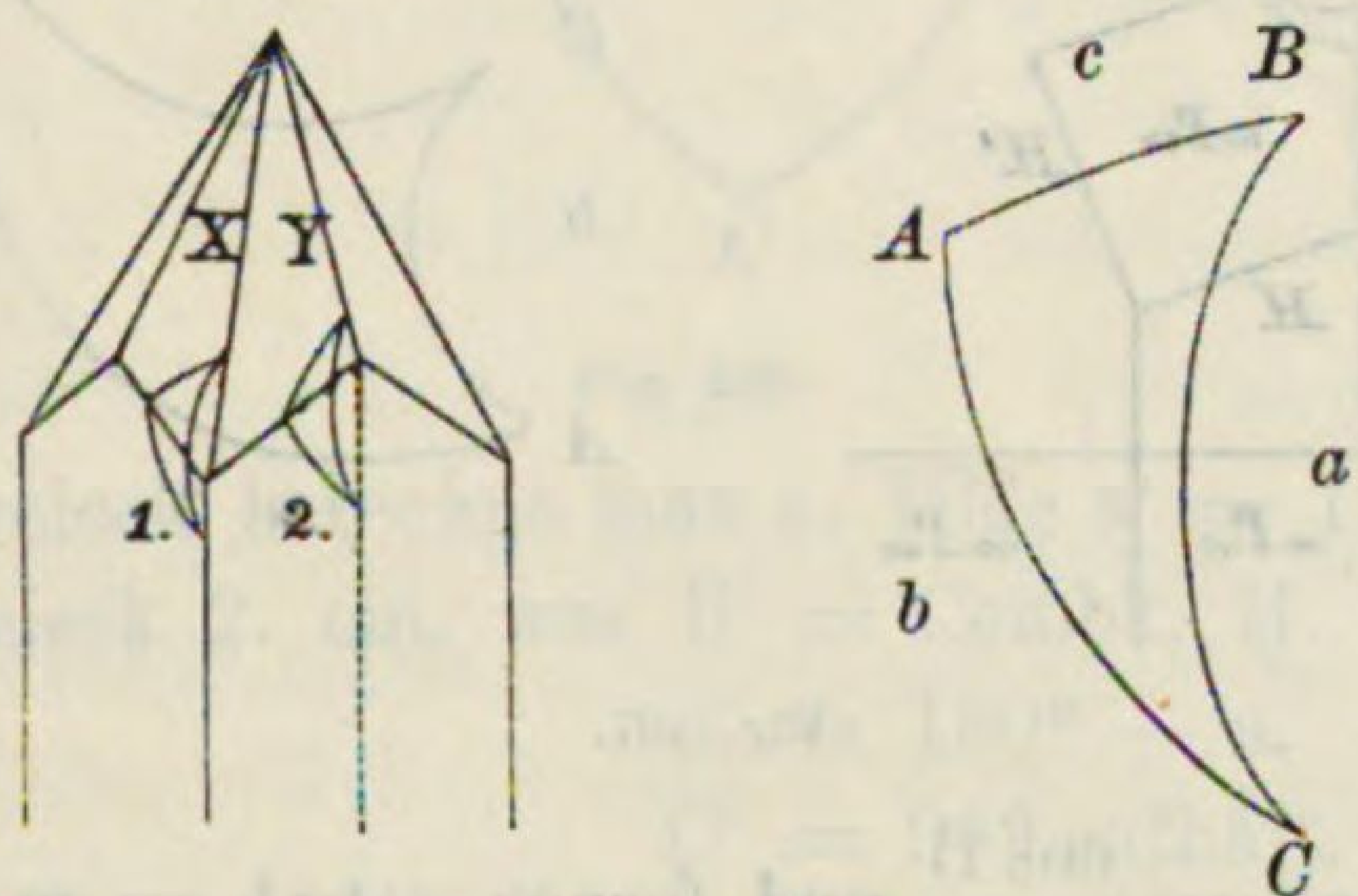


Fig. 106.

A = Combk. D′.
B = ½X.
C = 45°.

Man bestimmt a, bildet b′ = a — 90°, d. h. die Neigung von X zur Nebenaxe in der Basis und vollendet damit die Rechnung wie im Fall ε. unter αα. angegeben.

ββ. Gegeben Y und D′.

Man lege, Fig. 106. 2., ein sphärisches Dreieck mit folgenden Stücken: A = Combk. D′.
B = ½Y.
C = 90°.

Man bestimmt a, bildet b′ = a — 90° und hat darin die Neigung von Y zur Zwischenaxe, womit die Rechnung sich leicht vollendet. —

η. Gegeben zwei Combinationskanten von mPn zu ∞P∞ oder ∞P, oder eine Combinationskante zu ∞P∞ und eine solche zu ∞P.

αα. Gegeben zwei Combinationskanten H und H′ einer Fläche von mPn zu ∞P∞.

Man bilde, Fig. 107, die Neigungen der Fläche zu den Axenebenen, indem man H und H′ von 180° subtrahirt. Die Combinations-

* Die entsprechende Bemerkung, die vorher bezüglich der Kante Z im Falle ε gemacht wurde, gilt auch hier.

kante H, auf der zugehörigen Seite gelegen, gibt in ihrer Ergänzung zu 180° den halben Winkel einer Kante X′, die bei mPn im Gleichgewicht nicht vorhanden ist. In entsprechender Weise liefert die Ergänzung von H′ zu 180° den halben Winkel der der Gestalt eigenthümlichen Kante X. Man hat somit in einem sphärischen Dreieck:

$$A = {}^1\!/_2 X = 180^0 - H'.$$
$$B = {}^1\!/_2 X' = 180^0 - H.$$
$$C = 90^0.$$

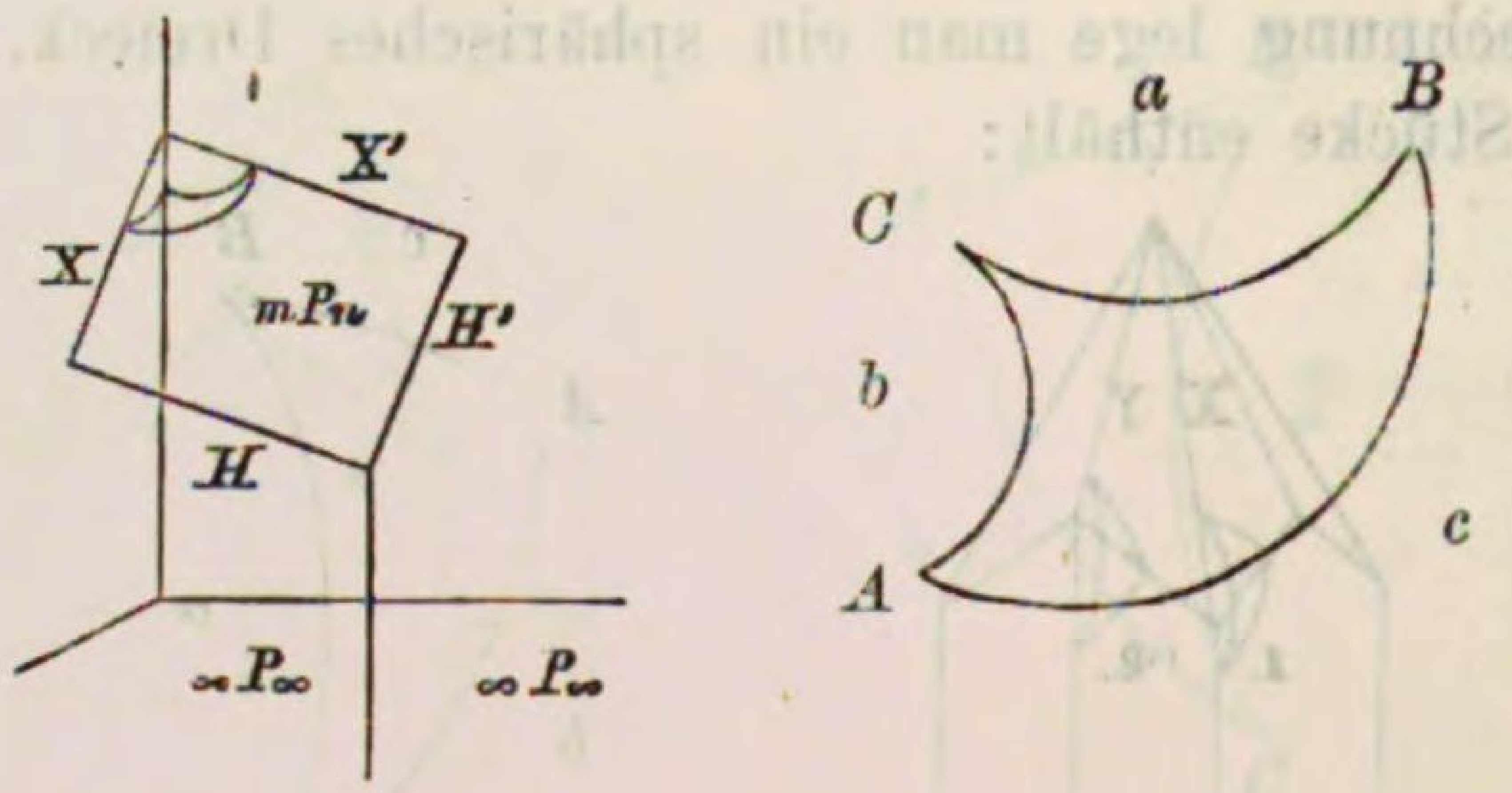


Fig. 107.

Man findet $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$ und ferner $\cot g\, b = m\, c$.

Zur Berechnung von n ist die Relation:

$$\text{tg}\, a' = \sin b' . \text{tg} A' = n \text{ aufzulösen,}$$

in der $b' = 90^0 - b$ und $A' = {}^1\!/_2 X$ bedeuten.

ββ. **Gegeben zwei Combinationskanten D und D′ einer Fläche von mPn zu ∞P.**

Man berechne, Fig. 108 a., auf der zugehörigen Seite die Neigung der Combinationskante D zur Prismenkante, also mit einem Dreieck, das:

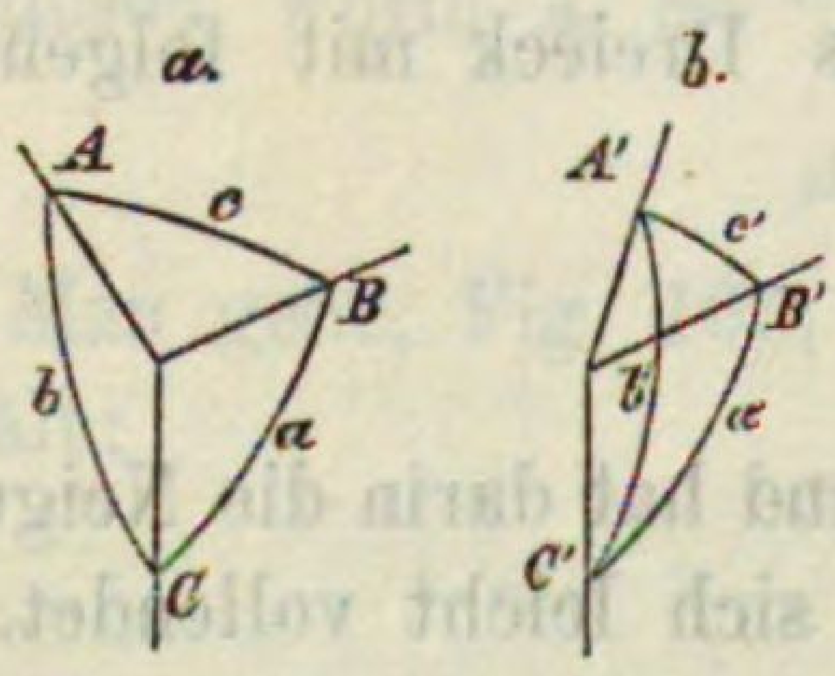


Fig. 108.

$$A = \text{Combk. } D'.$$
$$B = \text{Combk. } D.$$
$$C = 90^0 \text{ enthält,}$$

die Seite a. Nunmehr gehe man in ein zweites Dreieck, Fig. 108 b, ein, welches:

$$B' = \text{Combk. } D.$$
$$a' = a \text{ aus voriger Rechnung.}$$
$$C' = 45^0 \text{ enthält und bestimme}$$

darin $A' = {}^1\!/_2 X$ von mPn und die Neigung von A′ zur Prismenkante $= b'$. Hiermit ist die Rechnung auf den vorigen Fall reducirt.

$\gamma\gamma$. Gegeben eine Combinationskante zu $\infty P\infty = H$ und eine solche zu $\infty P = D$.

Man bilde ein sphärisches Dreieck, Fig. 109. 1., mit:

A = Combk. D.
B = Combk. H.
C = 135°.

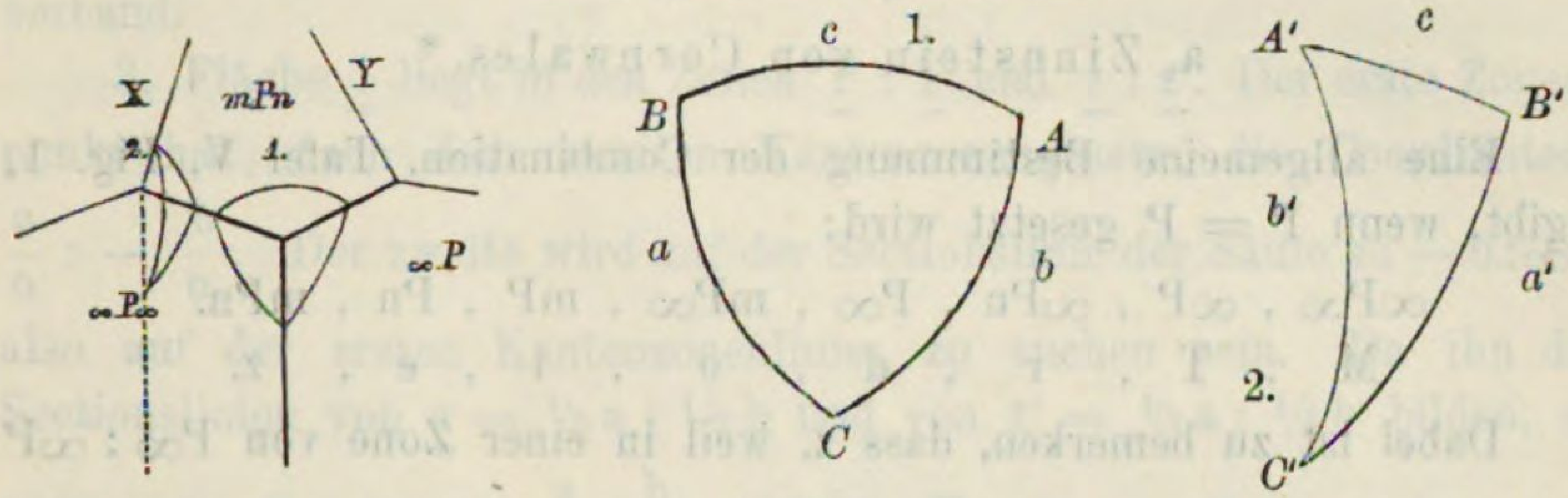


Fig. 109.

In diesem Dreieck berechne man a, bilde $a' = 180^0 - a$ und gehe damit in das Dreieck 2. ein, was B' = Combk. H.
$a' = 180^0 - a.$
$C' = 90^0$ enthält.

In letzterem Dreieck sind zu berechnen: $A' = {}^1\!/_2 X$ von mPn und b′, die Neigung von X zur Projection der Hauptaxe auf $\infty P\infty$. Der Winkel $b' - 90^0$ ergibt alsdann die Neigung von X zur Nebenaxe in der Basis, womit die Rechnung, wie soeben im Falle η. unter $\alpha\alpha$. gezeigt, zu beenden ist. —

Was die Rückrechnung gemessener Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten anlangt, so ist dieselbe entweder mit der Cosinusformel, oder durch die gegebene trigonometrische Anleitung zu bewirken. Man hat bei Anwendung letzterer Methode hauptsächlich darauf zu achten, rechtwinkelige Dreiecke zu bilden, vorzüglich in den Fällen, in welchen seiner Zeit die Berechnung sowohl mit Hülfe rechtwinkeliger, als auch schiefwinkeliger Dreiecke, je nach den gegebenen Elementen, gezeigt wurde. So hat man z. B. bei Berechnung der Combinationskanten von mPn zu mP und $mP\infty$ sich zu vergegenwärtigen, dass im ersteren Falle die Polkante Y und ihre Neigung zu der Höhenlinie auf mP, im letzteren die Polkante X und ihre Neigung zu der Höhenlinie auf $mP\infty$ zur Bildung rechtwinkeliger Dreiecke herangezogen werden müssen. Sollen die Neigungen von mPn zu ∞P und $\infty P\infty$ berechnet werden, so kommt bei ∞P die Polkante Y und ihre Neigung zu der Projection der Hauptaxe auf ∞P in Betracht, bei $\infty P\infty$ ist die Polkante X und ihre Neigung zu der Projection der Hauptaxe

auf $\infty P\infty$ zu berücksichtigen. Endlich kann auch aus der Kenntniss von Z und der Neigung dieser Kante zur Fläche von ∞P oder $\infty P\infty$ die Combinationskante von mPn zu ∞P oder $\infty P\infty$ berechnet werden.

4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

a. Zinnstein von Cornwales. *

Eine allgemeine Bestimmung der Combination, Tafel V, Fig. 1, ergibt, wenn P = P gesetzt wird:

$\infty P\infty$, ∞P , ∞Pn , $P\infty$, $mP\infty$, mP , Pn , mPn.
M , T , r , d , o , i , e , z.

Dabei ist zu bemerken, dass z, weil in einer Zone von $P\infty : \infty P$ gelegen, vom Zeichen $mP\frac{m}{m-1}$ ist; r, was mit z horizontale Combinationskanten bildet, ist das zu dieser Pyramide gehörige Prisma.

1. Zunächst ist nun das Axenverhältniss herzuleiten, wozu eine Messung erforderlich ist. Wir messen d : d über den Scheitel = 112° 10′; alsdann ist cotg 56° 5′ = c.

$$\log. \text{cotg } 56^0\, 5' = 9{,}8276241 - 10.$$
$$\text{num. } 0{,}672394 = c.$$

Aus diesem Winkel können ferner die Rand- und Polkantenwinkel von P und $P\infty$ berechnet und mit den gemessenen Winkeln dieser Gestalten verglichen werden.

2. Nächstliegend ist die Bestimmung von z. Wäre i bekannt, so könnte die Pyramide, da sie eine $mP\frac{m}{m-1}$ ist, aus dem Zonenverband ermittelt werden, so müssen wir sie berechnen. Man kann an der Gestalt den Polkantenwinkel X = 118° 6′ und ferner z : r = $= \frac{1}{2}Z + 90^0 = 135^0\, 17'$ messen und hat, nach dem bei der Berechnung der achtseitigen Pyramide gezeigten Verfahren: m = 3 und, aus dem allgemeinen Zeichen, $n = \frac{3}{2}$. Die Pyramide ist sonach $3P\frac{3}{2}$ und das achtseitige Prisma $r = \infty P\frac{3}{2}$.

Einfacher ist jedoch die Bestimmung, wenn man die Pyramide durch ihr allgemeines Zeichen und das zugehörige Prisma ermittelt. Zu dem Ende messe man r : M = 146° 19′ und leite daraus $\frac{1}{2}X$ von $\infty Pn = 56^0\, 19'$ ab; $\text{tg } \frac{1}{2}X$ ist = n.

$$\log. \text{tg } 56^0\, 19' = 0{,}1762019.$$
$$\text{num. } n = \frac{3}{2}.$$

* Vergl. Naumann, Lehrb. d. rein. u. ang. Kryst. 1830. B. I, p. 340, Fig. 348.

Das Prisma ist also $\infty P^{3}/_{2}$ und die Pyramide $3P^{3}/_{2}$, da für sie $\frac{m}{m-1} = {}^{3}/_{2}$ gilt, woraus m = 3 folgt.

Nachdem auf diese Art P, $P\infty$, $\infty P\infty$, ∞P, $3P^{3}/_{2}$, $\infty P^{3}/_{2}$ bestimmt sind, fertige man eine Projection dieser Gestalten auf oP an, Tafel V, Fig. 2, und schreite zur Bestimmung von i und o aus dem Zonenverband.

3. Fläche $\underline{i}$ liegt in den Zonen $\underline{P} : \underline{T}$ und $\underline{z} : \underline{z'}$. Der erste Zonenpunkt hat, nach dem zweiten Kantenzonengesetz, die Coordinaten: $\frac{a}{o} : -\frac{b}{o}$. Der zweite wird auf der Sectionslinie der Säule $a : -b : \infty c$, also auf der ersten Kantenzonenlinie, zu suchen sein. Da ihn die Sectionslinien von $\underline{z} = {}^{1}/_{3}a : {}^{1}/_{2}b$ und von $\underline{z'} = {}^{1}/_{2}a : {}^{1}/_{3}b$ bilden, so hat er die Coordinaten $\frac{a}{5} : \frac{b}{5}$. Wird aus diesem Zonenpunkte eine Sectionslinie parallel a : b gezogen, so muss dieselbe die Axen in ${}^{2}/_{5}a$ und ${}^{2}/_{5}b$ schneiden, wie sich von selbst ergibt und wie man sich überdies durch Rechnung, vergl. p. 45, überzeugen kann. Die Fläche $\underline{i}$ gehört also der Pyramide ${}^{5}/_{2}P$ an.

4. Fläche $\underline{o}$, in derselben Zone $\underline{z} : \underline{i} : \underline{z'}$ gelegen und in die Zone $\underline{d} : \underline{M}$ fallend, ergibt sich als $5P\infty$.

5. Endlich bleibt noch zu bestimmen Fläche e. Da sie gelegen zwischen d und P, so ist sie einer Pyramide Pn angehörig, d. h. ihre Polkante X hat dieselbe Neigung zur Hauptaxe, wie die Polkante von P oder, da wir deren Neigung nicht direct ermittelt haben, wie die Höhenlinie auf der Fläche von $P\infty$. Diese Neigung beträgt $56^0\ 5'$, also die Neigung von X zur Axe $a = 33^0\ 55'$.

Darzustellen ist die Neigung Z : a, deren tg = n ist.

Wir messen $d : e = 169^0\ 28'$ und erhalten ${}^{1}/_{2}X = 79^0\ 28'$.

Im beifolgenden Dreieck, Fig. 110, ist alsdann:

$$A = 79^0\ 28'.$$
$$b = 33^0\ 55'.$$
$$C = 90^0$$

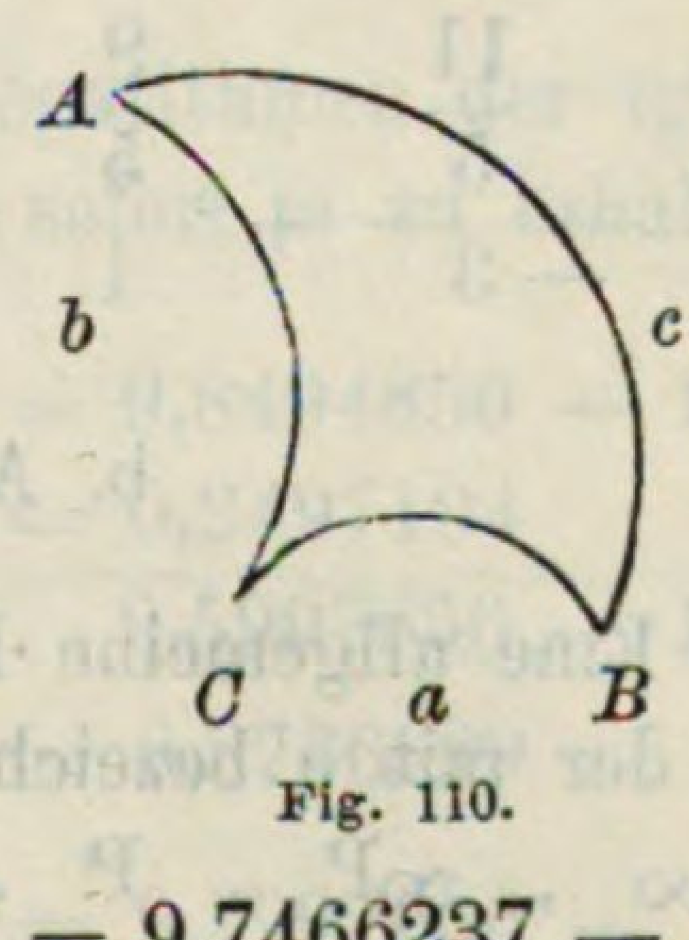


Fig. 110.

und man hat: $\text{tg}\,a = \sin b \,.\, \text{tg}A$.

$$\log.\ \text{tg}\,a = \log.\ \sin 33^0\ 55' = 9{,}7466237 - 10$$
$$+ \log.\ \text{tg}\ 79^0\ 28' = 0{,}7306251$$
$$0{,}4772488$$

Die Pyramide ist P3. num. n = 3.

Wird in die vervollständigte Projection P3 noch eingetragen, so ergibt sich der Zonenzusammenhang aller Gestalten und es treten dann namentlich für P3 noch Zonen zu Tage, die am Krystalle versteckt waren. Zwei derselben z. B., gebildet von d, e und r und P, e und r sind in der Projection durch ⨯ bezeichnet. — Zur Prüfung der Richtigkeit dieser Zonen bilden wir in bekannter Weise die Coordinaten der Zonenpunkte. Dieselben werden im ersten Falle sein: $-a : \frac{2}{3}b$ und im zweiten Falle hat man: $3a : 2b$. Die in Betracht kommende Sectionslinie von P3 geht von $-3a : b$, man erhält daher, nach Anwendung der Controlformel: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, die Gleichungen:

$$\frac{-1}{-3} + \frac{{}^{2}/_{3}}{1} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{-3} + \frac{2}{1} = 1.$$

Beide Zonen sind also richtig.

Zweifelhaft sind mehrere Stellen, in denen Annäherungen der Sectionslinien in Punkten stattfinden. Eine derartige Stelle trägt die Bezeichnung ⋇ in der Projection. Es ist zu vermuthen, dass hier die drei Linien nicht in einem Punkte sich treffen; um aber zu untersuchen, ob ein Constructionsfehler vorliegt oder nicht, üben wir die Zonencontrole aus.

Zu diesem Ende stellen wir den Schnittpunkt der Linien:

$$z = -\tfrac{1}{2}a : \tfrac{1}{3}b \text{ und } i = \tfrac{2}{5}a : -\tfrac{2}{5}b \text{ dar.}$$

Es ist: $\mu = -2$, $\nu = 3$; $\mu_{,} = {}^{5}/_{2}$, $\nu_{,} = -{}^{5}/_{2}$,

und wir erhalten als Coordinaten des Zonenpunktes:

$$\frac{-{}^{5}/_{2} - 3}{(-2 . -{}^{5}/_{2}) - ({}^{5}/_{2} . 3)}\, a : \frac{-2 - {}^{5}/_{2}}{(-2 . -{}^{5}/_{2}) - ({}^{5}/_{2} . 3)}\, b = \frac{11}{5} a : \frac{9}{5} b.$$

Bilden wir mit diesen Coordinaten und den Axenschnitten der dritten Sectionslinie die Controlgleichung, so folgt:

$$\frac{\frac{11}{5}}{-3} + \frac{\frac{9}{5}}{1} = \frac{16}{15}; \text{ die Zone ist also nicht vorhanden.}$$

b. Anatas vom Binnenthale.*

Eine allgemeine Bestimmung ergibt, wenn man, Tafel V, Fig. 3, von der mit e bezeichneten Pyramide als P∞ ausgeht:

∞P∞	, ∞P	, P	, zwei mP(m > 1)	, drei nP(n < 1)	, mPn.	
a	, m	, p	, w	, δ	, k , z , v	, ϑ.

* Vergl. die Mittheilung des Verfassers im Neuen Jahrb. f. Min. 1875. p. 337, Tafel XI, Fig. 4.

Letztere Pyramide ist, weil in der Zone $P\infty : \infty P$ gelegen, vom Zeichen $mP\frac{m}{m-1}$.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses messen wir den Randkantenwinkel von $e = P\infty$ mit $121^0\ 16'$; alsdann ist $tg\ 60^0\ 38' = c$.

$$\log.\ tg\ 60^0\ 38' = 0{,}2497194$$
$$num.\ c = 1{,}77713.$$

2. Zur Bestimmung der Gestalten δ, w, p, k und z veranstalten wir die Messungen:

$$m : \delta = 172^0\ 26' \quad ; \quad m : p = 158^0\ 18'.$$
$$m : w = 168^0\ 45' \quad ; \quad m : k = 141^0\ 29'.$$
$$m : z = 129^0\ 57'.$$

Die Gestalt p ist, da $P\infty$ ihre Polkanten gerade abstumpft, eigentlich nicht zu berechnen und direct $= P$ zu setzen; da aber die ganze Zone der mP, bis auf das später zu berechnende v, sehr untergeordnet zur Ausbildung am Krystalle gelangt ist, so controliren wir das Ergebniss der Zonenbetrachtung durch die Rechnung.

Zieht man von den gemessenen Winkeln 90^0 ab, so erhält man die halben Randkantenwinkel der Gestalten und mit denselben findet man die Ableitungscoëfficienten der Pyramiden in bekannter Weise. Man hat in einem sphärischen Dreieck, Fig. 111,

$$B = \tfrac{1}{2}\ \text{Rdkw.}$$
$$a = 45^0.$$
$$C = 90^0$$

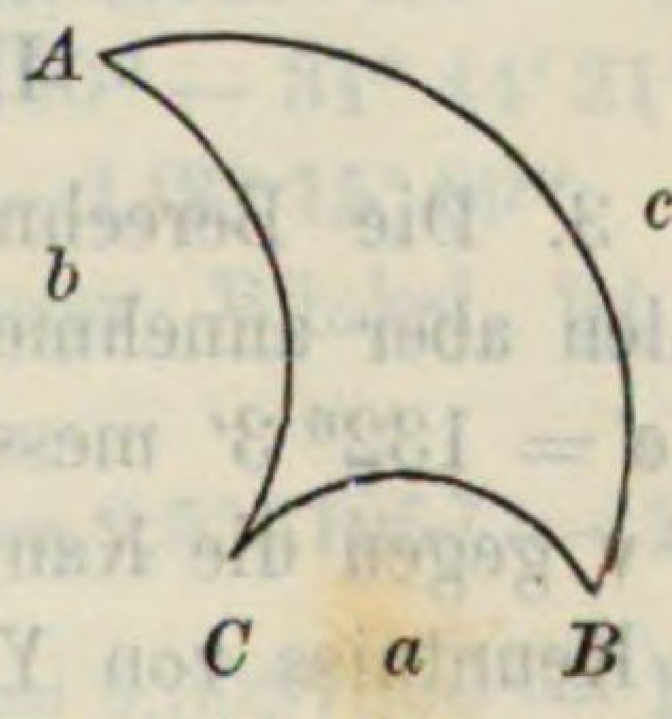


Fig. 111.

und findet $tg b = \sin a . tg B = mc$, d. h. $m = \frac{\sin a . tg B}{c}$. Da nun bei allen Rechnungen $\frac{\sin a}{c}$ wiederkehrt, so bilden wir dessen Werth ein für alle Male und brauchen dann blos die Logarithmen der tg der Randkantenwinkel der Pyramiden zu addiren, um sofort m zu erhalten.

$$\log. \frac{\sin a}{c} = \log.\ \sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$- \log.\ num.\ c = 0{,}2497194$$
$$\overline{9{,}5997656 - 10}$$

Berechnung von δ. $\log. m = \log.\ tg\ 82^0\ 26' = 0{,}8766829$

$$+ \log. \frac{\sin a}{c} = 9{,}5997656 - 10$$
$$\overline{0{,}4764485}$$
$$num.\ m = 3.$$

Die Pyramide δ ist $= 3P$.

Berechnung von w. $\log. m = \log. \operatorname{tg} 78^0\,45' = 0{,}7013382$

$$+ \log. \frac{\sin a}{c} = 9{,}5997656 - 10$$
$$0{,}3011038$$
$$\text{num. } m = 2.$$

Die Pyramide w ist = 2P.

Berechnung von p. $\log. m = \log. \operatorname{tg} 68^0\,18' = 0{,}4001733$

$$+ \log. \frac{\sin a}{c} = 9{,}5997656 - 10$$
$$9{,}9999389 - 10$$
$$\text{num. } m = 0{,}9998 = 1.$$

Die Pyramide p ist = P.

Berechnung von k. $\log m = \log. \operatorname{tg} 51^0\,29' = 0{,}0991355$

$$+ \log. \frac{\sin a}{c} = 9{,}5997656 - 10$$
$$9{,}6988011 - 10$$
$$\text{num. } m = \tfrac{1}{2}.$$

Die Pyramide k ist = ½ P.

Berechnung von z. $\log m = \log. \operatorname{tg} 39^0\,57' = 9{,}9230437 - 10$

$$+ \log. \frac{\sin a}{c} = 9{,}5997656 - 10$$
$$9{,}5228093 - 10$$
$$\text{num. } m = \tfrac{1}{3}.$$

Die Pyramide z ist = ⅓ P.

3. Die Berechnung von v könnte ebenso bewirkt werden; wir wollen aber annehmen, es sei zum Zwecke derselben nur der Winkel v : e = 132° 3′ messbar. Alsdann muss die Neigung der Höhenlinie auf v gegen die Kante Y von P∞ berechnet werden. Hierzu ist wieder die Kenntniss von Y und die Neigung dieser Kante zur Zwischenaxe in der Basis nöthig. Ersterer Winkel ist darzustellen; letztere Neigung ist gleich dem halben Randkantenwinkel von ½ P, da diese Pyramide die Polkante Y von P∞ gerade abstumpft. Es brauchte also dieser letztere Winkel nicht besonders berechnet zu werden und wir thun es nur, um ihn ganz genau zu erhalten.

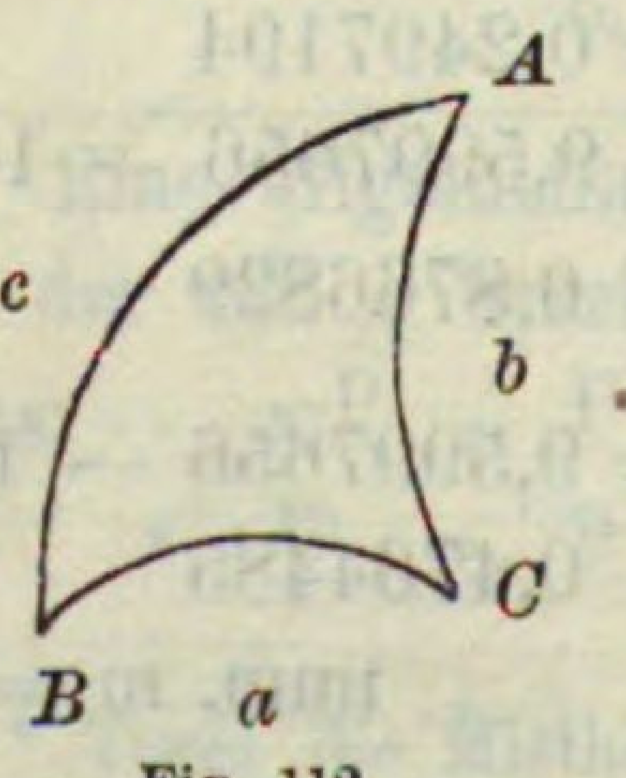


Fig. 112.

Zu den letztgenannten Berechnungen ist ein sphärisches Dreieck zu legen, Fig. 112, was:

$$B = 60^0\,38'.$$
$$a = 45^0.$$
$$C = 90^0 \text{ enthält.}$$

Man findet: $\cos A = \sin B \,.\, \cos a$; $2A = Y$; ferner $\operatorname{tg} b = \sin a \,.\, \operatorname{tg} B$.

$$\log.\cos A = \log.\sin 60^{0}\,38' = 9{,}9402670 - 10$$
$$+ \log.\cos 45^{0} = 9{,}8494850 - 10$$
$$9{,}7897510 - 10$$
$$A = {}^{1}/_{2}Y = 51^{0}\,57'\,28''.$$

$$\log.\operatorname{tg} b = \log.\sin 45^{0} = 9{,}8494850 - 10$$
$$+ \log.\operatorname{tg} 60^{0}\,38' = 9{,}2497194$$
$$0{,}0992044$$
$$b = 51^{0}\,29'\,16''.$$

Nunmehr ist ein Dreieck möglich, Fig. 113, was folgende Stücke enthält:

$A' = 51^{0}\,57'\,28''.$
$B' = 132^{0}\,3'.$
$C' = 90^{0}.$

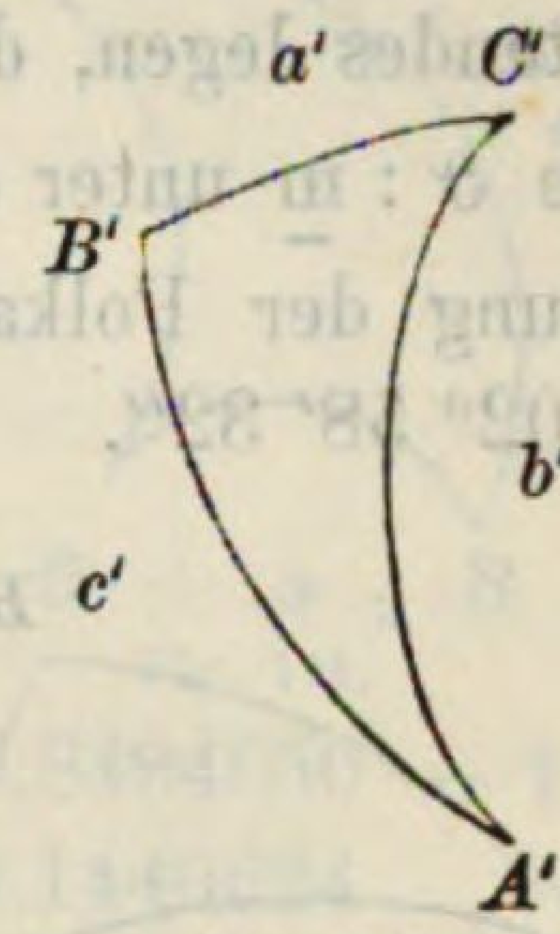


Fig. 113.

Man findet $\cos b' = \frac{\cos B'}{\sin A'}$.

$$\log.\cos b' = \log.\cos 47^{0}\,57' = \text{N. } 9{,}8259314 - 10$$
$$- \log.\sin 51^{0}\,57'\,28'' = 9{,}8962819 - 10$$
$$\text{N. } 9{,}9296495 - 10$$

Wir haben also für die Neigung der Höhenlinie auf v zur Zwischenaxe $b' = 180^{0} - 31^{0}\,44'\,21'' = 148^{0}\,15'\,39''$. $51^{0}\,29'\,16'' - 31^{0}\,44'\,21'' = 19^{0}\,44'\,55''$. Dieser Winkel ist der halbe Randkantenwinkel der Pyramide v.

Nunmehr ist $\log.\text{num. } m = \log.\operatorname{tg} 19^{0}\,44'\,55'' = 9{,}5551057 - 10$

$$+ \log.\frac{\sin a}{c} = 9{,}5997656 - 10$$
$$9{,}1548713 - 10$$
$$\text{num. } m = {}^{1}/_{7}.$$

Die Pyramide v ist ${}^{1}/_{7}$P.

Zur Bestimmung der achtseitigen Pyramide ϑ, deren allgemeines Zeichen $mP\frac{m}{m-1}$ ist, können wir den Zonenverband heranziehen und geltend machen, dass 2P die Polkanten Y gerade abstumpft.

Berücksichtigen wir, Tafel V, Fig. 3 und 4, die Fläche $\underline{\vartheta}$, so fällt dieselbe in die Zonen $\underline{e} : \underline{m}$, und $\underline{w}$ stumpft die Kanten Y der Pyramide ϑ gerade ab. Die Coordinaten des ersten Zonenpunkts sind a : — b, die des zweiten, nach dem ersten Kantenzonengesetz, ${}^{1}/_{4}$a : ${}^{1}/_{4}$b.

Wir haben also: $m = 1$, $n = -1$; $m_{,} = 4$, $n_{,} = 4$ und erhalten: $\frac{(4.-1)-(1.4)}{1.4(-1-4)}a : \frac{(4.-1)-(1.4)}{-1.4(4-1)}b = {}^2/_5 a : {}^2/_3 b.$

Die Gestalt ist daher ${}^2/_5 a : {}^2/_3 b : c = {}^5/_2 P\, {}^5/_3$.

Will man die Rechnung anwenden, so sind verschiedene Wege möglich. Da die Gestalt vom Zeichen $mP \frac{m}{m-1}$ ist, so reicht jedenfalls ein Winkel zur Berechnung aus. Wir wählen hierzu $Z = 158^0\ 9'$. Alsdann kann man ein sphärisches Dreieck unter Berücksichtigung des Umstandes legen, dass die Combinationskante $\vartheta : \underline{m}$ zur Combinationskante $\vartheta : \underline{m}$ unter einem ebenen Winkel neigt, der gleich der doppelten Neigung der Polkante Y von $P\infty$ zur Zwischenaxe in der Basis ist $= 102^0\ 58'\ 32''$.

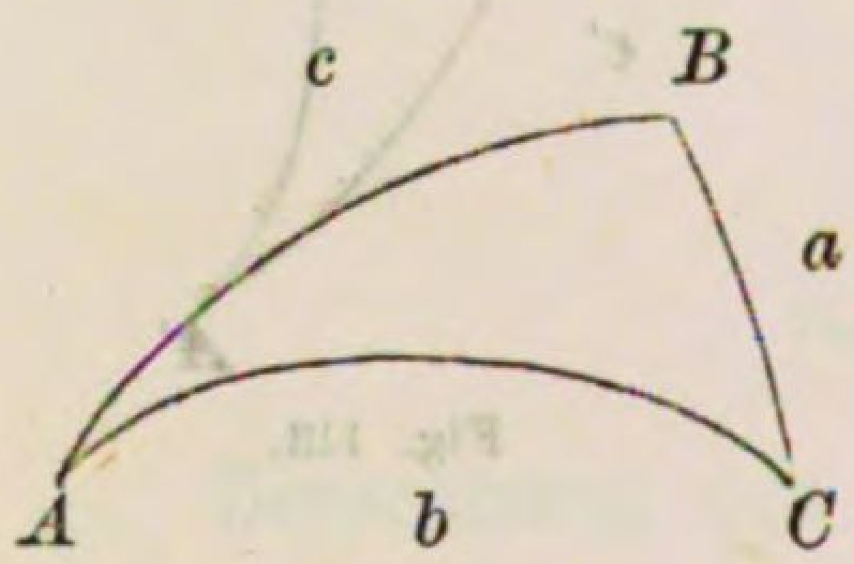


Fig. 114.

Das sphärische Dreieck, Fig. 114, enthält:

$A = 79^0\ 4'\ 30''$.

$a = 51^0\ 29'\ 16''$.

$C = 90^0$.

Wir suchen b, d. h. die Neigung von Z. zur Projection des basischen Schnitts auf ∞P und finden:

$\sin b = \cot g A \,.\, tg a.$

$$\begin{aligned} \log. \sin b &= \log. \cot g\ 79^0\ 4'\ 30'' = 9{,}2856073 - 10 \\ &+ \log. tg\ 51^0\ 29'\ 16'' = 0{,}0992044 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 9{,}3848117 - 10 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad b = 14^0\ 2'\ 15''. \end{aligned}$$

Die Natur der Aufgabe erfordert b als stumpfen Winkel zu nehmen $= 165^0\ 57'\ 45''$. Nun ist $\underline{m}$ zur vorderen Nebenaxe a unter 45^0 geneigt, folglich neigt Z zu derselben Nebenaxe unter $45^0 + 14^0\ 2'\ 15'' = 59^0\ 2'\ 15''$. Die tg dieses Winkels ist = n.

$$\log. tg\ 59^0\ 2'\ 15'' = 0{,}2218704$$

$$\text{num. } n = {}^5/_3.$$

Die Gestalt wird daher zu $mP\,{}^5/_3$ und, da $\frac{m}{m-1} = {}^5/_3$, folgt für m der Werth ${}^5/_2$, so dass das Zeichen von $\vartheta = {}^5/_2 P\,{}^5/_3$ ist. —

c. Kupferkies von Ramberg bei Daaden.*

Eine allgemeine Bestimmung der Combination, Tafel V, Fig. 5 ergibt:

* Vergl. Sadebeck. Ueber d. Krystallformen des Kupferkieses, Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1868. Tafel XIV, Fig. 18.

$$oP\ ,\ +\frac{P}{2}\ ,\ -\frac{P}{2}\ ,\ P\infty\ ,\ +\frac{Pn}{2}.$$
$$a\ ,\quad S\ ,\quad S'\ ,\quad c\ ,\quad y.$$

Letztere Gestalt, ein quadratisches Skalenoëder, ist von diesem allgemeinen Zeichen, weil in der Zone c : S gelegen.

1. Zur Ableitung des Axenverhältnisses der Grundform, die in zwei quadratische Sphenoide zerfällt, messen wir an ersterer den Randkantenwinkel = 108° 40′. Alsdann ist für das zu legende sphärische Dreieck, Fig. 115, folgende Aufstellung bekannter Elemente zu machen:

B = 54° 20′.
C = 90°.
a = 45°.

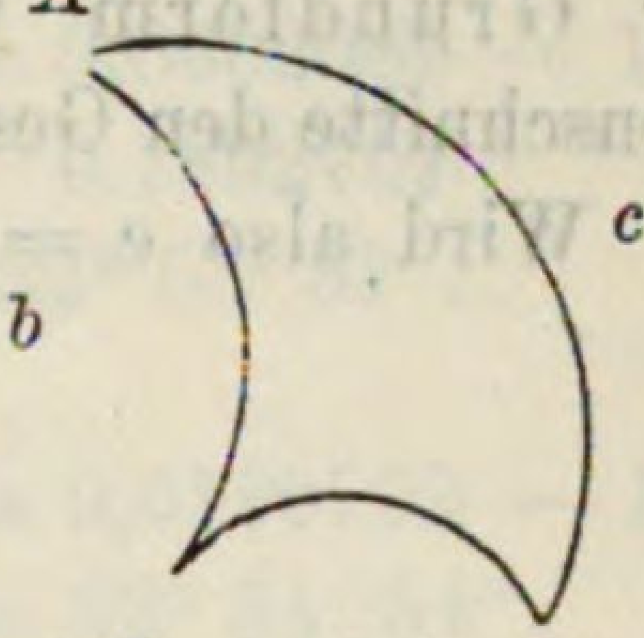


Fig. 115.

Man findet tg b = sin a . tg B = c.

$$\begin{aligned} \log.\ tg\ b = \log.\ \sin 45^0 &= 9{,}8494850 - 10 \\ + \log.\ tg\ 54^0\ 20' &= 0{,}1440624 \\ &\overline{\ 9{,}9935474 - 10} \\ \text{num. } c &= 0{,}985252. \\ b &= 44^0\ 34'\ 28''. \end{aligned}$$

2. Zur Berechnung des Skalenoëders messen wir c : y = 166° 50′ und bilden daraus $\frac{1}{2}$X von Pn = 76° 50′. Alsdann haben wir in einem Dreieck von der Lage der Fig. 115:

A′ = 76° 50′.
b′ = 44° 34′ 28″.
C′ = 90°.

Es ergibt sich: tg a′ = sin b′ . tg A′ = n.

$$\begin{aligned} \log.\ tg\,a' = \log.\ \sin 44^0\ 34'\ 28'' &= 9{,}8462352 - 10 \\ + \log.\ tg\ 76^0\ 50' &= 0{,}6309063 \\ &\overline{\ 0{,}4771415} \\ \text{num. } n &= 3. \end{aligned}$$

Das quadratische Skalenoëder ist $+\frac{P3}{2}$.

d. Scheelit von Carrockfells in Cumberland.

Die auf Tafel V, Fig. 6 dargestellte Combination ist, mit Hinzurechnung einer Gestalt v, die die Polkanten von e gerade abstumpfen würde, bereits vor längerer Zeit von Levy * beschrieben und abgebildet worden, jedoch ohne nähere Angabe des Fundorts. Aller Wahrscheinlichkeit nach, entstammte indessen der betreffende Krystall der oben erwähnten Localität.

* Levy. Descr. d'une collection etc. 1838. T. III, p. 369. Pl. 80, Fig. 4.

Ueber die Grundform des Scheelits sind die verschiedenen Autoren nicht einig. Einige nehmen e als Stammform an, andere Forscher gehen von P′ als Grundpyramide aus. Die letztere Annahme ist mit Rücksicht auf die Stammformen des Wulfenits und Stolzits und den Isomorphismus dieser Mineralien mit dem Scheelit wohl die richtigere. Wir werden zum Zwecke der Berechnung von e als P ausgehen, die übrigen Gestalten hierauf beziehen und alsdann, unter A e n d e r u n g d e r G r u n d f o r m u n d d e s A x e n v e r h ä l t n i s s e s zeigen, welche Axenschnitte den Gestalten, bezogen auf P′ als Stammform, zukommen.

Wird also e = P gesetzt, so werden die übrigen Gestalten zu:

$$2P\infty\ ,\ \frac{l}{r}\frac{mPn}{2}\ ,\ \frac{r}{l}\frac{mPn}{2}.$$

$$P'\ ,\quad g\quad ,\quad s.$$

Da jedoch g in die Zone P : 2P∞ fällt, so folgt daraus das allgemeine Zeichen $mP\frac{m}{2-m}$ und für s ergibt sich aus der Zone 2P∞ : ∞P * das allgemeine Zeichen $mP\frac{m}{m-2}$.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses ist e nicht heranzuziehen, der schlechten Bildung seiner Flächen wegen, dagegen ist die mit P′ bezeichnete Fläche = 2P∞ hierzu sehr geeignet und wir nehmen, mit DAUBER (Pogg. Annalen 107, p. 275) den Randkantenwinkel dieser Gestalt zu 130° 33′ an.

Wir haben alsdann: $\frac{\text{tg } 65^0\ 16^1/_2{}'}{2} = c.$

$$\text{log. num. c} = \text{log. tg } 65^0\ 16^1/_2{}' = 0{,}3367917$$
$$-\ \text{log. num. } 2 = 0{,}3010300$$
$$0{,}0357617$$
$$\text{num. c} = 1{,}08583.$$

2. Zunächst sind nun, ehe zur Berechnung der Pyramiden dritter Art geschritten werden kann, von 2P∞ einige Stücke zu berechnen.



Fig. 116.

Man lege, Fig. 116, ein sphärisches Dreieck mit:

$B = 45^0.$

$C = 90^0.$

$a = 24^0\ 43^1/_2{}'.$

Letzterer Winkel ist = 90° — 65° 16½′ und somit das sphärische Dreieck am Poleck von 2P∞ angelegt.

* ∞P ist zwar selbst nicht vorhanden, doch sind die Grenzglieder der ersten Abtheilung der Gesammtzone da, so dass man auch das eine fehlende Grenzglied der zweiten Abtheilung dadurch ermitteln kann.

Man findet: $\cos A = \sin B . \cos a$.

$$\log.\cos A = \log.\sin 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$+ \log.\cos 24^0\ 43^1/_2{}' = 9{,}9582416 - 10$$
$$9{,}8077266 - 10$$
$$A = {}^1/_2 Y = 50^0\ 2'\ 16''.$$

Ferner ist: $\operatorname{cotg} c = \frac{\cos B}{\operatorname{tg} a}$.

$$\log.\operatorname{cotg} c = \log.\cos 45^0 = 9{,}8494850 - 10$$
$$- \log.\operatorname{tg} 24^0\ 34^1/_2{}' = 9{,}6602089 - 10$$
$$0{,}1892761$$

Die Neigung v. Y z. Hauptaxe, c ist $= 32^0\ 53'\ 31''$.

Endlich haben wir: $\operatorname{tg} b = \sin a . \operatorname{tg} B$.

$$\log.\operatorname{tg} b = \log.\sin 24^0\ 34^1/_2{}' = 9{,}6189722 - 10$$
$$b = 22^0\ 34'\ 54''.$$

Dieser Winkel ist die Hälfte des ebenen Winkels, unter dem die eine Fläche von $2P\infty$ begrenzenden Polkanten zu einander geneigt sind.

Um die Gestalt g zu berechnen, genügt ein Winkel. Wir wählen hierzu $\underline{g} : \underline{P}' = 162^0\ 46'$ und bilden hieraus, da $^1/_2 Y$ von $2P\infty =$ $= 50^0\ 2'\ 16''$ ist, $^1/_2 Y$ von $mPn = 50^0\ 2'\ 16'' + 17^0\ 14' = 67^0\ 16'\ 16''$. Da nun Y von mPn dieselbe Neigung zur Hauptaxe und folglich auch zur Zwischenaxe in der Basis hat, wie Y von $2P\infty$, so kann man in einem sphärischen Dreieck, Fig. 117, die Neigung von Z von mPn zur Zwischenaxe berechnen, alsdann die Neigung zur Nebenaxe darstellen und erhält in der tg letzteren Winkels n.

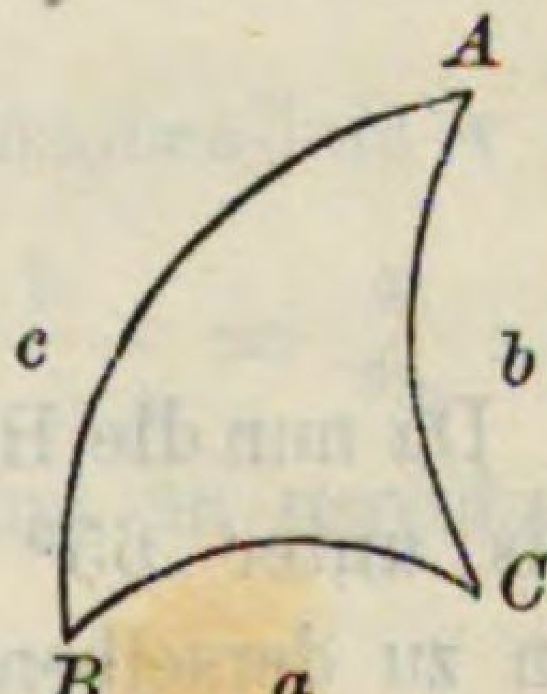


Fig. 117.

In dem genannten Dreieck hat man:

$$A = 67^0\ 16'\ 16''.$$
$$b = 57^0\ 6'\ 29''.$$
$$C = 90^0.$$

Es ist: $\operatorname{tg} a = \sin b . \operatorname{tg} A$.

$$\log.\operatorname{tg} a = \log.\sin 57^0\ 6'\ 29'' = 9{,}9241222 - 10$$
$$+ \log.\operatorname{tg} 67^0\ 16'\ 16'' = 0{,}3778880$$
$$0{,}3020102$$
$$a = 63^0\ 29'\ 12''.$$

Dieser Winkel ist die Neigung von Z zur Zwischenaxe, daher folgt für die Neigung dieser Kante zur Nebenaxe $a' = 180^0 - (45^0 + + 63^0\ 29'\ 12'') = 71^0\ 30'\ 48''$.

$$\log.\operatorname{tg} 71^0\ 30'\ 48'' = 0{,}4758161$$
$$\text{num. } n = 2{,}991 = 3.$$

Die Gestalt ist $\frac{1}{r}\ \frac{mP3}{2}$ und, da für sie auch das allgemeine Zeichen

$mP\frac{m}{2-m}$ gilt, ist $\frac{m}{2-m} = 3$, woraus $m = {}^3/_2$ folgt. Somit erhielte g das Zeichen $\frac{l}{r}\ \frac{{}^3/_2P3}{2}$.

4. Um s zu berechnen ist zu berücksichtigen, dass die Combinationskante $\underline{P}' : \underline{s}$ mit der Combinationskante $\underline{P}' : P'$ einen ebenen Winkel bildet, der, wenn 90° von ihm abgezogen werden, gleich der Hälfte des ebenen Winkels ist, den die Polkanten Y von 2P∞ mit einander bilden. Zur Berechnung der Gestalt reicht ebenfalls eine Messung hin; wir wählen hierzu die Neigung $\underline{P}' : \underline{s} = 151^0\ 39'$. Alsdann haben wir in einem sphärischen Dreieck, Fig. 118:

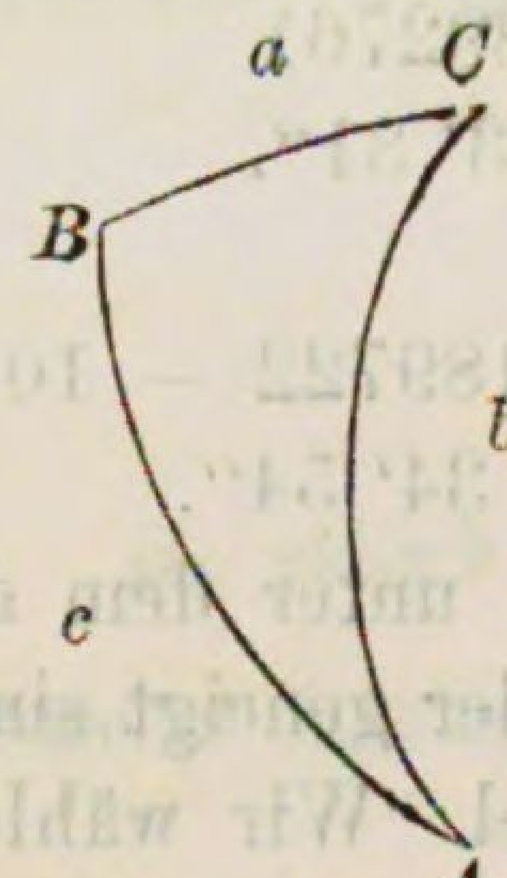


Fig. 118.

$B = 151^0\ 39'$.
$a = 22^0\ 34'\ 54''$.
$C = 90^0$.

Man berechnet b, d. i. die Neigung der Kante X von mPn zur Höhenlinie auf der Fläche von 2P∞ und findet:

$$tg\,b = \sin a \,.\, tg\,B.$$

$$\begin{aligned} \log.\ tg\,b = \log.\ \sin 22^0\ 34'\ 54'' &= 9{,}5843311 - 10 \\ + \log.\ tg\ 28^0\ 21' &= N.\ 9{,}7320484 - 10 \\ \hline & \ N.\ 9{,}3163795 - 10 \\ & \ 11^0\ 42'\ 21''. \\ b &= 168^0\ 17'\ 39''. \end{aligned}$$

Da nun die Höhenlinie auf der Fläche von 2P∞ zur Nebenaxe in der Basis unter 65° 16′ 30″ neigt, so beträgt die Neigung von X von mPn zu derselben Axe = 65° 16′ 30″ + 11° 42′ 21″ = 76° 58′ 51″.

$$\begin{aligned} \text{Somit ist log. num. } m = \log.\ tg\ 76^0\ 58'\ 51'' &= 0{,}6359735 \\ - \log.\ num.\ c &= 0{,}0357617 \\ \hline & \ 0{,}6002118 \\ num.\ m &= 3{,}983 = 4. \end{aligned}$$

Die Gestalt ist also $\frac{r}{l}\ \frac{4Pn}{2}$ und, da aus dem Zonenverband für n die Bedingung $\frac{m}{m-2}$ folgt, so erhalten wir $s = \frac{r}{l}\ \frac{4P2}{2}$.

Wir fertigen nach der vollendeten Berechnung der Gestalten eine Projection derselben auf oP an, Tafel V, Fig. 7 und bezeichnen dies Mal die Axe a . . . —a mit **v . . . h** und b . . . —b mit **r . . . l**.

Wollen wir nunmehr von der Grundform P′ = P ausgehen, so haben wir nur die Projection um 45° zu drehen, so dass (**v**) . . . (**h**)

an die Stelle von a . . . —a und (r) . . . (l) an den Ort von b . . . — b, früherer Lage und Orientirung, gelangen.

Alsdann werden: e zu P∞; g, in Zone P : P∞ gelegen, zu $\frac{1}{r}\ \frac{Pn}{2}$; s, in Zone P : ∞P∞ auftretend, zu $\frac{r}{l}\ \frac{mPm}{2}$. Mit den Bezeichnungen $\frac{l}{r}$ und $\frac{r}{l}$, die dieselben, wie in der früheren Stellung geblieben sind, soll, in beiden Fällen, nur ausgedrückt werden, dass in Bezug auf die Flächen von P′ die eine Pyramide dritter Art, g, links oben, rechts unten, die andere, s, rechts oben, links unten liegt.

Um die Fläche g in Bezug auf die neuen Axen zu bestimmen, berücksichtigen wir, dass ihre Sectionslinie g von der Einheit auf (v) nach einem Abstande n auf (r) geht. Zu den neuen Axen (v) und (r) sind aber die alten Axen **v** und **r** die Kantenzonenlinien; beide sind in der Normallänge vorhanden, indem das mit den Längen (1) und (1) der Axen (v) und (r) zu construirende Quadrat die Kantenzonenlinien, als Diagonalen ebenfalls in der Einheit ihrer Länge (dieselbe ist bezogen auf die gleich grossen Axen (v) und (r) = $\sqrt{2}$) enthält.

Ertheilen wir der Linie g die Form $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ und lassen den Schnitt $\frac{a}{\mu}$ auf (v) = (1) erfolgen, so wird auf der Kantenzonenlinie **v** ein Stück abgeschnitten, dessen Coordinaten $\frac{a}{\mu+\nu} : \frac{b}{\mu+\nu} = \frac{a}{3/2} : \frac{b}{3/2}$ sind und dessen Länge, vom Mittelpunkt des Systems an gerechnet, $= \frac{\mathbf{v}}{\mu+\nu} = \frac{\mathbf{v}}{3/2}$ ist, wie eine einfache Ueberlegung zeigt.

Wir können daraus, um ν zu erhalten, folgende Bedingungsgleichungen bilden:

$$\mu = 1.$$
$$\mu + \nu = 3/2.$$

Hieraus folgt: $\nu = 1/2$, d. h. die Linie geht von a : 2b und die Fläche von a : 2b : c = P2, bezogen auf die neuen Axen.

Die Fläche s geht gleichfalls mit ihrer Sectionslinie s von der Einheit auf (v) aus, aber nach einem Abstande 1/m auf (r). Wir erhalten durch eine ähnliche Betrachtung, wie vorhin, die Bedingungsgleichungen:

$$\mu = 1.$$
$$\mu + \nu = 4.$$

Daher ist: $\nu = 3$, d. h. die Linie geht von a : 1/3 b und die Fläche von a : 1/3 b : c = 3P3.

Sonach wären, wenn P′ als Grundform P genommen wird, die übrigen Gestalten bestimmt, wie folgt:

$$e = P\infty\ ,\ g = \frac{1}{r}\ \frac{P2}{2}\ ,\ s = \frac{r}{l}\ \frac{3P3}{2}.$$

Wir ersehen aus dieser Aenderung der Grundform und der damit verbundenen der Axenschnitte der Gestalten, wie die allgemeinen Zeichen zwar andere Ausdrücke bekommen, aber doch stets die durch den Zonenverband gegebenen Elemente, in dem vorliegenden Falle zwei ebene Winkel, gleichmässig zur Rechnung herangezogen werden können.

In der That gehen wir von e als P aus, so dienen zur Berechnung von $g = mP\ \frac{m}{2-m}$ die gemessene Polkante, der hier die Bedeutung Y zukommt, und die Neigung von Y zur Zwischenaxe, ein ebener Winkel, aus dem Zonenverband folgend. Wird P′ zu P, so wird g = Pn. Die Polkante bekommt die Bedeutung X und jetzt ist der aus dem Zonenverband sich ergebende, dem vorigen entsprechende Winkel, die Neigung von X zur Axe a. — Ist e wieder = P, so erhält s die Bedeutung $mP\ \frac{m}{m-2}$, wird berechnet aus der Combinationskante $\underline{s} : \underline{P}'$ und einem ebenen Winkel, der aus dem Zonenverband sich ergibt; man stellt die Neigung der Polkante X zur Nebenaxe dar. Wird P′ = P, so wird s = mPm, alle Rechnungselemente bleiben die gleichen, und man erhält dann nur die Neigung der Polkante Y der achtseitigen Pyramide zur Zwischenaxe.

Wir haben diese vorstehenden Aenderungen ganz unabhängig von der Hauptaxenlänge, nur durch den Zonenverband, vorgenommen und müssen jetzt auch noch die neue Hauptaxe darstellen. Wir könnten dies durch sphärische Trigonometrie thun, da von der neuen Grundform P nunmehr der Randkantenwinkel mit 130° 33′ gegeben ist. Ein Blick auf die Projection lehrt uns jedoch die Sache auch mit Hülfe der einfachen Proportion: $c : c' = 1 : \sqrt{2}$ finden.

Die neue Hauptaxe c′ wird $= c.\sqrt{2}$.

log. num. c′ = log num. c = 0,0357617
+ log. $\sqrt{2}$ = 0,1505150
0,1862767
num. c′ = 1,535595.

In der schätzenswerthen Monographie des Scheelits von Prof. Max Bauer (Württemb. naturw. Jahresh. 1871) findet sich die Beobachtung niedergelegt, dass die vorstehend erörterte Scheelitcombination, wie sie, von kleinen Modificationen abgesehen, häufig zu Schlaggenwalde, Riesen-

grund, Fürstenberg u. s. w. beobachtet wird, immer, anstatt $g = \frac{1}{r}\frac{P2}{2}$, die Gestalt $h' = \frac{1}{r}\frac{P3}{2}$ zeigt. Die Gestalt g soll sehr selten sein, und der genannte Forscher beobachtete sie nur am Scheelit von Carrockfells, wesshalb wir auch oben annahmen, die von LEVY ohne Angabe des Fundorts beschriebene Combination entstamme diesem Fundort.

Für die Mehrzahl der anderen Fundorte haben wir demnach die Combination, wie folgt, zu deuten:

$$P\infty\ ,\ P\ ,\ \frac{1}{r}\frac{P3}{2}\ ,\ \frac{r}{1}\frac{3P3}{2}.$$
$$e\quad ,\ P',\quad h'\quad ,\quad s.$$

Es bleibt uns schliesslich noch übrig die Gestalt $h' = \frac{1}{r}\frac{P3}{2}$ auf das alte Axensystem zu beziehen. Zu dem Ende tragen wir $\underline{h'}$ mit einer gestrichelten Sectionslinie in die Projection derartig ein, dass auf (v) die Sectionslinie in der Einheit, auf (r) im Abstande (3) einschneidet. Für e = P sind v und r die Axen und (v) und (r) die Kantenzonenlinien. Betrachtet man aber die Längen beider, so sieht man, dass, ausgehend von den Längen 1 und 1 der Axen, die Längen (1) und (1) der Kantenzonenlinien dies Mal nur die Hälfte ihrer Werthe, verglichen mit denen im vorigen Falle darstellen. Dies ist bei der nun folgenden Ableitung wohl zu berücksichtigen. Die Linie $\underline{h'}$ schneidet auf den Kantenzonenlinien (v) und (r) in den Abständen (1) und (3) ein; nehmen wir, wegen der veränderten Lage der Linie, ihr Zeichen zu $\frac{a}{\mu} : -\frac{b}{\nu}$ an, so ist (r) die erste, (v) die zweite Kantenzonenlinie und wir erhalten, unter gehöriger Berücksichtigung des negativen Vorzeichens, für die erste Kantenzonenlinie als Ausdruck des abgeschnittenen Stücks $\frac{(r)}{\mu - \nu}$ und für die zweite $\frac{(v)}{\mu + \nu}$.

Der Ausdruck $\frac{(r)}{\mu - \nu}$ ist aber nicht $= \frac{(r)}{1/3}$, sondern, aus eben entwickelten Gründen $= \frac{(r)}{2/3}$, und ebenso ist $\frac{(v)}{\mu + \nu}$ nicht $= \frac{(v)}{1}$, sondern $= \frac{(v)}{2}$. Die in den Punkten (1) und (3) liegende Sectionslinie liefert also für ihre Lage die Bedingungsgleichungen:

$$\mu - \nu = 2/3.$$
$$\mu + \nu = 2.$$
$$2\mu = 8/3\ ;\ \mu = 4/3.$$
$$2\nu = 4/3\ ;\ \nu = 2/3.$$

Die entsprechende Linie geht daher von $^3/_4 a : - ^3/_2 b$ und die Fläche von $^3/_4 a : - ^3/_2 b : c = \frac{1}{r} \frac{^4/_3 P2}{2}$.

Dieselben Resultate findet man natürlich, wenn man die Sectionslinienformel anwendet. Man hat alsdann, bezogen auf **v** und **r** als Axen, die Coordinaten der Zonenpunkte (1) und (3) zu bilden.

Man erhält: $m = 2$, $n = -2$; $m, = ^2/_3$, $n, = ^2/_3$,

und ferner: $\frac{(^2/_3 . -2) - (2 . ^2/_3)}{2 . ^2/_3 (-2 - ^2/_3)}$ a : $\frac{(^2/_3 . -2) - (2 . ^2/_3)}{-2 . ^2/_3 (^2/_3 - 2)}$ b =

$= ^3/_4 a : - ^3/_2 b$. Die Fläche geht also von $^3/_4 a : - ^3/_2 b : c =$

$$= \frac{1}{r} \frac{^4/_3 P2}{2}.$$

Die vorstehend berechnete Scheelitcombination ist, unter Annahme von e als Grundform, und nach Einführung der Gestalt h′ an Stelle der seltenen Pyramide dritter Art, g, zu deuten als:

$$P \; , \; 2P\infty \; , \; \frac{1}{r} \frac{^4/_3 P2}{2} \; , \; \frac{r}{l} \frac{4P2}{2} .$$

$$e \; , \; P' \; , \; h' \; , \; s.$$

III. Rhombisches System.*

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse.

Die Gestalten dieses Systems besitzen drei zu einander senkrechte, ungleichwerthige Hauptschnitte, die den Reductionsebenen der drei Pinakoide entsprechen und die wir zu Axenebenen wählen. Lassen wir, zum Zwecke der Erzeugung der Axen, die Axenebenen sich im Mittelpunkte des Systems schneiden, so entstehen drei senkrechte Axen, die unter einander von ungleicher Grösse sind. Die Rechtwinkeligkeit derselben folgt aus der der Hauptschnitte und ebenso ist ihre ungleiche Grösse bedingt durch den ungleichen Werth der Axenebenen.

Lassen wir die eine der drei Axen von oben nach unten verlaufen, die andere von rechts nach links ziehen, die dritte von vorn nach hinten sich erstrecken, so genügen alle vollflächigen Gestalten des rhombischen Systems der Symmetrieforderung gebildet zu sein:

„Oben, wie unten; davon verschieden, rechts, wie links und davon wieder verschieden, vorn, wie hinten."

Wenn wir diese allgemeinen Verhältnisse auf den Grundkörper des Systems, die rhombische Pyramide, übertragen, so sind deren 12 Kantenwinkel nur noch zu je 4 einander gleich, und es liegen die gleichen Winkel wiederum in drei zu einander senkrechten Schnitten. Aus der Symmetrie des Systems folgt, dass diese Schnitte die Winkel halbiren und Rhomben vorstellen, d. h. je zwei ungleich grosse, rechtwinkelige Diagonalen besitzen. Von diesen Diagonalen sind immer wieder zwei einander gleich, also im Ganzen nur drei verschiedene vorhanden und diese geben die Axen des Grundkörpers ab.

* Wir behandeln das hexagonale System zum Schluss, hauptsächlich in der Absicht, dem Anfänger Gelegenheit zu geben, sein Vorstellungsvermögen erst an den anderen Systemen zu üben und durch dieselben grössere Fertigkeit im Berechnen zu erlangen. — Mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse beansprucht das hexagonale System seinen Platz hinter dem regulären und in Anbetracht seiner optischen Eigenschaften ist es vom quadratischen Systeme nicht zu trennen.

Man nennt von diesen drei Axen, die eine die Hauptaxe, die anderen die Makro- und Brachydiagonale. Die Wahl der Axen ist im Allgemeinen willkührlich, man kann jede Axe als Hauptaxe, Makrodiagonale oder Brachydiagonale einführen und hat nur zu berücksichtigen, eine Grundform zu substituiren, welche von der als Makrodiagonale angenommenen Axe ein grösseres Stück als Einheit dieser Axe abschneidet, als von der Brachydiagonale.

Da, ausser der Rücksicht auf einfache Axenschnitte und möglichst vollständigen Deductionszusammenhang, kein anderes, ganz durchgängig anwendbares Princip vorhanden ist, was bei der Aufstellung und Axenwahl rhombischer Formen massgebend wäre, so werden dieselben sehr verschieden gestellt und, wenn nicht ganz besondere Gründe dagegen sprechen, bleibt man meist bei der ersten Aufstellung stehen, bei welcher früher besonders Spaltbarkeit, säulenförmige Ausbildung u. s. w. berücksichtigt wurde.

Vom physikalischen Standpunkte aus haben Grailich und v. Lang * nach der Grösse der Elasticitätsaxen, die mit den krystallographischen Axen coincidiren, orientiren wollen, sind aber damit nicht durchgedrungen, da durch diese Art der Orientirung die isomorphen Substanzen in discordante Stellungen gebracht werden. Der Schrauf'sche Vorschlag, ** nach der ersten Mittellinie der optischen Axen aufrecht zu stellen, hat Vieles für sich und ist nur bei undurchsichtigen Substanzen nicht durchführbar. Es wäre aber in Anbetracht der vielen und grossen Vortheile, die durch Adoptirung besagten Princips zu erreichen sind, wünschenswerth, es fände da, wo es sich anwenden lässt, allgemeine Annahme.

Wir stellen, wie die Mehrzahl der Forscher, die Brachydiagonale $\breve{a}$ auf den Beobachter zu, lassen die Makrodiagonale $\bar{b}$ von rechts nach links sich erstrecken, und nennen die aufrecht gedachte Hauptaxe $\acute{c}$. Alsdann wird das Axenverhältniss der Grundform $= \breve{a} : \bar{b} : \acute{c}$ sein, wobei wir $\bar{b} = 1$ annehmen.

Auf den Beobachter zu wird dann auch der, durch die Axen $\breve{a}$ und $\acute{c}$ gehende, brachydiagonale Hauptschnitt gerichtet sein; von rechts nach links wird sich der makrodiagonale Hauptschnitt erstrecken, der durch $\bar{b}$ und $\acute{c}$ gelegt ist, und horizontal wird der basische Hauptschnitt liegen, der die Axen $\breve{a}$ und $\bar{b}$ in sich schliesst.

* Untersuch. über d. phys. Verh. kryst. Körper. Sitzb. d. kais. Ac. der Wiss., 1857. B. XXVII. p. 4 u. f.

** Phys. Mineralogie, B. I. 1866, p. 131; B. II. 1868, p. 288 und 302.

An der Stammform nennen wir:

die Winkel der brachydiagonalen Polkanten $= X$,
die Winkel der makrodiagonalen Polkanten $= Y$,
die Winkel der Randkanten $= Z$.

Es sind zur **Bestimmung des Axenverhältnisses der Grundform**, da zwei Grössen zu ermitteln sind, nunmehr **zwei von einander unabhängige Messungen nöthig**.

Gegeben seien an der Stammform des Topases:

der Winkel $X = 141^0\ 0'\ 6''$,
der Winkel $Y = 101^0\ 40'\ 20''$,
der Winkel $Z = 91^0\ 10'\ 30''$.

Alsdann sind zur Berechnung des Axenverhältnisses die Winkel Y und Z besonders geeignet, da wir $b = 1$ setzen und die Tangenten der Neigungen von Y und Z zur Axe b direct $\acute{c}$ $\breve{a}$ geben.

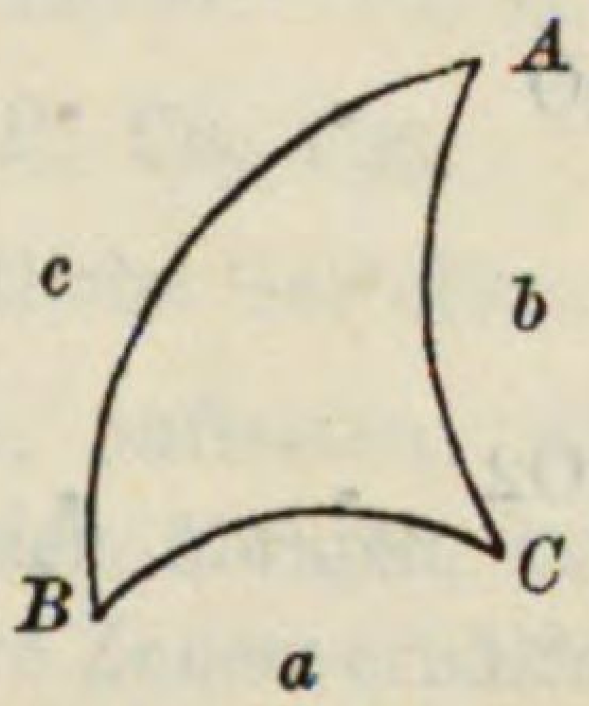


Fig. 119.

Wir haben somit in einem sphärischen Dreieck, Fig. 119:

$$A = 50^0\ 50'\ 10'' = \tfrac{1}{2}Y.$$
$$B = 45^0\ 35'\ 15'' = \tfrac{1}{2}Z.$$
$$C = 90^0.$$

Man findet $\cos a = \dfrac{\cos A}{\sin B}$; $\operatorname{tg} a = \breve{a}$.

$$\log.\cos a = \log.\cos 50^0\ 50'\ 10'' = 9{,}8004014 - 10$$
$$- \log.\sin 45^0\ 35'\ 15'' = 9{,}8538928 - 10$$
$$9{,}9465086 - 10$$

$\log.\operatorname{tg} 27^0\ 51'\ 26'' = 9{,}7230591 - 10$ $\qquad a = 27^0\ 51'\ 26''$.

$$\text{num. } \breve{a} = 0{,}528517.$$

Ferner ist: $\cos b = \dfrac{\cos B}{\sin A}$; $\operatorname{tg} b = \acute{c}$.

$$\log.\cos b = \log.\cos 45^0\ 35'\ 15'' = 9{,}8449859 - 10$$
$$- \log.\sin 50^0\ 50'\ 10'' = 9{,}8894937 - 10$$
$$9{,}9554922 - 10$$
$$b = 25^0\ 29'\ 56''.$$

$$\log.\operatorname{tg} 25^0\ 29'\ 56'' = 9{,}6784744 - 10$$

$$\text{num. } \acute{c} = 0{,}476952.$$

Das Axenverhältniss der Stammform des Topases ist also:

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}528517 : 1 : 0{,}476952.$$

2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen.

Auch in diesem Systeme wollen wir untersuchen, in welche Combinationen die sieben Hauptkörper des regulären Systems zerfallen. Zur Unterstützung dieser Betrachtung ziehen wir die allgemeine Projection, Tafel I, Fig. 4, heran; denken uns in derselben die Axen rechtwinkelig und deren Bezeichnung so gewählt, dass $a < b$ ist.

Alsdann erhalten wir folgende Uebersicht:

1.	O des regulären Systems wird zu:	$a : b : c = P.$
2.	$\infty O \infty$ „ „ „ „ „	$\infty a : \infty b : c = oP.$
		$a : \infty b : \infty c = \infty P\bar{\infty}.$
		$\infty a : b : \infty c = \infty P\breve{\infty}.$
3.	∞O „ „ „ „ „	$a : \infty b : c = P\bar{\infty}.$
		$\infty a : b : c = P\breve{\infty}.$
		$a : b : \infty c = \infty P.$
4.	$2O2$ „ „ „ „ „	$2a : 2b : c = \frac{1}{2}P.$
		$\frac{1}{2}a : b : c = 2P\bar{2}.$
		$a : \frac{1}{2}b : c = 2P\breve{2}.$
5.	$\infty O2$ „ „ „ „ „	$2a : \infty b : c = \frac{1}{2}P\bar{\infty}.$
		$\infty a : 2b : c = \frac{1}{2}P\breve{\infty}.$
		$\frac{1}{2}a : \infty b : c = 2P\bar{\infty}.$
		$\infty a : \frac{1}{2}b : c = 2P\breve{\infty}.$
		$a : 2b : \infty c = \infty P\bar{2}.$
		$2a : b : \infty c = \infty P\breve{2}.$
6.	$2O$ „ „ „ „ „	$\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c = 2P.$
		$a : 2b : c = P\bar{2}.$
		$2a : b : c = P\breve{2}.$
7.	$3O\frac{3}{2}$ „ „ „ „ „	$\frac{3}{2}a : 3b : c = \frac{2}{3}P\bar{2}.$
		$3a : \frac{3}{2}b : c = \frac{2}{3}P\breve{2}.$
		$\frac{1}{3}a : \frac{1}{2}b : c = 3P\bar{\frac{3}{2}}.$
		$\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}b : c = 3P\breve{\frac{3}{2}}.$
		$\frac{2}{3}a : 2b : c = \frac{3}{2}P\bar{3}.$
		$2a : \frac{2}{3}b : c = \frac{3}{2}P\breve{3}.$

Von den hauptsächlichsten Zonen des rhombischen Systems haben wir zu betrachten:

Die Zone der Hauptaxe. In sie fallen: $\infty P\bar{\infty}$, $\infty P\bar{n}$, ∞P, $\infty P\breve{n}$, $\infty P\breve{\infty}$.

Die Zone der Makrodiagonale. In derselben treten auf: oP, $nP\bar{\infty}$ ($n < 1$), $P\bar{\infty}$, $mP\bar{\infty}$ ($m > 1$), $\infty P\bar{\infty}$.

Die Zone der Brachydiagonale. In derselben finden sich: oP, $nP\breve{\infty}$ ($n < 1$), $P\breve{\infty}$, $mP\breve{\infty}$ ($m > 1$), $\infty P\breve{\infty}$.

Die Zone der Randkanten von P. Dieselbe weist folgende Gestalten auf: oP, nP ($n < 1$), P, mP ($m > 1$) ∞P.

Die Zone der makrodiagonalen Polkanten von P. Es treten in derselben auf: $\infty P\breve{\infty}$, $mP\bar{m}$, P, $P\breve{n}$, $P\breve{\infty}$.

Die Zone der brachydiagonalen Polkanten von P. In derselben finden sich die Gestalten: $\infty P\bar{\infty}$, $mP\breve{m}$, P, $P\bar{n}$, $P\bar{\infty}$.

Wir sehen in dieser Zusammenstellung sämmtliche Gestalten, die möglich sind, mit Ausnahme der $mP\bar{n}$ und $mP\breve{n}$, auftreten. Diese letzteren Gestalten sind jedoch, im Vergleich zu den übrigen, immer selten und es lohnt sich im Allgemeinen nicht, ihre Zonenverhältnisse zu untersuchen. In speciellen Fällen wird man ihnen indessen die nöthige Beachtung zu schenken haben. Jeder im rhombischen System krystallisirende, flächenreiche Körper bietet in dieser Hinsicht ein Studium für sich dar.

3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten.* Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss.

1. Allgemeine Relationen.

Eine jede rhombische Pyramide ist durch das Verhältniss ihrer drei Dimensionen a′, b′, c′ characterisirt; wir nehmen von denselben an, dass a′ in der Brachydiagonale, b′ in der Makrodiagonale, c′ in der Hauptaxe der Stammform enthalten sei.

Zum Zwecke der Berechnung sind immer die ebenen Winkel zweier Hauptschnitte der Pyramide darzustellen; aus denselben werden alsdann die Axen, wie folgt, bestimmt.

* Der Einfachheit der Berechnungen wegen, werden wir in diesem Systeme keine Beispiele zu den Einzelrechnungen, sondern nur solche ganzer Combinationen geben.

a. Berechnung der Axen aus den ebenen Hauptschnittswinkeln.

Bezeichne α die Neigung der Randkante Z zur Axe b,
„ γ „ „ „ Polkante Y „ „ b,
„ β „ „ „ „ X „ „ a,
so hat man:

$$a' : b' : c' = tg\alpha : 1 : tg\gamma.$$
$$„ = 1 : cotg\alpha : tg\beta.$$
$$„ = cotg\beta : cotg\gamma : 1.$$

Die Winkel α, β, γ sind in Combinationen sehr häufig durch zugehörige Prismen oder Domen der Pyramiden gegeben. Ist dies nicht der Fall, so müssen erstere aus den Kantenwinkeln der Pyramide berechnet werden.

b. Berechnung der ebenen Hauptschnittswinkel aus den Kantenwinkeln der Pyramide.

Aus den in Fig. 120 eingezeichneten sphärischen Dreiecken lassen sich leicht die folgenden Relationen vermöge des NAPIER'schen Satzes ableiten.

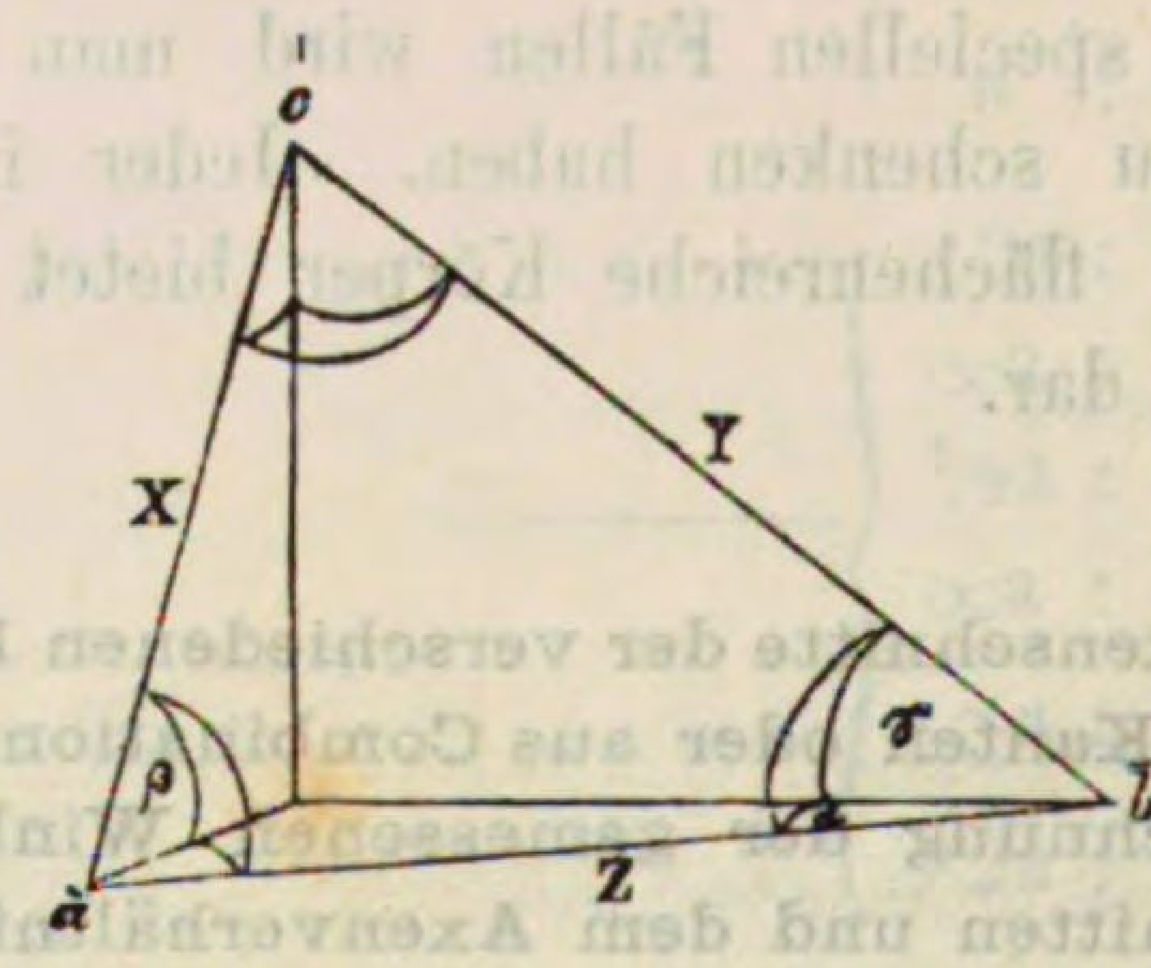


Fig. 120.

α. Gegeben zwei Kantenwinkel der Pyramide.

Gegeben X und Y.

$$\sin\beta = \frac{\cos {}^1\!/_2 Y}{\sin {}^1\!/_2 X}; \quad \sin\gamma = \frac{\cos {}^1\!/_2 X}{\sin {}^1\!/_2 Y}.$$

Gegeben X und Z.

$$\cos\beta = \frac{\cos {}^1\!/_2 Z}{\sin {}^1\!/_2 X}; \quad \sin\alpha = \frac{\cos {}^1\!/_2 X}{\sin {}^1\!/_2 Z}.$$

Gegeben Y und Z.

$$\cos\gamma = \frac{\cos {}^1\!/_2 Z}{\sin {}^1\!/_2 Y}; \quad \cos\alpha = \frac{\cos {}^1\!/_2 Y}{\sin {}^1\!/_2 Z}.$$

β. Gegeben ein Kantenwinkel der Pyramide und ein zugehöriger Hauptschnittswinkel.

Gegeben X und β.

$$\cot g\,\alpha = \sin\beta \,.\, \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2 X.$$

Gegeben Y und γ.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\gamma \,.\, \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2 Y.$$

Gegeben Z und α.

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \sin\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2 Z.$$

γ. Gegeben ein Kantenwinkel der Pyramide und ein nicht zugehöriger Hauptschnittswinkel.

Gegeben X und α oder γ.

$$\sin\beta = \cot g\,{}^1\!/_2 X \,.\, \cot g\,\alpha.$$

$$\cos\beta = \cot g\,{}^1\!/_2 X \,.\, \cot g\,\gamma.$$

Gegeben Y und α oder β.

$$\sin\gamma = \cot g.\,{}^1\!/_2 Y \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha.$$

$$\cos\gamma = \cot g\,{}^1\!/_2 Y \,.\, \cot g\,\beta.$$

Gegeben Z und β oder γ.

$$\sin\alpha = \cot g\,{}^1\!/_2 Z \,.\, \mathrm{tg}\,\gamma.$$

$$\cos\alpha = \cot g\,{}^1\!/_2 Z \,.\, \mathrm{tg}\,\beta.$$

2. Berechnung der einzelnen Formen.

a. Die Pyramiden mP.

Begreifen wir unter denselben auch die Stammform, so sind zwei Winkel nöthig, um das Axenverhältniss dieser letzteren zu bestimmen. Es können diese zwei Winkel sein: zwei Kantenwinkel, ein Kantenwinkel und ein Hauptschnittswinkel, zwei Hauptschnittswinkel. Ist die Stammform erkannt und berechnet, so erfordern die mP zu ihrer Berechnung nur die Kenntniss eines Winkels, da alsdann in ihnen der Hauptschnittswinkel α denselben Werth hat, wie in der Stammform.

Für die Berechnung der Stammform sind die günstigst gelegenen Elemente die Hauptschnittswinkel α und γ, oder, wenn dieselben sich nicht durch das zugehörige Prisma und das zugehörige Brachydoma ermitteln lassen, die Kantenwinkel Y und Z. Für die mP hat, wie bereits bemerkt, α denselben Werth, wie in der Stammform; die günstigst gelegenen Elemente sind hier: γ, Y, Z. Natürlich lassen sich auch die Pyramiden aus den anderen Elementen, wie wir in der oben erbrachten Zusammenstellung der Formeln sahen, bestimmen; die Rechnung ist nur dann etwas weitläufiger.

b. Die Pyramiden mPn.

Dieselben werden, einerlei ob sie $mP\bar{n}$ oder $mP\breve{n}$ sind, nach der allgemeinen Berechnungsweise behandelt, und es ist nur schliesslich zu berücksichtigen, dass die Axenschnitte von $mPn = a' : b' : c'$ sich zu denen von P entweder wie $a : nb : mc$,

oder wie $na : b : mc$ verhalten werden.

Hieraus folgt für jede $mP\bar{n}$:

$$a' : c' = a : mc \quad ; \quad m = \frac{ac'}{a'c}.$$

$$a' : b' = a : nb \quad ; \quad n = \frac{ab'}{a'b}.$$

Ferner für jede $mP\breve{n}$:

$$b' : c' = b : mc \quad ; \quad m = \frac{bc'}{b'c}.$$

$$a' : b' = na : b \quad ; \quad n = \frac{a'b}{ab'}.$$

Bei der Bestimmung der mPn in Combinationen ist das vorzüglichste Augenmerk auf die Zonenverhältnisse, zumal auf zugehörige Prismen oder Domen, zu richten.

Sind zwei solcher zugehöriger Gestalten vorhanden, so ergäbe dies zwei Hauptschnittswinkel, und die Pyramide wäre dann ohne Rechnung aus dem Zonenverband ableitbar.

Mit einem Hauptschnittswinkel und einem Kantenwinkel rechnet man nach der oben gegebenen Anleitung.

Fehlen zugehörige Prismen oder Domen, und ist nur ein Kantenwinkel messbar, so wird man zuzusehen haben, ob nicht Neigungen zu Pinakoiden erhältlich sind und bedenken, dass:

$$mPn : oP = 180^0 - {}^1/_2 Z,$$
$$mPn : \infty P\bar{\infty} = 180^0 - {}^1/_2 Y,$$
$$mPn : \infty P\breve{\infty} = 180^0 - {}^1/_2 X \text{ bedeuten.}$$

Sind keine Pinakoide vorhanden und nur ein Kantenwinkel: X, Y oder Z messbar, so ist zu erforschen, ob in den Zonen: $oP : \infty P\bar{\infty}$, oder $oP : \infty P\breve{\infty}$, oder $\infty P\bar{\infty} : \infty P\breve{\infty}$ Domen oder Prismen, irgend welcher Art, vorhanden sind, zu deren Flächen man die Neigungen der betreffenden Kanten: X, Y oder Z berechnen kann. Ist dies der Fall, so wird man ein

sphärisches Dreieck zu legen haben, Fig. 121, in dem folgende Stücke bekannt sind:

A = ½ Kantenw. v. mPn.
B = Combk. mPn zu der betreffenden Gestalt.
C = 90°.

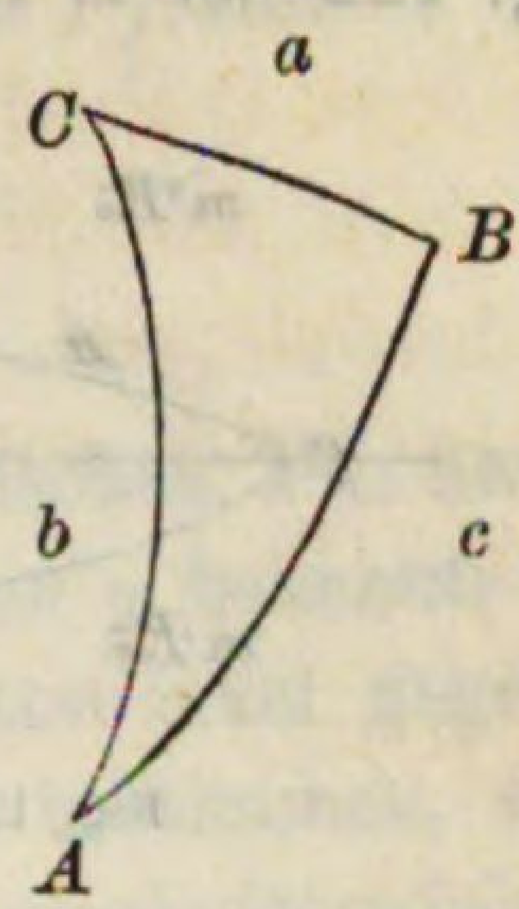


Fig. 121.

Man bestimmt b durch $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$ und hat darin die Neigung der Pyramidenkante zu der Fläche des Prisma's oder Doma's. Da man nun die Neigung letzterer Fläche zu den in Betracht kommenden Axen kennt, so kann man auch die Neigung der Pyramidenkante zu denselben ermitteln, womit sich alsdann die Rechnung in bekannter Weise zu Ende führen lässt.

Fehlen schliesslich auch Domen oder Prismen von passender Lage, um mit einer Pyramidenkante rechtwinkelige Dreiecke zur Rechnung zu erhalten, so muss man zu dem betreffenden Pyramidenwinkel eine Prismen- oder Domenkante oder eine andere Pyramidenkante heranziehen und damit, und mit der Combinationskante von mPn zu der betreffenden Gestalt, die Neigung der Pyramidenkante von mPn zu der Kante der anderen Gestalt zu berechnen suchen.

In dem eben erwähnten Dreieck, Fig. 121, wären dann, wenn wir z. B. die Art des Auftretens einer unbekannten Pyramide mPn an einer bekannten, z. B. an der Pyramide P selbst, bestimmen wollten:

A = ½ Kantenw. von mPn.
C = ½ Kantenw. von P, mit ersterem Winkel zwischen denselben zwei Pinakoiden gelegen.
B = Combk. mPn zu P.

Man hätte mit einem schiefwinkeligen Dreieck b zu rechnen und, da die Neigung des in Rechnung gezogenen Kantenwinkels von P zu den betreffenden Axen bekannt ist, aus der Neigung der Kante von mPn zu der Kante von P, die Neigung der Kante von mPn zu denselben Axen darzustellen. Hiermit wäre die Rechnung auf den soeben betrachteten Fall zurückgeführt.

Treten die Pyramiden mPn nur mit einzelnen Flächen auf, so ist zu überlegen, ob man die fehlenden Kantenwinkel und ihre Neigungen zu Flächen von Prismen oder Domen berechnen kann, oder zu Kanten von Prismen, Domen oder Pyramiden darstellen muss.

Um den ersteren Fall zu untersuchen, stellen wir uns vor, Fig. 122 sei z. B. die Combination zweier $mP\bar{\infty}$ und einer Fläche von mPn; erstere Gestalten sollen mit mPn keinen Zonenverband aufweisen.

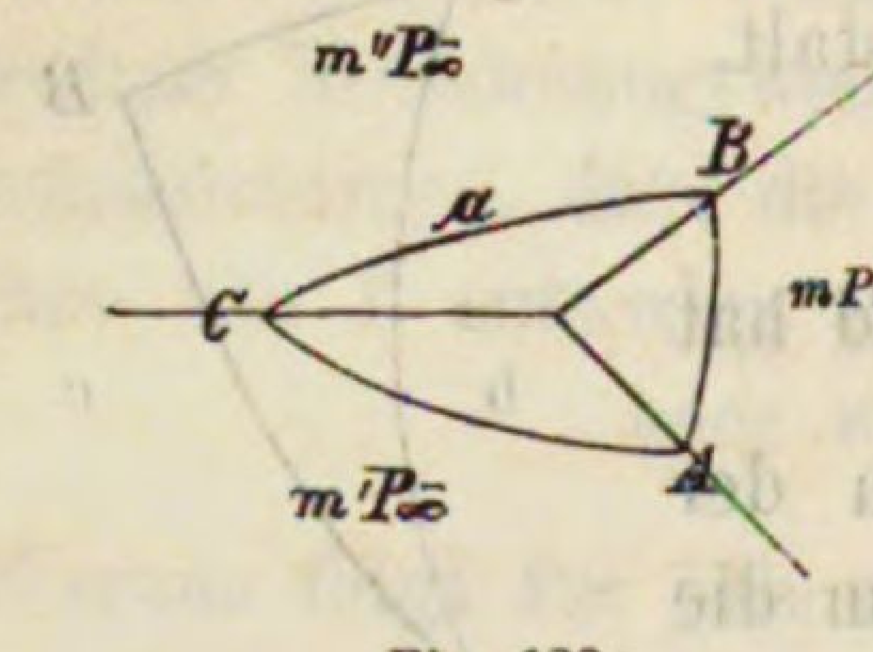


Fig. 122.

Alsdann berechne man durch ein sphärisches Dreieck, welches:

A = Combk. mPn : $m'P\bar{\infty}$.
B = Combk. mPn : $m''P\bar{\infty}$.
C = Combk. $m'P\bar{\infty}$: $m''P\bar{\infty}$ enthält,

die Seite a. Hierauf bilde man $a - 90^0 =$ = a' und gehe in ein weiteres Dreieck ein, Fig. 123, worin gegeben sind:

B' = Combk. mPn : $m''P\bar{\infty}$.
a' = soeben berechnet.
C' = 90.

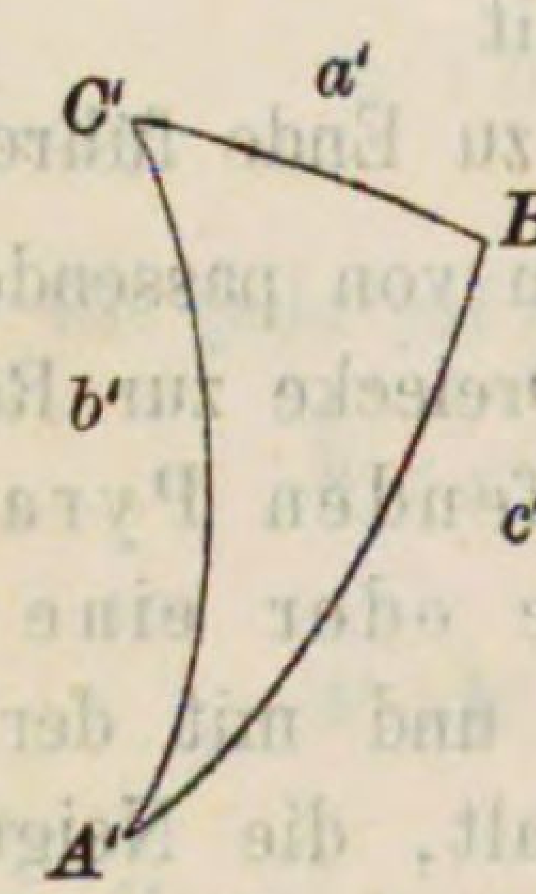


Fig. 123.

Man bestimmt in diesem Dreieck A' = der halben Pyramidenkante X von mPn und b', d. h. die Neigung derselben zur Fläche von $m''P\bar{\infty}$. Hiermit ist aber die Rechnung auf bekannte Weise zu beenden.

Im zweiten Falle, in dem entweder eine Fläche von mPn an der Kante einer bekannten Pyramide, Fig. 124, b, oder an der Kante eines bekannten Prisma's (Doma's), Fig. 125, a. auftritt, berechne man auf der zugehörigen Seite das Stück a und

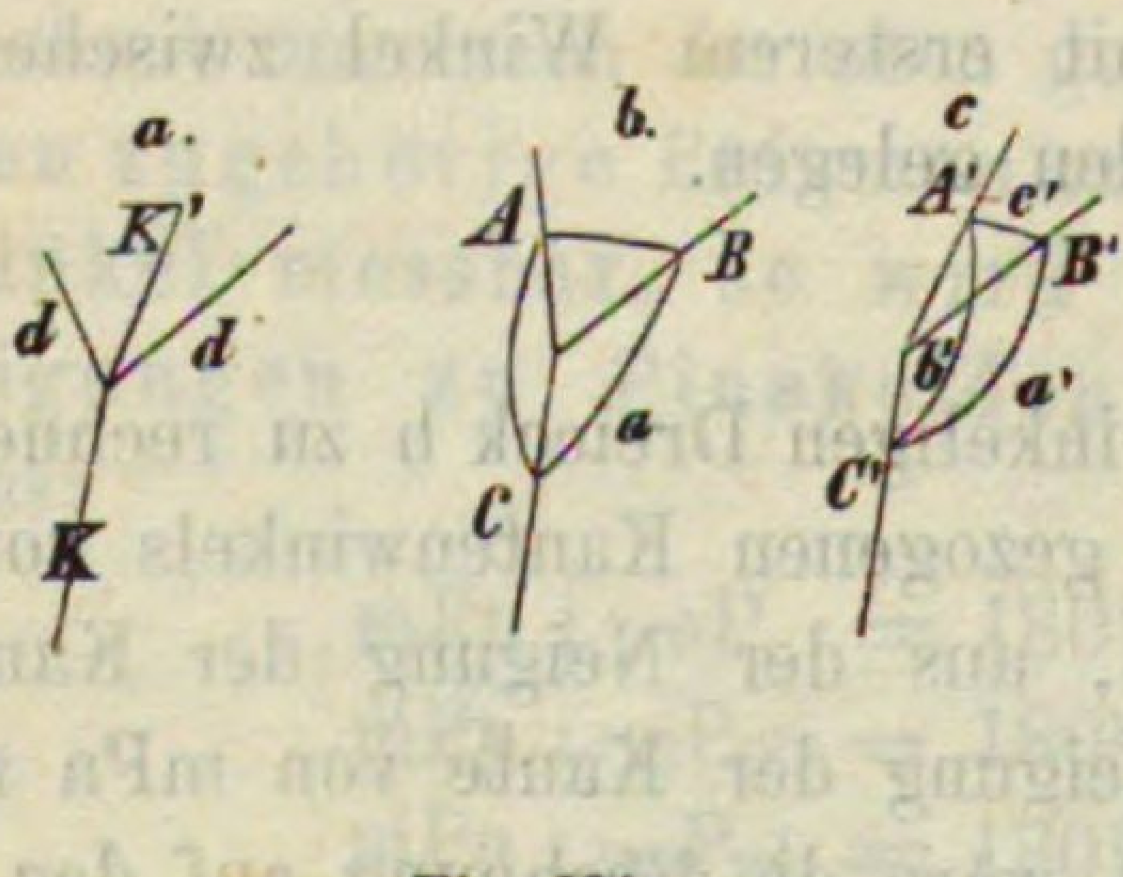


Fig. 124.

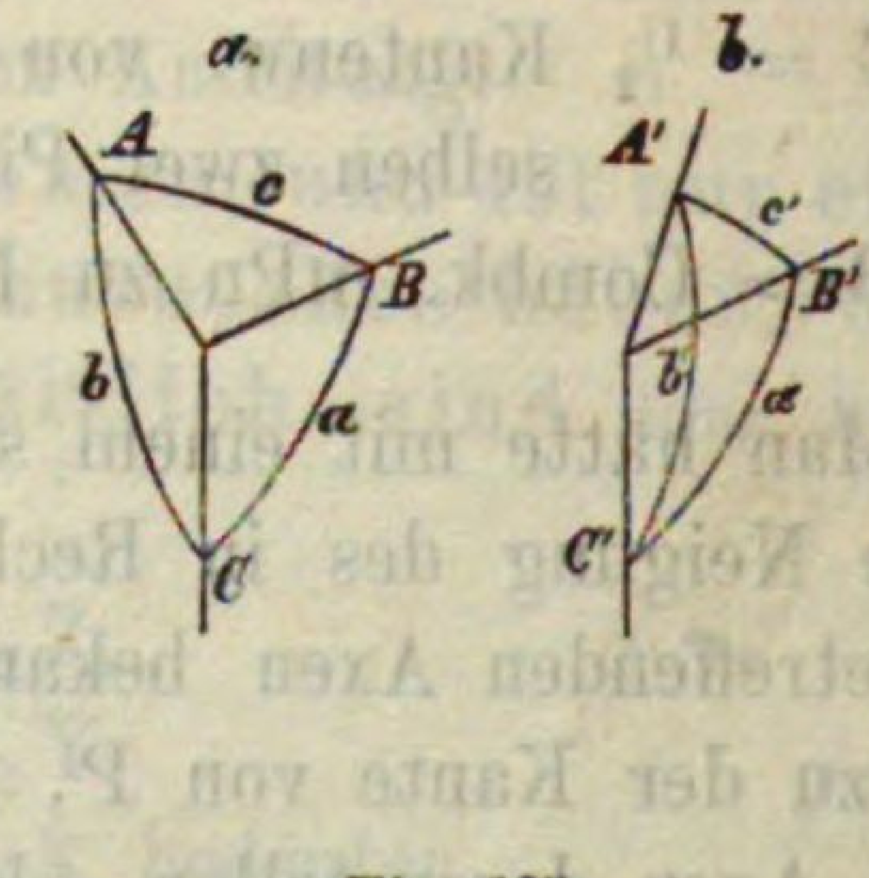


Fig. 125.

gehe in ein weiteres Dreieck ein, Fig. 124, c. und Fig. 125, b, in welchem A', d. h. die halbe Pyramidenkante von mPn und b', d. h. ihre Neigung zu C' berechnet werden. Letzteres Stück stellt entweder, Fig. 124, c, die halbe Kante der bekannten Pyramide, oder, Fig. 125, b. die halbe Kante des bekannten Prisma's (Doma's) dar. Mit A' ist aber ein Kantenwinkel von mPn direct dargestellt und mit b'

ein Hauptschnittswinkel auf einfache Weise zu bilden, so dass die Rechnung sich damit in gewohnter Weise vollenden lässt.

— Sind Zonen vorhanden, so lassen sich die Pyramiden mPn häufig als Pn oder mPm erkennen.

a. Die Pyramiden $P\bar{n}$ und $P\breve{n}$.

Erstere liegen zwischen $P\bar{\infty}$ und P, letztere zwischen $P\breve{\infty}$ und P. Für jene ist also der Hauptschnittswinkel β, für diese γ bekannt. Ist durch eine zugehörige Gestalt noch ein Hauptschnittswinkel gegeben, so lassen sich die Pyramiden aus dem Zonenverband bestimmen, sonst muss, vermittelst eines gemessenen Winkels, der Hauptschnittswinkel α gerechnet werden.

Für die $P\bar{n}$ gilt: $\cotg\alpha = \frac{nb}{a}$, also, da $b = 1$ ist, $n = \cotg\alpha . a$.

Für die $P\breve{n}$ gilt: $\operatorname{tg}\alpha = na$, also folgt hieraus $n = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{a}$.

β. Die Pyramiden $mP\bar{m}$ und $mP\breve{m}$.

Erstere liegen zwischen $\infty P\bar{\infty}$ und P, letztere zwischen $\infty P\breve{\infty}$ und P. Jene haben mit P den Hauptschnittswinkel γ gemein, diese β. Zur völligen Bestimmung genügt ein weiterer Winkel.

Was die $mP\bar{m}$ anlangt, so ist, mit Hülfe dieses Winkels, entweder zu γ noch α, oder β zu rechnen.

Man hat: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{mb}$; $m = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, oder: $\operatorname{tg}\beta = \frac{mc}{a}$, woraus $m = \frac{\operatorname{tg}\beta . a}{c}$ folgt.

Was die $mP\breve{m}$ betrifft, so ist zu β, mit Hülfe des gemessenen Winkels, entweder α, oder γ zu rechnen.

$$\text{Man hat: } \operatorname{tg}\alpha = ma \quad ; \quad m = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{a};$$

$$\text{ferner: } \operatorname{tg}\gamma = mc \quad ; \quad m = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{c}.$$

Es versteht sich von selbst, dass man bei der Berechnung der Pn und mPm sich die zu den gegebenen Hauptschnittswinkeln nöthigen Kantenwinkel der Pyramide möglichst geeignet wählt, wenn dies überhaupt an der betreffenden Combination angeht. Jedenfalls ist bei allen Rechnungen stets der durch Fig. 120 dargelegte Zusammenhang der Hauptschnittswinkel und Kantenwinkel vor Augen zu haben. —

c. Die Prismen ∞P, $\infty \bar{P}n$, $\infty \breve{P}n$.

Was ∞P anlangt, so bedarf dies Prisma keiner Berechnung; es kommt aber sehr oft vor, dass aus der Kenntniss seiner Winkel das Axenverhältniss $\breve{a} : \bar{b}$ hergeleitet werden soll.

Heisse zu dem Ende X der Winkel der Prismen im brachydiagonalen, Y im makrodiagonalen Hauptschnitt, so ist für das Stammprisma, ∞P:

$$\operatorname{cotg} {}^1\!/_2 X = \breve{a}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y = \breve{a}.$$

Die Gestalten $\infty \bar{P}n$ gehen von $a : nb : \infty c$, also auch von $\frac{a}{n} : b : \infty c$.

$$\text{Man hat: } \operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y = \frac{a}{n}.$$

$$n = \frac{a}{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y}.$$

Die Gestalten $\infty \breve{P}n$ gehen von $na : b : \infty c$, daher ist:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y = na.$$

$$n = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y}{a}.$$

d. Die Domen $\breve{P}\infty$, $m\breve{P}\infty$.

Heisse X der Winkel der Brachydomen im brachydiagonalen, Z im basischen Hauptschnitt, so ist, was zur Berechnung des Axenverhältnisses $\bar{b} : \dot{c}$ benutzt werden kann, für das Stammdoma $\breve{P}\infty$:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z = c.$$

Bezüglich der $m\breve{P}\infty$ haben wir:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z = mc,$$

$$\text{woraus: } m = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z}{c} \text{ folgt.}$$

e. Die Domen $\bar{P}\infty$, $m\bar{P}\infty$.

Heisse Y der Winkel der Makrodomen im makrodiagonalen, Z im basischen Hauptschnitt, so ist für das Stammdoma, $\bar{P}\infty$:

$$\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z = \frac{c}{a}.$$

$$c = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z \cdot a.$$

Bezüglich der $mP\breve{\infty}$ gilt:

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 Z = \frac{mc}{a},$$

$$\text{woraus: } m = \frac{\operatorname{tg} {}^1/_2 Z \, . \, a}{c} \text{ folgt.}$$

— Was die Rückrechnung der gemessenen Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten anlangt, so wird sich namentlich die Berechnung der Kantenwinkel der Prismen, Domen und Pyramiden am einfachsten mit Trigonometrie, und unter Zuhülfenahme der gegebenen Formeln, bewerkstelligen lassen. Das Gleiche gilt, unter Berücksichtigung der Hauptschnitte, auch von den Winkeln der Gestalten in den wichtigsten, p. 191 genannten, Zonen des Systems.

Neigungen von Pyramiden zu Prismen oder Domen wird man ebenfalls, wenn die Kanten- und Hauptschnittswinkel der Gestalten bekannt sind, mit rechtwinkeligen Dreiecken darstellen können, und es bleiben schliesslich nur Neigungen von Pyramiden zu Pyramiden, welche mit ersteren nicht im Zonenverband stehen, und Neigungen von Flächen beliebiger Lage übrig, in welchen Fällen die Anwendung der Winkelformel der Rechnung mit schiefwinkeligen Dreiecken vorzuziehen sein dürfte. —

4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

a. Weissbleierz von der Grube Taininsk im Nertschinsker Bergrevier. Transbaikalien.*

Eine allgemeine Bestimmung der Combination, Tafel VI, Fig. 1, ergibt, wenn man von der mit p bezeichneten Pyramide als Stammform ausgeht:

P,	$nP(n<1)$,	∞P,	$nP\bar{\infty}$,	$nP\breve{\infty}$,	$mP\breve{\infty}(m>n)$,	$\infty P\breve{\infty}$,	oP,	$mP\breve{m}$,	$mP\bar{n}$.	
p,	o,	m,	y,	x,	k,	a,	c,	s,	w.	

Die Gestalten x und y sind die zu o gehörigen Domen; s wird als $mP\breve{m}$ erkannt, weil es in die Zone $P : \infty P\breve{\infty}$ fällt. Ob $k = P\breve{\infty}$ und w etwa von einem einfacheren Zeichen sei, kann man ohne genauere Untersuchung nicht sagen, da die Zonen, welche dies erkennen lassen würden, versteckt sind.

* Vergl. N. v. Kokscharow, Mat. z. Min. Russlands, B. VI, p. 100 u. f. T. LXXIX, Fig. 13.

1. Zunächst ist das Axenverhältniss herzuleiten. Zu dem Ende sei gemessen:

$$\infty P : \infty P, \text{ Kante } X = 117^0\ 14'\ 10''.$$

Dieser Winkel dient zur Berechnung von a : b, indem cotg $^1/_2$ X = = $\breve{a}$ ist.

$$\log.\ \text{num}\ \breve{a} = \log.\ \text{cotg}\ 58^0\ 37'\ 5'' = 9{,}7853086 - 10$$

$$\text{num.}\ \breve{a} = 0{,}609970.$$

Ein weiterer Winkel ist erforderlich zur Bestimmung von $\bar{b} : \acute{c}$. Wir könnten hierzu die Pyramide heranziehen, thun dies aber nicht, sondern untersuchen am Goniometer, ob k das zugehörige Brachydoma $P\breve{\infty}$ ist, indem wir die brachydiagonale Polkante von P einstellen und zusehen, ob k mit den zwei, der Polkante von p anliegenden Flächen in einer Zone liegt. Wir finden dies bestätigt und erkennen überdies auch, dass $\underline{w}$ an derselben Zone Theil nimmt. Aus diesem Zonenverband $\bar{\underline{w}}$, $\underline{p}$, $\underline{k}$ folgt sofort für w das allgemeine Zeichen $mP\bar{m}$. Wir sind zu diesem Schlusse desshalb berechtigt, weil in der Hauptzone $\infty P\breve{\infty} : P : P\breve{\infty}$ nur $mP\bar{m}$ und $P\breve{n}$ auftreten. Letztere liegen aber zwischen P und $P\breve{\infty}$, dies thut $\bar{\underline{w}}$ nicht, folglich kann es nur zwischen P und dem am Krystalle allerdings nicht vorhandenen $\infty P\breve{\infty}$ als Grenzgestalten liegen, d. h. muss vom Zeichen $mP\bar{m}$ sein.

Zur Bestimmung des Axenverhältnisses $\bar{b} : \acute{c}$ dient:

$$oP : P\breve{\infty} = 144^0\ 8'.$$

Es ist: cotg $54^0\ 8' = c$. Zur Ausrechnung schreitend folgt:

$$\log.\ \text{num}\ \acute{c} = \log.\ \text{cotg}\ 54^0\ 8' = 9{,}8591341$$

$$\text{num.}\ \acute{c} = 0{,}722993.$$

Das Axenverhältniss ist also: $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}609970 : 1 : 0{,}722993$.

2. Wir wenden uns nun zur Bestimmung von y = $nP\breve{\infty}$ und hiermit auch zu der von o = nP und x = $nP\bar{\infty}$. Letztere Gestalten stehen der Art mit einander und den bereits bekannten im Zonenverband, dass mit der Bestimmung einer derselben die anderen gegeben sind: y und x sind die zu o gehörigen Domen, und o selbst ist eine Pyramide der Hauptreihe. Gemessen sei oP : $nP\bar{\infty}$ = $149^0\ 20'$. Es ist alsdann: $\text{cotg}\ 59^0\ 20' = \frac{n\,c}{a}$; $n = \frac{\text{cotg}\ 59^0\ 20' \,.\, a}{c}$.

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{num}\ n = \log.\ \text{cotg}\ 59^0\ 20' &= 9{,}7730327 - 10\\
+ \log.\ \text{num}\ a &= 9{,}7853086 - 10\\
\hline
&\ 9{,}5583413 - 10\\
- \log.\ \text{num}\ c &= 9{,}8591341 - 10\\
\hline
&\ 9{,}6992072 - 10
\end{aligned}$$

num. n = 0,5.

Die Gestalt y ist daher = $\frac{1}{2}P\breve{\infty}$.

Für o folgt daraus das Zeichen $\frac{1}{2}P$ und für x der Werth $\frac{1}{2}P\breve{\infty}$.

3. Trägt man diese Gestalten mit den anderen bekannten in eine Projection, Tafel VI, Fig. 2, ein, so ergibt sich ihr Zonenzusammenhang, und die Gestalt s = $mP\breve{m}$ lässt sich sofort deduciren.

Für dieselbe sind nämlich zwei Zonen gegeben; zuerst die Hauptzone $\underline{p}$: $\underline{a}$, in die eine Fläche $\underline{s}$ beispielsweise fällt, dann die Zone $\underline{m}$: $\underline{k}$. Die Coordinaten des ersten Zonenpunktes sind a : o b, die des zweiten — a : b. Die in beide Punkte fallende Linie wird von a : $\frac{1}{2}$b gehen, die entsprechende Fläche also von a : $\frac{1}{2}$b : c, d. h. = $2P\breve{2}$ sein.

4. Zur Bestimmung bleibt noch übrig w. Wir wissen, dass diese Gestalt vom Zeichen $mP\bar{m}$ sein muss, folglich genügt zu ihrer Bestimmung ein Winkel, da der Hauptschnittswinkel γ denselben Werth hat, wie in der Grundform = 35° 52′.

Messen wir also noch $\underline{w}'$: $\underline{w}$, so erhalten wir X = 148° 36′ und finden hieraus:

$$\cos\beta = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} X \,.\, \operatorname{cotg}\gamma,$$

$$\text{ferner: } m = \frac{\operatorname{tg}\beta \,.\, a}{c}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\cos\beta &= \log.\operatorname{cotg} 74^0\, 18' = 9{,}4488413 - 10\\
&+ \log.\operatorname{cotg} 35^0\, 52' = 0{,}1408659\\
&\qquad\qquad 9{,}5897072 - 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\text{num. } m &= \log.\operatorname{tg} 67^0\, 7'\, 16'' = 0{,}3747057 \qquad \beta = 67^0\, 7'\, 16''.\\
&+ \log.\text{num. } a = 9{,}7853086 - 10\\
&\qquad 0{,}1600143\\
&- \log.\text{num. } c = 9{,}8591341 - 10\\
&\qquad 0{,}3008802\\
&\qquad \text{num. } m = 2.
\end{aligned}$$

Die Gestalt w ist sonach = $2P\bar{2}$. Wir tragen w und s in die Projection ein und vervollständigen damit das Bild des Zonenzusammenhangs der Combination.

Hätte man für w nicht aus dem Zonenverband das allgemeine Zeichen ermitteln können, so würde die Berechnung zwei Winkel erfordert haben, und man hätte dieselbe, wie folgt, führen müssen.

Es wäre, ausser X = 148° 36′, noch zu messen gewesen $\underline{w}$: $\underline{y}$ =

= 140° 43′, und damit hätten wir ein sphärisches Dreieck, Fig. 126, legen müssen, in dem:

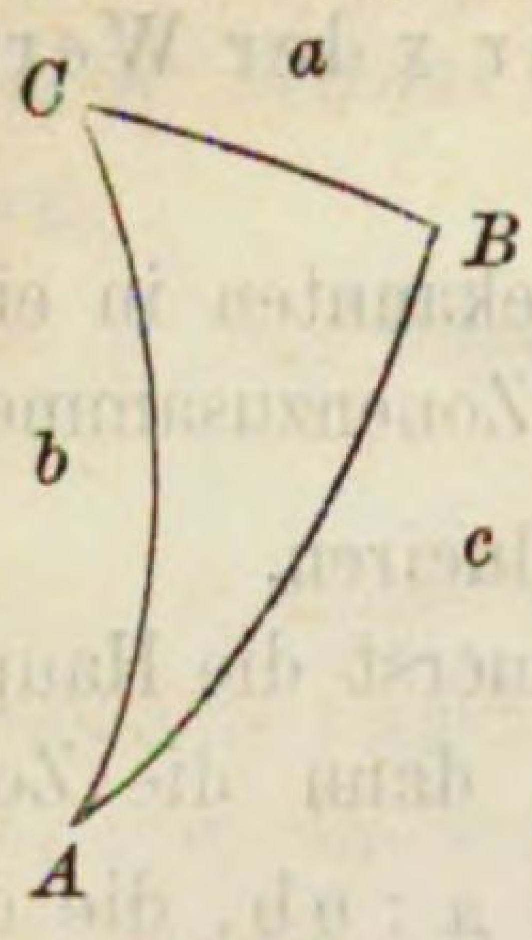


Fig. 126.

A = 74° 18′.
B = 140° 43′.
C = 90° die bekannten Stücke abgegeben hätten. In diesem Dreieck hätten wir b berechnet, d. h. die Neigung der Polkante X zur Höhenlinie auf der Fläche von $\frac{1}{2}P\bar{\infty}$. Daraus wäre dann die Neigung von X zur Hauptaxe darzustellen und in bekannter Weise weiter zu verfahren gewesen.

b. Baryt von Dufton.*

Indem wir in der Combination, Tafel VI, Fig. 3, von z als Grundpyramide ausgehen und die Brachydiagonale senkrecht auf s ausmünden denken, bestimmen sich folgende Gestalten:

∞P, $P\breve{\infty}$, oP, $\infty P\breve{\infty}$, $\infty P\bar{\infty}$, $\infty P\bar{n}$, $\infty P\breve{n}$, $P\breve{n}$, $nP\breve{\infty}$ $(n < 1)$.
M, o, P, s, k, t, q, y, d.

1. Zur Ableitung des Axenverhältnisses seien gemessen:

$\infty P : \infty P$ Kante X = 101° 40′.
$oP : P\breve{\infty}$ = 127° 18′.

Alsdann ist: log. num. $\breve{a}$ = log. cotg 50° 50′ = 9,9109507 — 10
num. $\breve{a}$ = 0,814612.

Ferner hat man: log. num. $\acute{c}$ = log. cotg 37° 18′ = 0,1181614
num. $\acute{c}$ = 1,312690.

Also ist das Axenverhältniss: $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c}$ = 0,814612 : 1 : 1,312690.

2. Zur Bestimmung der Gestalt q messen wir k : q = 148° 27′; hieraus folgt $\frac{1}{2}$ Y von q = $\infty P\breve{n}$ = 58° 27′.

log. num. n = log. tg 58° 27′ = 0,2118304
— log. num. a = 9,9109507 — 10
0,3008797

Die Gestalt q ist = $\infty P\breve{2}$. num. n = 2.

3. Gehen wir zur Pyramide y über, so ist sie vom Zeichen $P\breve{n}$, weil in einer Zone zwischen P und $P\breve{\infty}$ gelegen. $\infty P\breve{2}$ ist aber das zugehörige Prisma, folglich wird y = $P\breve{2}$.

* Vergl. Naumann, Lehrb. d. rein. u. angew. Kryst. 1830, B. II, Tafel XXIV, Fig. 522.

4. Die Bestimmung von d erfolgt gleichfalls ohne alle Rechnung. Wir bemerken, dass y die Polkanten X von $P\breve{2}$ gerade abstumpft, diese Kanten gehen aber von $2a : c$; folglich das Doma von $2a : \infty b : c = \frac{1}{2} P\breve{\infty}$.

5. Es bleibt nun noch die Bestimmung von t übrig. Wir messen $t : s = 151^0\ 30'$ und haben daraus $\frac{1}{2}X$ von $t = 61^0\ 30'$.

$$\begin{aligned} \text{log. num. } n = \text{log. num } \breve{a} &= 9{,}9109507 - 10 \\ - \text{log. cotg } 61^0\ 30' &= \underline{9{,}7347644 - 10} \\ &\ 0{,}1761863 \end{aligned}$$

Das Prisma t ist $= \infty P\,\bar{3}/_2$. num. $n = 1{,}5$.

c. Olivin aus dem Pallas-Eisen.*

Eine allgemeine Bestimmung der Combination, Tafel VI, Fig. 4 ergibt, wenn man von der mit e bezeichneten Pyramide als Stammform ausgeht:

∞P,	$P\breve{\infty}$,	oP,	$\infty P\breve{\infty}$,	$nP\,(n < 1)$,	zwei $mP\breve{m}$,	zwei zugehörige $\infty P\breve{n}$,	drei $mP\breve{\infty}$.
n,	d,	c,	a,	o,	f und l,	s und r,	h, k, i.

1. Zur Bestimmung des Axenverhältnisses der Grundform legen wir folgende Messungen zu Grunde:

$$\infty P : \infty P \text{ Kante } X = 130^0\ 3'.$$
$$P\breve{\infty} : P\breve{\infty} \text{ Kante } Z = 103^0\ 6'.$$

$$\text{log. num. } \breve{a} = \text{log. cotg } 65^0\ 1'\ 30'' = 9{,}6681776 - 10$$
$$\text{num. } \breve{a} = 0{,}465777.$$

$$\begin{aligned} \text{log. num. } \grave{c} = \text{log. tg } 51^0\ 33' &= 0{,}1001729 \\ + \text{log. num. } \breve{a} &= \underline{9{,}6681776 - 10} \\ &\ 9{,}7683505 - 10 \end{aligned}$$
$$\text{num. } \grave{c} = 0{,}586611.$$

Das Axenverhältniss ist also $\breve{a} : \bar{b} : \grave{c} = 0{,}465777 : 1 : 0{,}586611$.

Aus demselben können alle Winkel der Gestalten, die man zu wissen wünscht, abgeleitet werden. —

2. Zur Bestimmung von $o = nP$ schreitend, messen wir $c : o = 145^0\ 13'$ und leiten daraus $\frac{1}{2}Z$ von $o = 34^0\ 47'$ ab. Da die Pyramide aus der Hauptreihe ist, so hat sie mit e den Hauptschnittswinkel α gemein $= 24^0\ 58'\ 30''$.

* Vergl. N. v. Kokscharow, Mat. z. Min. Russl. B. VI., p. 5. u. f. Taf. LXXV, Fig. 4.

Folglich ist: $tg\gamma = \sin\alpha . tg\,{}^1\!/_2 Z = nc$,

woraus: $n = \frac{\sin\alpha . tg\,{}^1\!/_2 Z}{c}$ folgt.

$$\begin{aligned} \text{log. num. } n = \text{log. sin } 24^0\,58'\,30'' &= 9{,}6255417 - 10 \\ + \text{ log. tg } 34^0\,47' &= 9{,}8417265 - 10 \\ \hline &\ 9{,}4672682 - 10 \\ - \text{ log. num. } c &= 9{,}7683505 - 10 \\ \hline &\ 9{,}6989177 - 10 \\ \text{num. } n &= 0{,}5. \end{aligned}$$

Die Pyramide o ist = $^1\!/_2$P.

3. Die Pyramiden f und l sind vom Zeichen mP$\breve{\text{m}}$, weil in der Zone P$\breve{\infty}$: P : ∞P$\breve{\infty}$ und zwischen P und ∞P$\breve{\infty}$ als Grenzgestalten gelegen. Am einfachsten macht man ihre Bestimmung von den zugehörigen Prismen abhängig; wären letztere nicht vorhanden, so müsste zu der, aus der Messung zu P$\breve{\infty}$ darzustellenden Kante X, noch der Hauptschnittswinkel γ der Grundform herangezogen und mit X und γ die Rechnung geführt werden.

Wir messen s : n = 162^0 0′ und leiten daraus $^1\!/_2$X von ∞P$\breve{\text{n}}$ = = 47^0 1′ 30″ ab.

$$\begin{aligned} \text{log. num. } n = \text{log. cotg } 47^0\,1'\,30'' &= 9{,}9692759 - 10 \\ - \text{ log. num. } a &= 9{,}6681776 - 10 \\ \hline &\ 0{,}3010983 \\ \text{num. } n &= 2. \end{aligned}$$

Das Prisma s ist = ∞P$\breve{2}$, folglich f = 2P$\breve{2}$.

Zur Bestimmung von r messen wir r : a = 144^0 25′ und leiten daraus $^1\!/_2$Y von ∞P$\breve{\text{n}}$ = 54^0 25′ ab.

$$\begin{aligned} \text{log. num. } n = \text{log. tg } 54^0\,25' &= 0{,}1453966 \\ - \text{ log. num. } a &= 9{,}6681776 - 10 \\ \hline &\ 0{,}4772190 \\ \text{num. } n &= 3. \end{aligned}$$

Das Prisma r ist = ∞P$\breve{3}$ und l = 3P$\breve{3}$.

4. Was die Domen h, k und i anlangt, so sind für dieselben weitere Zonen, als die Hauptzone oP : ∞P$\breve{\infty}$, reichlich vorhanden, allein zur Deduction offen darliegend ist doch nur die Zone n : d : o : h. Wir wollen desshalb die Domen durch Rechnung ableiten und erst danach durch Eintragen aller Gestalten in eine Projection, Tafel VI, Fig. 5, den ganzen Reichthum des Zonenzusammenhangs der Combination uns vor Augen führen.

Zur Ableitung seien gemessen:

a : i = 156° 55 ; a : k = 139° 33′ ; a : h = 120° 24′.

Zur Berechnung von i schreitend, haben wir:

log. num. m = log. tg 66° 55′ = 0,3703943
— log. num. c = 9,7683505 — 10
0,6020438

Die Gestalt i ist = 4P$\breve{\infty}$. num. m = 4.

Zur Ableitung von k übergehend ist:

log. num. m = log. tg 49° 33′ = 0,0692686
— log. num c = 9,7683505 — 10
0,3009181

Die Gestalt k ist = 2P$\breve{\infty}$. num. m = 2.

Die letzte Gestalt ist h; wir haben zur Ableitung derselben den Winkel a : h = 120° 24′.

log. num. m = log. tg 30° 24′ = 9,7684135 — 10.

Dieser log. ist, in Anbetracht der kleinen, unvermeidlichen Ungenauigkeiten bei der Winkelmessung, gleich dem der Hauptaxe zu setzen; m wird daher = 1 und das Doma h ist = P$\breve{\infty}$.

Trägt man, wie oben bemerkt, alle Gestalten in eine Projection auf die Basis, Tafel VI, Fig. 5 ein, so erschliesst sich ein überraschender Reichthum an Zonen. Dieselben sind gehörig zu controliren und sicher zu stellen, und man erhält alsdann ein Bild des Zonenzusammenhangs der Combination.

Mit Hülfe dieses in allem Wechsel constant bleibenden Zonenzusammenhangs gelingt es auch ohne Mühe in einem rhombischen System die Aufstellung der Krystalle zu ändern. Man hat zu diesem Zwecke, namentlich bei verwickelten Combinationen, die einzelnen Flächen mit Buchstaben und Strichen zu versehen, um nach dem Anlegen der neuen Projectionsfigur, die in Zonen befindlichen Gestalten sofort eintragen und entwickeln zu können.

Wollen wir z. B. unsere Olivincombination nach dem Schrauf'schen Vorschlag so stellen, dass die erste Mittellinie der optischen Axen mit der Hauptaxe coincidirt, so haben wir die Kante c : a als Axe $\overset{\prime}{c}$ zu nehmen. Die Umstellung vollzieht sich dann sofort und ohne weitere Umstände, wenn wir a wieder = ∞P$\breve{\infty}$, e = P setzen, dagegen c als ∞P$\bar{\infty}$ annehmen. Wir erhalten dann:

∞P , P$\bar{\infty}$, P$\breve{\infty}$, 2P$\breve{2}$, 3P$\breve{3}$, 2P$\breve{\infty}$, 3P$\breve{\infty}$, ∞P$\breve{2}$, ∞P$\breve{4}$,
h , d , n , f , l , s , r , k , i,
2P$\bar{2}$.
o.

Die einzige Gestalt, die sich nicht sofort ableitet, ist o. Aus der Zone P : $\infty P\bar{\infty}$ folgt aber das Zeichen $mP\bar{m}$ und aus der Zone $P\bar{\infty} : \infty P$ lässt sich, für diesen Zweck sogar unter Benützung der alten Projectionsfigur, die Gestalt zu $2P\bar{2}$ ableiten. Das Axenverhältniss bleibt dasselbe, nur a und c der alten Stellung, werden zu c und a in der neuen. Wir haben daher schliesslich $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}586611 : 1 : 0{,}465777$.

Werden durchgreifendere Aenderungen und Umstellungen vorgenommen, so verwickelt sich natürlich die Aufgabe etwas; die Lösung kann jedoch immer mit diesen ganz elementaren Hülfsmitteln erstrebt werden.

d. Bleivitriol von Anglesea.*

Eine allgemeine Bestimmung der Combination, Tafel VI, Fig. 6, ergibt, wenn wir z als Stammform annehmen und berücksichtigen, dass c = $\infty P\bar{\infty}$ ist:

∞P, oP, $\infty P\breve{\infty}$, $nP\breve{\infty}(n<1)$, $n'P\bar{\infty}(n'<n)$, $P\breve{n}$, $\infty P\breve{n}$,
m, a, b, d, l, y, n,

$P\breve{\infty}$, $mP\breve{\infty}(m>1)$, $mP\bar{n}$.
o, β, p.

1. Zur Ableitung des Axenverhältnisses seien gemessen:

$$\infty P : \infty P \text{ Kante } X = 103^0\, 43'\, 30''.$$
$$P\breve{\infty} : oP = 127^0\, 47'\, 45''.$$

Alsdann ist: $\log. \text{num. } \breve{a} = \log. \text{cotg } 51^0\, 51'\, 45'' = 9{,}8949568 - 10$
$\text{num. } \breve{a} = 0{,}785158.$

Ferner haben wir: $\log. \text{num. } \acute{c} = \log. \text{cotg } 37^0\, 47'\, 45'' = 0{,}1103829$
$\text{num. } \acute{c} = 1{,}289386.$

Das Axenverhältniss ist also: $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}785158 : 1 : 1{,}289386$.

2. Um d und l zu bestimmen, seien gemessen:

$$nP\breve{\infty}\,(d) : \infty P\bar{\infty} = 129^0\, 24'.$$
$$n'P\bar{\infty}\,(l) : \infty P\bar{\infty} = 112^0\, 19'.$$

Zur Bestimmung von d ist alsdann:

$$\begin{aligned} \log. \text{num. } n = \log. \text{tg } 39^0\, 24' &= 9{,}9145596 - 10 \\ + \log. \text{num. } a &= 9{,}8949568 - 10 \\ \hline &\ 9{,}8095164 - 10 \\ - \log. \text{num. } c &= 0{,}1103829 \\ \hline &\ 9{,}6991335 - 10 \end{aligned}$$

Das Doma d ist = $\frac{1}{2}P\breve{\infty}$. num. n = 0,5.

* Vergl. V. von Lang, Versuch einer Monographie des Bleivitriols, Sitzber. d. k. k. Academie d. Wissensch. B. XXXVI. 1859. Fig. 80.

Zur Bestimmung von l schreitend ist:

$$\begin{array}{rl} \log.\ \text{num.}\ n' = \log.\ \text{tg}\ 22^0\ 19' = & 9{,}6132812 - 10 \\ + \log.\ \text{num.}\ a = & 9{,}8949568 - 10 \\ \hline & 9{,}5082380 - 10 \\ - \log.\ \text{num.}\ c = & 0{,}1103829 \\ \hline & 9{,}3978551 - 10 \end{array}$$

Das Doma l ist = $\frac{1}{4}P\breve{\infty}$. num. n' = 0,25.

3. Zur Bestimmung von β = $mP\breve{\infty}$ sei gemessen:

$mP\breve{\infty} : oP = 104^0\ 30'$.

Alsdann ist: log. num. m = log. cotg $14^0\ 30'$ = 0,5873419

$$\begin{array}{rl} - \log.\ \text{num.}\ c = & 0{,}1103829 \\ \hline & 0{,}4769590 \end{array}$$

Das Doma β ist = $3P\breve{\infty}$. num. m = 3.

4. Trägt man die bis jetzt bestimmten Gestalten in eine Projection auf oP, Tafel VI, Fig. 7, ein, so ist die Säule n = $\infty P\breve{n}$ aus dem Zonenverband zu bestimmen. Ausser der Hauptzone $\infty P\breve{\infty} : \infty P$ fällt sie nämlich in eine Zone mit $3P\breve{\infty}$ und P. Berücksichtigen wir eine Fläche $\underline{n}$ von $\infty P\breve{n}$, so fällt dieselbe in eine Zone mit $\underline{\beta}$ und $\underline{z}$. Die Coordinaten des Zonenpunktes der Sectionslinien von $\underline{\beta}$ und $\underline{z}$ sind nur in Bezug auf die Coordinate a zu bestimmen, da die Coordinate b = = — $\frac{1}{3}$b ist. Wir haben somit:

$$\mu = o\ ,\ \nu = -3\ \ ;\ \ \mu_{\prime} = 1\ ,\ \nu_{\prime} = -1\ ;$$

$$\text{folglich:}\ \frac{-1+3}{(o.-1)-(1.-3)}\ a = \frac{2}{3}\ a.$$

Nunmehr ist geltend zu machen, dass die Sectionslinie von $\underline{n}$ in dem Zonenpunkt von $\underline{\beta}$ und $\underline{z}$ mit den Coordinaten $\frac{2}{3}$a : — $\frac{1}{3}$b und im Mittelpunkt liegt, daher erhalten wir, nach der Rechnung mit dem Mittelpunkt, vergl. p. 46:

$$-\frac{a}{{}^3/_2} : \frac{b}{-3} : \frac{c}{o} = {}^2/_3 a : {}^1/_3 b : \infty c = 2a : b : \infty c = \infty P\breve{2}.$$

5. Was die Pyramide y anlangt, so ist sie, weil in einer Zone zwischen P und $P\breve{\infty}$ gelegen, vom Zeichen $P\breve{n}$. Weitere Zonen liegen nicht offen dar, sondern sind versteckt. Mit Hülfe des Goniometers könnte man aber u. A. für eine Fläche der Pyramide, z. B. $\underline{y}$, nachweisen, dass eine Zone $\underline{n} : \underline{y} : \underline{a}$ besteht und somit die Pyramide als $P\breve{2}$ erkennen. Wir wollen indessen diesen Weg nicht einschlagen, sondern die Pyramide berechnen.

Aus dem allgemeinen Zeichen $P\breve{n}$ folgt, dass y mit z den Hauptschnittswinkel γ gemein habe. Zur völligen Bestimmung genügt also ein weiterer Winkel. Wählen wir hierzu:

$$P\breve{\infty} : P\breve{n} = 153^0\,18', \text{ so folgt: } {}^1\!/_2 Y = 63^0\,18'.$$

$$\text{Demnach ist: } \operatorname{tg}\alpha = \sin\gamma \,.\, \operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y = na;\ n = \frac{\sin\gamma \,.\, \operatorname{tg} {}^1\!/_2 Y}{a}.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \text{num. } n = \log.\ \sin 52^0\,12'\,15'' &= 9{,}8977368 - 10 \\ + \log.\ \operatorname{tg} 63^0\,18' &= 0{,}2984773 - 10 \\ &\quad 0{,}1962141 \\ - \log.\ \text{num. } a &= 9{,}8949568 - 10 \\ &\quad 0{,}3012573 \end{aligned}$$

Die Pyramide y ist $= P\breve{2}$. num. n = 2.

Trägt man die vier Sectionslinien der Pyramide in die Projection ein, so offenbaren sich mehrere, am Krystalle versteckte Zonenverbände der Pyramide mit den bereits bekannten Gestalten. Unter diesen Beziehungen hat die das meiste Interesse, welche uns erkennen lässt, dass ${}^1\!/_2 P\breve{\infty}$ die Polkanten X von $P\breve{2}$ gerade abstumpft.

6. Schliesslich sind noch die Axenschnitte der Pyramide p zu ermitteln. Dies kann vorab durch den Zonenverband geschehen, da die Pyramide, z. B. die Fläche $\underline{p}$ derselben, in folgende Zonen fällt:

1. $\underline{z} : \underline{d}$, Coordinaten des Zonenpunktes 2a : b.
2. $\underline{l} : \underline{m}$, Coordinaten des Zonenpunktes 4a : 4b.

Wir haben sonach: $m = {}^1\!/_2$, $n = 1$; $m_, = {}^1\!/_4$, $n_, = {}^1\!/_4$;

$$\text{folglich erhalten wir: } \frac{({}^1\!/_4 . 1) - ({}^1\!/_2 . {}^1\!/_4)}{{}^1\!/_2 . {}^1\!/_4 (1 - {}^1\!/_4)} a : \frac{({}^1\!/_4 . 1) - ({}^1\!/_2 . {}^1\!/_4)}{1 . {}^1\!/_4 ({}^1\!/_4 - {}^1\!/_2)} b =$$

$$= {}^4\!/_3 a : -2b : c = {}^3\!/_4 P\,\overline{{}^3\!/_2}.$$

Um die Axenschnitte von p durch Rechnung abzuleiten, kann man auf verschiedene Weise verfahren und wird, je nachdem man die Messungen anstellen kann, mehr oder minder rasch zum Ziele gelangen.

Wir wollen zur Erschwerung der Rechnung hier annehmen:

1. Die Pyramide sei nur mit einer Fläche und zwar der schon oben erwähnten $\underline{p}$ vorhanden.

2. Neigungen von $\underline{p}$ zu den Pinakoiden seien nicht erhältlich.

3. Von den zwei oben genannten Zonen sei die eine $\underline{l} : \underline{m}$ durch das Fehlen von $\underline{l}$ nicht vorhanden, die andere $\underline{z} : \underline{d}$ durch ungenügende

Beschaffenheit der Fläche $\underline{z}$ nicht mit Sicherheit verwendbar. Zur Ableitung habe man daher gemessen:

$$\underline{p} : \underline{d} = 155^0\ 11' \text{ und } \underline{p} : \underline{m} = 142^0\ 57'.$$

Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir den Hauptsatz der Krystallberechnung, vergl. p. 80, uns vor Augen führen und werden dann, nach einiger Ueberlegung, finden, dass es am zweckmässigsten ist, die Kante X von $\underline{p}$ zu berechnen und ihre Neigung zu der Höhenlinie auf $\frac{1}{2}P\breve{\infty}$ darzustellen. Zu diesem Behufe ist in dem Dreikant, welches durch die Flächen $\underline{p}$, $\underline{m}$ und $\underline{d}$ gebildet wird, der ebene Winkel zu rechnen, den die Kante $\underline{p} : \underline{d}$ mit der Kante $\underline{d} : \underline{m}$ bildet, und mit Hülfe dieses Winkels die Rechnung, wie später gezeigt werden wird, zu führen.

Vorher bedürfen wir jedoch noch der Kenntniss der Kanten $\underline{d} : \underline{m}$, $\underline{m} : \underline{c}$ und $\underline{d} : \underline{c}$; auch müssen wir den ebenen Winkel berechnen, den die Kanten $\underline{d} : \underline{m}$ und $\underline{d} : \underline{c}$ mit einander bilden.

Von diesen Winkeln ist, da aus einem Fundamentalwerthe abgeleitet, bekannt $\underline{m} : \underline{c} = 141^0\,51'\,45''$. Was den Winkel $\underline{d} : \underline{c}$ anlangt, so ist er gemessen zu $129^0\ 24'$, wir wollen ihn aber aus dem Axenverhältniss rückrechnen; $\underline{d} : \underline{m}$ könnte durch Messung gleichfalls bestimmt, soll aber ebenfalls berechnet werden; der oben genannte ebene Winkel ist jedenfalls zu rechnen.

Bestimmung des Winkel $\underline{d} : \underline{c}$.

Wir haben die Formel: $\text{tg}\,\frac{1}{2}Z' = \frac{\frac{1}{2}c}{a}$, ferner $\frac{1}{2}Z' + 90^0 = \underline{d} : \underline{c}$.

$$\begin{array}{rl}
\log.\ \text{tg}\ \frac{1}{2}Z' = \log.\ \text{num.}\ 0{,}5 = & 9{,}6988700 - 10 \\
+ \log.\ \text{num.}\ c = & 0{,}1103829 \\ \hline
& 9{,}8093529 - 10 \\
- \log.\ \text{num.}\ a = & 9{,}8949568 - 10 \\ \hline
& 9{,}9143961 - 10 \\
& \frac{1}{2}Z = 39^0\ 23'\ 22''.
\end{array}$$

$\underline{d} : \underline{c}$ ist also $= 129^0\ 23'\ 22''$.

Dieser soeben berechnete Werth stimmt sehr annähernd mit dem gemessenen Winkel $= 129^0\,24'$, so dass wir mit dem letzteren auch in die Rechnung hätten eingehen können.

Zur Bestimmung von $\underline{d} : \underline{m}$ und des erwähnten, ebenen Winkels legen wir ein sphärisches Dreieck, Fig. 127, das folgende Stücke enthält:

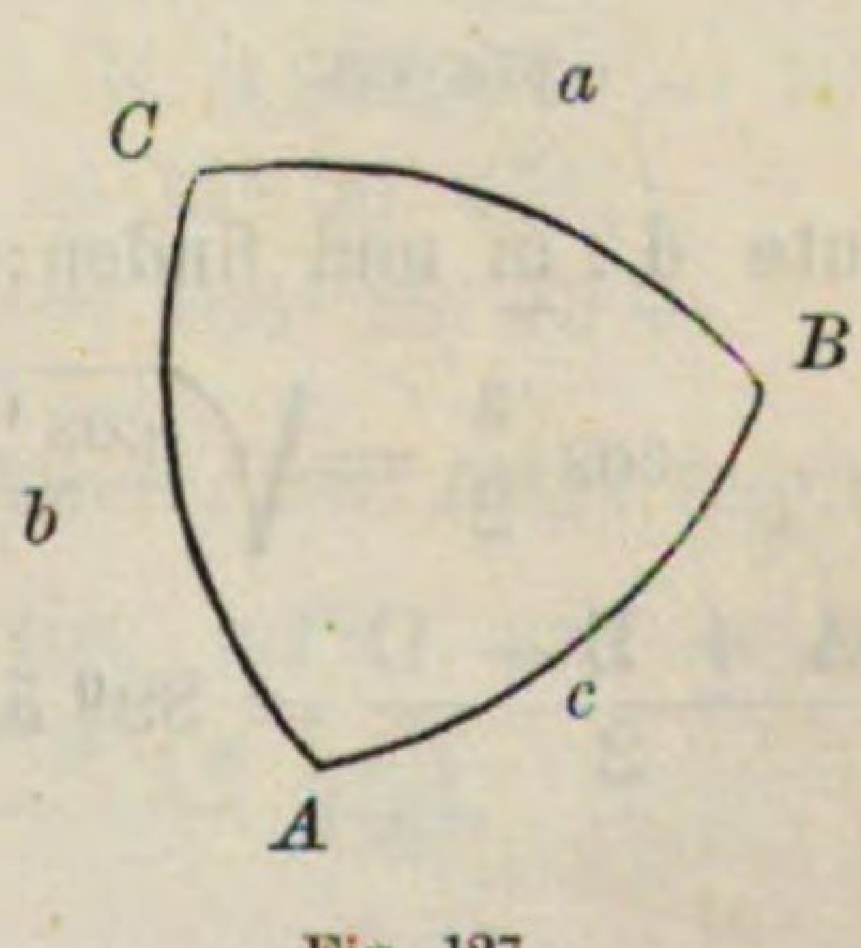


Fig. 127.

$$A = 141^0\ 51'\ 45'' = \text{Combk. } \underline{m} : \underline{c}.$$
$$B = 129^0\ 23'\ 22'' = \text{Combk. } \underline{d} : \underline{c}.$$
$$c = 90^0.$$

In diesem Dreieck, das nicht direct nach dem NAPIER'schen Satz behandelt werden kann, suchen wir:

$$C = \text{Kante } \underline{d} : \underline{m}.$$
$$a = \text{Neigung von } \underline{d} : \underline{m} \text{ zu } \underline{d} : \underline{c}.$$

Wir haben, (vergl. p. 4, Abtheilung 4.):

$$\cos C = -\cos A . \cos B + \sin A . \sin B . \cos c$$

und, da $c = 90^0$:

$$\cos C = -\cos A . \cos B.$$

$$\begin{aligned} \log. \cos C = \text{N. } \log. \cos 38^0\ 8'\ 15'' &= \text{N. } 9{,}8957158 - 10 \\ + \log. \cos 50^0\ 36'\ 38'' &= \text{N. } 9{,}8024919 - 10 \\ \hline &\ \ \text{P. } 9{,}6982077 - 10 \\ &= 60^0\ 3'\ 29''. \end{aligned}$$

Dieser Winkel ist von 180^0 zu subtrahiren, da das Gesammtresultat negativ ist, also wird $C = 119^0\ 56'\ 31''$.

Ferner ergibt sich, (vergl. pag. 4, Abtheilung 3.):

$$\text{cotg} a . \sin c = \cos c . \cos B + \sin B . \text{cotg} A$$

und, da $c = 90^0$:

$$\text{cotg} a = \sin B . \text{cotg} A.$$

$$\begin{aligned} \log. \text{cotg} a = \log. \sin 50^0\ 36'\ 38'' &= \quad 9{,}8880955 - 10 \\ + \log. \text{cotg } 38^0\ 8'\ 15'' &= \text{N. } 0{,}1050431 \\ \hline &\ \ \text{N. } 9{,}9931386 - 10 \\ &= 45^0\ 27'\ 9''. \\ a &= 134^0\ 32'\ 51''. \end{aligned}$$

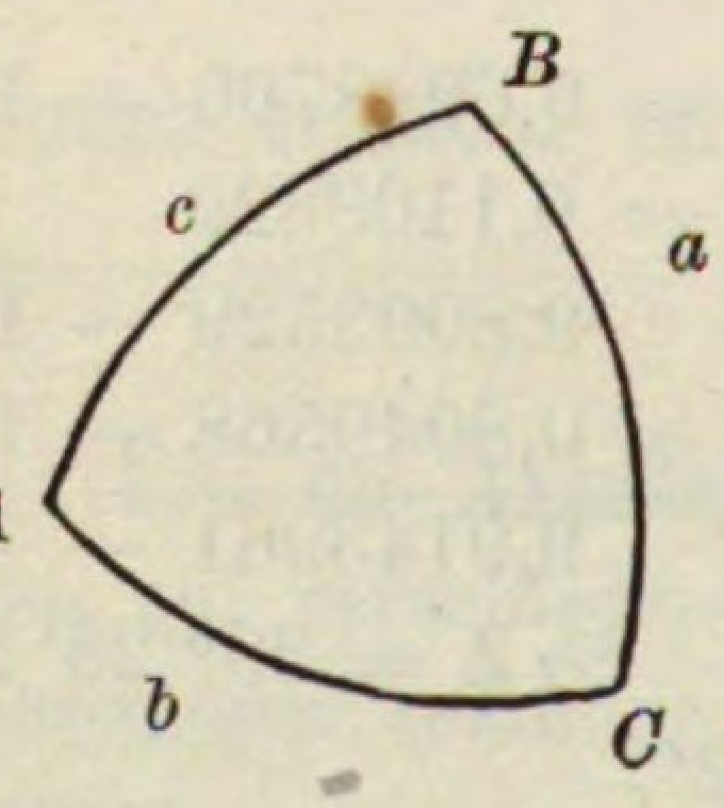


Fig. 128.

Nunmehr können wir ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 128, das folgende Stücke enthält:

$$A = 142^0\ 57' = \text{Cbk. } \underline{p} : \underline{m}.$$
$$B = 155^0\ 11' = \text{Cbk. } \underline{p} : \underline{d}.$$
$$C = 119^0\ 56'\ 31'' = \text{Cbk. } \underline{d} : \underline{m}.$$

Wir berechnen a, das ist die Neigung der Combinationskante $\underline{p} : \underline{d}$ zur Combinationskante $\underline{d} : \underline{m}$ und finden:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1\!/_2 (A + B - C) . \cos {}^1\!/_2 (A + C - B)}{\sin B . \sin C}}.$$

$$\frac{A + B - C}{2} = 89^0\ 5'\ 44^1\!/_2''; \quad \frac{A + C - B}{2} = 53^0\ 51'\ 15^1\!/_2''.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 89^0\ 5'\ 44^1/_2'' = 8{,}1981741 - 10$$
$$+ \log.\cos 53^0\ 51'\ 15^1/_2'' = 9{,}7707347 - 10$$

$$\log.\sin 24^0\ 49' = 9{,}6229557 - 10 \qquad 7{,}9689088 - 10$$
$$+ \log.\sin 60^0\ 3'\ 29'' = 9{,}9377626 - 10 \qquad 9{,}5607183 - 10$$
$$9{,}5607183 - 10 \qquad 18{,}4081905 - 20$$

$$\text{Daraus } \sqrt{\ } = 9{,}2040952 - 10$$
$$\frac{a}{2} = 80^0\ 47'\ 37''.$$
$$a = 161^0\ 35'\ 14''.$$

Zieht man von dem Winkel 161⁰ 35′ 14″ die Ergänzung des oben berechneten Winkels 134⁰ 32′ 51″ zu 180⁰ = 45⁰ 27′ 9″ ab, so bleibt ein Winkel von 116⁰ 8′ 5″ übrig. Derselbe stellt die Neigung der Kante $\underline{p} : \underline{d}$ zur Kante $\underline{d} : \underline{c}$ dar.

Mit diesem Winkel bilden wir durch: 116⁰ 8′ 5″ — 90⁰ = 26⁰ 8′ 5″ einen Winkel a und legen ein Dreieck, Fig. 129, mit folgenden Stücken:

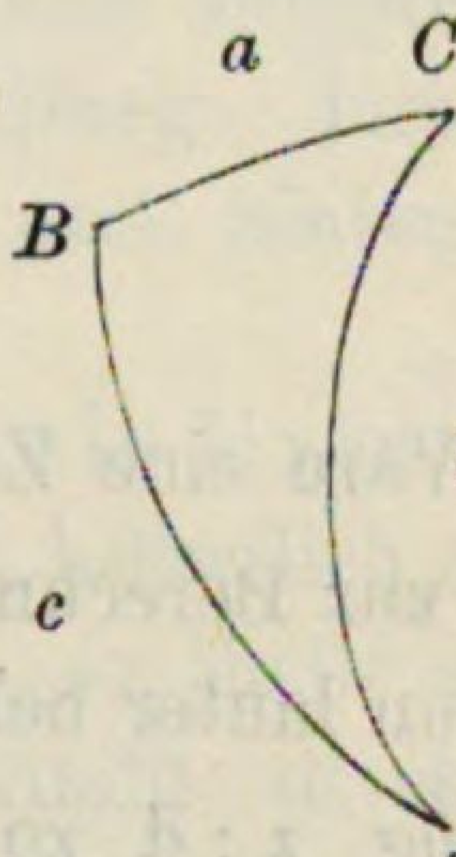


Fig. 129.

B = 155⁰ 11′ = Cbk. $\underline{p} : \underline{d}$.
a = soeben berechnet.
C = 90⁰.

Wir suchen A = ½X von $mP\bar{n}$ und b, d. i. die Neigung von X zur Höhenlinie auf ½P$\bar{\infty}$.

Wir finden: cos A = sin B . cos a.

$$\log.\cos A = \log.\sin 24^0\ 49' = 9{,}6229557 - 10$$
$$+ \log.\cos 26^0\ 8'\ 5'' = 9{,}9531606 - 10$$
$$9{,}5761163 - 10$$
$$A = 67^0\ 51'\ 51''.$$

Ferner ergibt sich: tg b = sin a . tg B.

$$\log.\text{tg}\, b = \log.\sin 26^0\ 8'\ 5'' = 9{,}6439294 - 10$$
$$+ \log.\text{tg}\, 24^0\ 49' = \text{N. } 9{,}6650346 - 10$$
$$\text{N. } 9{,}3089640 - 10$$
$$= 11^0\ 30'\ 47''.$$
$$b = 168^0\ 29'\ 13''.$$

Da ½P$\bar{\infty}$ zur Axe $\breve{a}$ unter 39⁰ 23′ 22″ neigt, so neigt folglich X zu derselben Axe unter 50⁰ 54′ 9″ = β von $mP\bar{n}$, und es ist:

$$\text{tg}\, 50^0\ 54'\ 9'' = \frac{mc}{a}, \text{ woraus } m = \frac{\text{tg}\, 50^0\ 54'\ 9''.\, a}{c} \text{ folgt.}$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \text{tg}\ 50^0\ 54'\ 9'' &= 0{,}0901202 \\
+ \log.\ \text{num.}\ a &= 9{,}8949568 - 10 \\
&\quad 9{,}9850770 - 10 \\
- \log.\ \text{num.}\ c &= 0{,}1103829 \\
&\quad 9{,}8746941 - 10 \\
\text{num.}\ m &= 0{,}7493. \\
&= {}^3/_4.
\end{aligned}$$

Die Verlängerung der Makrodiagonale findet sich schliesslich leicht, da X und β bekannt sind, durch:

$$\text{cotg}\,\alpha = \sin\beta\,.\,\text{tg}X = \frac{nb}{a};\ n = \sin\beta\,.\,\text{tg}X\,.\,a.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{num.}\ n = \log.\ \sin\ 50^0\ 54'\ 9'' &= 9{,}8899031 - 10 \\
+ \log.\ \text{tg}\ 67^0\ 51'\ 51'' &= 0{,}3906333 \\
+ \log.\ \text{num.}\ a &= 9{,}8949568 - 10 \\
&\quad 0{,}1754932 \\
\text{num.}\ n &= 1{,}498. \\
&= {}^3/_2.
\end{aligned}$$

Die Pyramide ist also $^3/_4 P ^3/_2$.

Wäre eine Zone, z. B. die Zone $\underline{z} : \underline{p} : \underline{d}$, gegeben gewesen, so hätte zur Berechnung ein gemessener Winkel genügt, indem man aus dem von lauter bekannten Elementen gebildeten Dreikant: $\underline{z}$, $\underline{d}$, $\underline{m}$ die Neigung $\underline{z} : \underline{d}$ zu $\underline{d} : \underline{m} = \underline{p} : \underline{d}$ zu $\underline{d} : \underline{m}$ mit dem obenstehenden Werthe hätte berechnen und damit die Rechnung, wie oben, führen können. Ueberdies wäre dann auch nur mc = $^3/_4$c zu berechnen gewesen, da alsdann sich ergeben hätte, dass X von $^4/_3$a : c sich erstreckt. Mit dem dadurch in der Projection gegebenen Zonenpunkt $^4/_3$a und dem zweiten, gebildet von $\underline{z}$ und $\underline{d}$, Coordinaten 2a : b, hätte sich schliesslich die Lage der Sectionslinie leicht zu $^4/_3$a : — 2b, die der Fläche also zu $^4/_3$a : — 2b : c = $^3/_4 P ^3/_2$ ergeben.

IV. Klinorhombisches System.

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse.

Die Gestalten dieses Systems haben nur einen einzigen Hauptschnitt, verhalten sich also auch nur noch in Bezug auf denselben symmetrisch. Bringen wir, der gewöhnlichen Annahme entsprechend, einen klinorhombischen Krystall in eine solche Stellung, dass seine Symmetrieebene von oben nach unten und von vorn nach hinten zieht, so erweist er sich gebildet:

„Vorn anders, als hinten, aber rechts, wie links.“

Nehmen wir den Krystall als im Gleichgewicht befindlich an und lassen die Symmetrieebene durch seine Mitte gehen, so theilt sie ihn in zwei Hälften, die sich wie Gegenstand zu Spiegelbild zu einander verhalten.

Stellen wir uns vor, es sei auf der Ebene der Symmetrie eine Normale, die sog. Axe der Symmetrie, errichtet, so bedingt dieselbe die Richtung einer Zone, welche für den Charakter des Systems von grösster Bedeutung ist.

In dieser Zone finden sich nämlich viele Flächenpaare vor, die alle zwar senkrecht zu der Symmetrieebene stehen, unter einander jedoch keinen rechten Winkel mehr bilden. Mit der Wahl eines dieser Flächenpaare zur oberen Endfläche (Basis), eines anderen zur vorderen Endfläche (Orthopinakoid) werden die anderen zu positiven und negativen Orthodomen.

Lassen wir die Reductionsebenen von Basis, vorderer Endfläche (Orthopinakoid) und seitlicher Endfläche (Parallelfläche der Symmetrieebene oder Klinopinakoid) im Mittelpunkt des Krystalls zum Schnitt kommen, so entstehen drei, im Allgemeinen ungleich grosse Axen, von denen die Axe der Symmetrie oder Orthodiagonale, $\bar{b}$, noch senkrecht steht auf den beiden anderen, a und c, während diese einen von 90^0 abweichenden Winkel mit einander bilden, welcher gleich dem Neigungswinkel der Basis zur vorderen Endfläche ist. Von

den beiden, eben genannten, in der Symmetrieebene liegenden Axen wählen wir die eine, $\acute{c}$, zur Hauptaxe und bezeichnen die andere, $\grave{a}$, als Klinodiagonale. Der Hauptaxe verleihen wir die verticale Stellung, die Klinodiagonale lassen wir auf den Beobachter zu verlaufen; es wird dann die Orthodiagonale, wie ja auch schon aus den oben gemachten Voraussetzungen folgt, von rechts nach links sich erstrecken. Der allgemeinen Annahme gemäss, stellen auch wir das Axenkreuz so, dass der stumpfe Winkel, β, unter dem die Axen a und c zu einander geneigt sind, sich vorn, der spitze hinten befindet und geben letzteren jedes Mal mit dem Axenverhältniss an, so dass wir erhalten:

$$\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} \quad (b = 1).$$
$$\beta < 90^0.$$

Wie wir sehen, enthält dies Verhältniss drei unbekannte Grössen, nämlich die zwei Lineardimensionen a und c und die Angulargrösse β. Es werden daher zur Bestimmung des Axenverhältnisses und des schiefen Winkels drei von einander unabhängige Messungen in diesem Systeme erfordert werden.

Wollen wir auch im klinorhombischen Systeme von Hauptschnitten reden, so müssen wir den einen, durch die Symmetrieverhältnisse gegebenen, der die Axen a und c in sich schliesst und klinodiagonaler Hauptschnitt genannt wird, vor den anderen gebührend hervorheben. Nur dieser Hauptschnitt ist ja, wie wir wissen, in den klinorhombischen Krystallen etwas durch die Natur Gegebenes, die anderen sind unserer Wahl anheimgestellt und von ganz beliebiger Lage, vorausgesetzt, dass sie der Bedingung genügen, senkrecht auf dem ersten zu stehen.

Während der eben erwähnte klinodiagonale Hauptschnitt auf den Beobachter zu verläuft, zieht der orthodiagonale Hauptschnitt, die Axen b und c in sich schliessend, von rechts nach links, und der basische Hauptschnitt, durch die Axen a und b gelegt, neigt aus der horizontalen Lage nach vorn, da der Winkel, unter dem er zum orthodiagonalen steht, von 90^0 abweicht.

Orthodiagonaler und basischer Hauptschnitt stehen senkrecht auf dem klinodiagonalen, bilden aber untereinander, wie eben erwähnt, einen schiefen Winkel B, der mit dem Winkel β, unter dem die Axen a und c zu einander geneigt sind, identisch ist.

Wir sahen oben, wie bei klinorhombischen Krystallen, nach der Orientirung und Wahl der Axenebenen, sich die übrigen Gestalten der Zone der Orthodiagonale zu positiven oder negativen Domen ordneten

und müssen jetzt diese Anordnung für die übrigen Zonenverbände nachtragen, unter Erläuterung der Bedeutung von „positiv und negativ.“

Nach dem Vorgang von NAUMANN nennen wir auch hier alle Gestalten, die über dem spitzen Axenwinkel β liegen, positive und bezeichnen als negative diejenigen, welche sich über dem stumpfen Axenwinkel befinden. Diese Bezeichnung gründet sich auf den Umstand, dass eine bei den Rechnungen wichtige Function, der Cosinus des Winkels β, dann positiv ist, wenn $\beta < 90^0$ und negativ im umgekehrten Falle.

Was die noch übrigen Zonenverbände anlangt, so genügt es für die Eintheilung der in ihnen enthaltenen Gestalten, die Zonenaxen zu untersuchen, welche in der Symmetrieebene liegen. Es werden nämlich Gestalten, deren Zonenaxe der Hauptaxe parallel geht, zu Prismen, solche, deren Zonenaxe sich der Klinodiagonale parallel erstreckt, zu Klinodomen und alle übrigen zu Pyramiden werden.

Dies ist in den Grundzügen der Charakter des klinorhombischen oder monoklinen Axensystems. Specielleres kann erst später erbracht werden; man sieht aber jetzt schon ein, dass, abgesehen von der ein für alle Male gegebenen Symmetrieebene, die Wahl von Basis und Orthopinakoid, und damit auch die des schiefen Winkels, ziemlich willkürlich ist. Die bei dieser Wahl und der der Grundform zu nehmenden, wesentlichsten Rücksichten sind die auf einfache Axenschnitte und möglichst grossen Deductionszusammenhang der übrigen Gestalten. Wenn dagegen verwandte, in anderen Systemen krystallisirende Körper zu berücksichtigen sind, so muss in erster Linie auf übereinstimmende Stellung, zum Zwecke der Erhaltung der Continuität des Ganzen Bedacht genommen werden.

Das Bestreben mancher Krystallographen, den Winkel β so nahe als möglich an 90^0 liegend zu wählen, ist, wenn nicht Rücksichten wie die eben erwähnte obwalten, der Erlangung einfacher Axenschnitte unterzuordnen, welche viel wichtiger sind, als eine sehr geringe Axenschiefe. Kann die letztere dann auch für die grobe Demonstration vernachlässigt werden, so ist sie doch bei genauen Rechnungen gebührend zu beachten, und die etwa durch sie zu erreichenden Vortheile werden durch die mit ihr meist Hand in Hand gehenden, complicirten Ableitungscoëfficienten der Gestalten mehr als aufgewogen.

Wie nahe wir auch, in gewissen monoklinen Systemen, den Winkel β an 90^0 liegend wählen können, so wird er doch nie $= 90^0$ werden und stets eine für das System äusserst charakteristische Abweichung des Winkels β von 90^0 bestehen, die wir die monokline Abweichung nennen. Dieselbe wird sich bei wahrhaft monoklinen Krystallen immer finden, wenn sie auch oft auf eine sehr geringe Grösse

herabsinken und sich zuweilen unter mangelhafter Flächenbeschaffenheit verstecken kann. In zweifelhaften Fällen ist auch manchmal der Typus der Krystalle sehr geeignet, auf das wahre Krystallsystem hinzuweisen. So führte man früher im rhombischen Systeme eine Anzahl Körper als rhombisch mit monoklinem Formentypus auf. Alle in neuerer Zeit an solchen Körpern vorgenommenen, genaue Untersuchungen haben unwiderleglich bewiesen, dass, bei ausgesprochen monoklinem Typus, das System auch monoklin ist und sich nicht in Strenge auf drei senkrechte Axen beziehen lässt.

Um jedoch in solchen und anderen ähnlichen Fällen zu völliger Sicherheit bezüglich des Krystallsystems zu gelangen, darf man sich nicht auf die rein krystallographische Methode beschränken, sondern muss zur Entscheidung die Hülfsmittel der Optik mit zu Rath ziehen. Die neuere Forschungsweise begnügt sich indessen nicht damit, nur in zweifelhaften Fällen die optische Untersuchungsmethode anzuwenden, sondern ist bestrebt, möglichst überall von ihr Gebrauch zu machen, und die Eigenschaften der zu untersuchenden Körper so allseitig, als es die Beschaffenheit derselben gestattet, zu ergründen.

2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen. Transformation der Winkelformel.

Wie in den vorhergehenden Systemen, so behalten wir auch im monoklinen, die basische Endfläche als Projectionsebene bei, so dass in derselben die Axen a und b erscheinen werden, während wir uns vorstellen, die Axe c neige unter dem schiefen Winkel β derartig zur Projectionsebene, dass in Bezug auf den Beobachter, der stumpfe Axenwinkel vorn, der spitze hinten sich befindet. Es werden alsdann auch sämmtliche positive Gestalten in den Quadranten hinten rechts und hinten links auftreten, die negativen in den Quadranten vorn rechts und vorn links zu finden sein. Mit Rücksicht auf diese Anordnung gehen wir jetzt von dem Quadranten hinten rechts als dem positiven aus.

Da, von Prismen und Klinodomen abgesehen, das Vorhandensein einer Anzahl positiver Gestalten nicht zur Folge hat, dass eine entsprechende Anzahl negativer auftrete, diese letzteren vielmehr völlig fehlen können, so wird es bisweilen vorkommen, dass in der Projection nur in den beiden hinteren Quadranten Sectionslinien zu finden sind, während die vorderen derselben völlig entbehren und umgekehrt. In dieser ungleichartigen Entwickelung offenbart sich auch in der Projection die diesem Systeme eigenthümliche Symmetrie, wonach die Kry-

stalle nur noch rechts, wie links gebildet sind. Tritt der Fall ein, dass zu allen positiven Gestalten die zugehörigen negativen angetroffen werden, so wird sich das Projectionsbild nicht von dem eines rhombischen Krystalls unterscheiden.

Was die Rechnungen mit der Projection anlangt, so gelten auch in diesem Systeme die seither angewandten und geübten Regeln, da dieselben ja für den allgemeinsten Fall hergeleitet wurden.

Zur Uebung diene die Entwickelung einer Combination des Luteocobaltchlorids,* Tafel VII, Fig. 1, eines Körpers, der in seinen Combinationsverhältnissen mit dem Feldspathe völlige Uebereinstimmung zeigt.

Eine allgemeine Bestimmung lehrt folgende Gestalten erkennen:

oP ,	∞P$\bar{\infty}$,	∞P$\breve{\infty}$,	∞P ,	∞P$\grave{n}$,	+ P$\bar{\infty}$,	+ mP$\bar{\infty}$(m>1),	
P ,	k ,	M ,	T ,	z ,	x ,	y ,	
+P ,	+ nP(n<1)	, mP$\breve{\infty}$(m>1).					
o ,	g	n.					

1. Man fertige auf der, parallel oP gehenden Projectionsebene, Tafel VII, Fig. 2., ein Axenkreuz, wie gewöhnlich, an, nehme, da vor der Hand von der wahren Länge der Axen a und b abzusehen ist, eine beliebige Einheit auf a und eine solche auf b an und lege: k = ∞P$\bar{\infty}$, M = ∞P$\breve{\infty}$, T = ∞P, x = + P$\bar{\infty}$, o = + P in Projection.

2. Alsdann ist n = mP$\breve{\infty}$ ableitbar. Eine Fläche n dieser Gestalt geht, als Klinodoma, mit der entsprechenden Sectionslinie jedenfalls der Axe a parallel, dann fällt sie aber auch in den Zonenpunkt T′ : o. Die Coordinaten desselben sind: $\frac{a}{2} : \frac{b}{2}$, folglich geht die Linie von ∞a : $^1/_2$b, die Fläche n ist also: ∞a : $^1/_2$b : c = 2P$\breve{\infty}$.

3. Die Gestalt y = + mP$\bar{\infty}$ liegt mit ihrer Sectionslinie in demselben Zonenpunkt, geht also von $^1/_2$a : ∞b : c = + 2P$\bar{\infty}$.

4. Das Prisma z = ∞P$\grave{n}$ tritt mit der Fläche z′ in der Zone o′ : n auf. Die Coordinaten des Zonenpunktes sind: $\frac{a}{^2/_3} : \frac{b}{2}$; ferner kommt der Mittelpunkt in Betracht.

Wir erhalten daher für die Rechnung mit dem Mittelpunkt:

$$m = {}^2/_3,\ n = 2.$$

Daraus folgt: $- \frac{a}{^2/_3} : \frac{b}{2} : \infty c = - 3a : b : \infty c =$ ∞P$\grave{3}$.

5. Die letzte Gestalt ist g = + nP. Sie fällt ebenfalls in die Zone o′ : n, welche nunmehr noch z′ enthält. Die Coordinaten des Zonen-

* Vergl. die Mittheilung des Verf. in den Annalen der Chemie u. Pharmacie B. 166. p. 188. Tafel II. Fig. 3[a] u. 3[b].

punktes in der Projection sind: $\frac{a}{{}^2/_3} : \frac{b}{2}$. Ferner geht, da die Gestalt eine Pyramide der Hauptreihe ist, die entprechende Sectionslinie der von o = a : b : c parallel, d. h. liegt mit ihr in einem Zonenpunkte, dem die Coordinaten: $\frac{a}{o} : -\frac{b}{o}$ zukommen.

Um die Axenschnitte darzustellen, haben wir uns zunächst zu erinnern, dass die Pyramide g die Axen a und b in gleichen Abständen schneidet, daher nur die Berechnung eines Axenschnittes erfordern wird. Zur Uebung berechnen wir indessen beide.

Wir haben: $m = {}^2/_3$, $n = 2$; $m_, = o$, $n_, = -o$;

folglich: $\frac{(o.2) - ({}^2/_3.-o)}{{}^2/_3.o(2-[-o])}\,a : \frac{(o.2)-({}^2/_3.-o)}{2.-o(o-{}^2/_3)}\,b = 2a : 2b : c = +{}^1/_2P.$

Die ganze Combination lautet somit: oP, $\infty P\bar{\infty}$, $\infty P\grave{\infty}$, ∞P, $\infty P\grave{3}$, $+P\bar{\infty}$, $+2P\bar{\infty}$, $+P$, $+{}^1/_2P$, $2P\grave{\infty}$.

Was den Zonenverband der hauptsächlichsten Gestalten des monoklinen Systems anlangt, so gilt für denselben das im rhombischen Systeme, p. 191, Erörterte. Es ist dabei nur zu berücksichtigen, dass alle brachydiagonalen Formen des rhombischen Systems zu klinodiagonalen des klinorhombischen werden und allen makrodiagonalen Gestalten dort, die Bedeutung orthodiagonaler Gestalten hier zukommt. Schliesslich ist im Auge zu behalten, dass alle Pyramiden und Orthodomen, wie wir wissen, in positive und negative Hälften zerfallen. —

— Zum Zwecke der Transformation der Winkelformel kann man zwei verschiedene Wege einschlagen.

Berücksichtigen wir zunächst die eine Art der Transformation, so müssen wir entweder zur Axe $\grave{c}$ oder zur Axe $\grave{a}$ eine rechtwinkelige Hülfsaxe einführen, die aber dann nicht mehr in rationalen Verhältnissen geschnitten wird.

Führen wir z. B. an Stelle der Klinodiagonale $\grave{a}$ im klinodiagonalen Hauptschnitt eine rechtwinkelige Hülfsaxe α ein, so steht dieselbe nunmehr normal auf $\bar{b}$ und $\grave{c}$, wird aber nur noch von Fläche und Gegenfläche, Kante und Gegenkante der Gestalten, die früher $\grave{a}$ schnitten, in gleichen Abständen vom Mittelpunkt getroffen, nicht mehr, wie sonst, von allen zu einem Symbol vereinigten Formen, z. B. von $\pm P\bar{\infty}$, $\pm mP\grave{n}$ u. s. w.

Nehmen wir an, es gehe in Fig. 130 eine Verbindungslinie von na' nach mc und ebenso eine solche von na nach mc (diese Linien mögen entweder direct Kanten zu einem Symbole vereinigter Gestalten vorstellen, oder die Projectionen von Flächen solcher Gestalten aus der Zone der Orthodiagonale sein), der Neigungswinkel ersterer Linie gegen die Axe mc heisse μ', der Neigungswinkel letzterer Linie gegen dieselbe Axe sei mit μ bezeichnet, so haben wir:

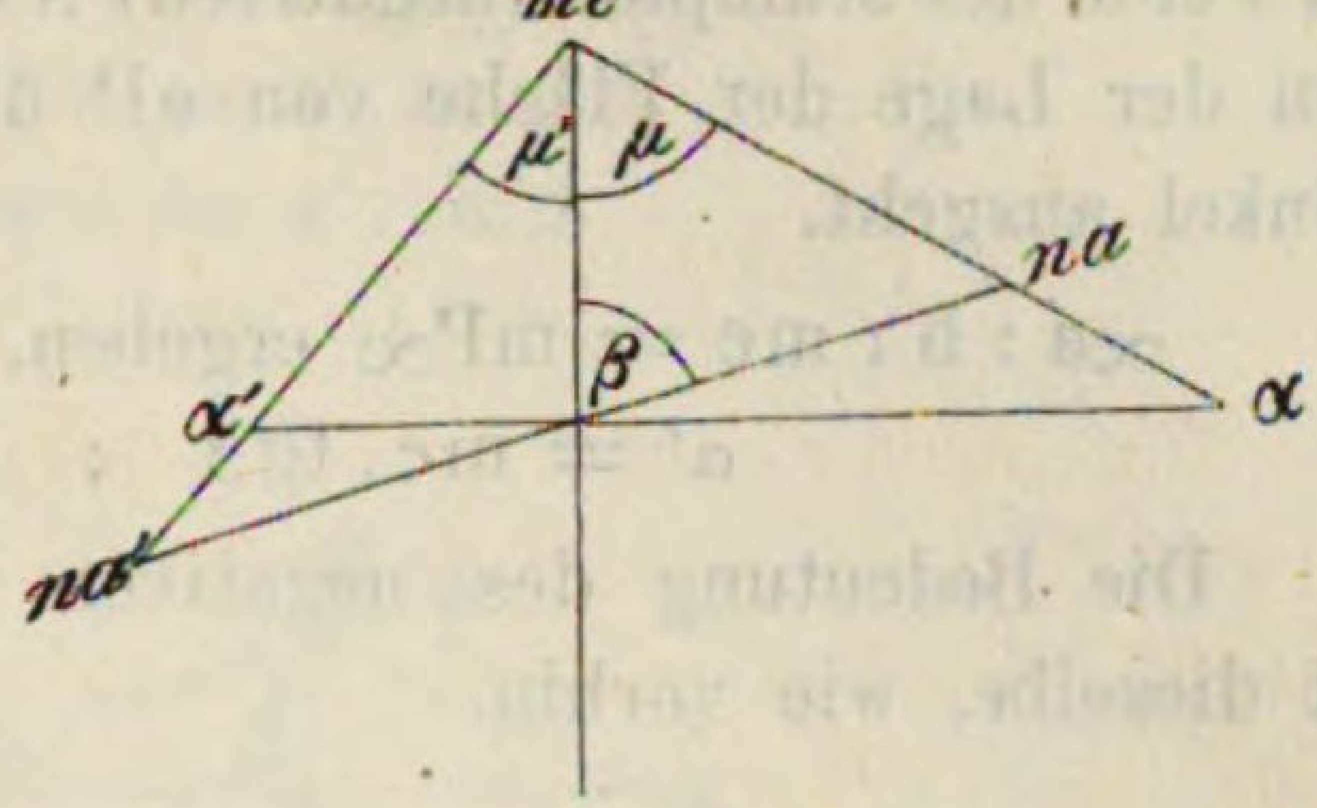


Fig. 130

$$\alpha' = \mathrm{mc} \,.\, \mathrm{tg}\mu' \quad ; \quad \alpha = \mathrm{mc} \,.\, \mathrm{tg}\mu.$$

$$\text{mit: } \mathrm{tg}\mu' = \frac{\mathrm{na}' \,.\, \sin\beta}{\mathrm{mc} + \mathrm{na}' \,.\, \cos\beta} \quad ; \quad \mathrm{tg}\mu = \frac{\mathrm{na} \,.\, \sin\beta}{\mathrm{mc} - \mathrm{na} \,.\, \cos\beta}.$$

Die Winkel μ und μ' sind, wie wir später sehen werden, meist schon durch die Berechnung der Ableitungscoëfficienten der in Betracht kommenden Formen bekannt, können aber, wenn dies nicht der Fall ist, durch vorstehende Formeln aus den Axen a und c und dem Axenwinkel β berechnet werden. Besagte Formeln lassen sich dann auch noch logarithmisch bequem auflösen.

Betrachten wir nun die einzelnen Gestalten in Bezug auf die auszuführende Transformation.

a. Gestalten der Zone der Hauptaxe.

$\infty a : b : \infty c = \infty P\grave{\infty}$ unterliegt, da sowohl parallel a, als auch parallel α gehend, keiner Transformation.

$a : \infty b : \infty c = \infty P\bar{\infty}$. $a : b : \infty c = \infty P$. $a : nb : \infty c = \infty P\bar{n}$.	Die für a' und a einzuführenden Ausdrücke α' und α reduciren sich, da $\mathrm{na}' = \mathrm{a}$, $\mathrm{na} = \mathrm{a}$ und $\mathrm{mc} = \infty$ ist.

Wir erhalten somit: $\alpha' = \mathrm{a}' \,.\, \sin\beta$; $\alpha = \mathrm{a} \,.\, \sin\beta$. Beide Ausdrücke sind einander gleich, die durch sie vorgestellten Axenlängen liegen jedoch nach entgegengesetzten Richtungen vom Axenmittelpunkt.

$\mathrm{na} : \mathrm{b} : \infty \mathrm{c} = \infty P\grave{n}$ liefern, da nur $\mathrm{mc} = \infty$ ist:

$$\alpha' = \mathrm{na}' \,.\, \sin\beta \; ; \; \alpha = \mathrm{na} \,.\, \sin\beta.$$

b. Gestalten der Zone der Klinodiagonale.

$\infty a : \infty b : c = oP$ ergibt, da $\mathrm{na}' = \infty$, $\mathrm{na} = \infty$, $\mathrm{mc} = \mathrm{c}$ ist:

$$\alpha' = \mathrm{c} \,.\, \mathrm{tg}\beta \; ; \; \alpha = - \,\mathrm{c} \,.\, \mathrm{tg}\beta.$$

Das negative Vorzeichen des zweiten Ausdrucks deutet hier darauf hin, dass der Schnitt der Fläche von oP mit der neuen Axe α stets im Felde des stumpfen (negativen) Axenwinkels erfolgt, wenn man auch von der Lage der Fläche von oP über dem spitzen (positiven) Axenwinkel ausgeht.

$\infty a : b : mc = mP\grave{\infty}$ ergeben, da $na' = \infty$, $na = \infty$ ist:

$$\alpha' = mc \,.\, tg\beta \quad ; \quad \alpha = -\, mc \,.\, tg\beta.$$

Die Bedeutung des negativen Vorzeichens im zweiten Ausdruck ist dieselbe, wie vorhin.

c. Gestalten der Zone der Orthodiagonale.

$a : \infty b : mc = +\, mP\bar{\infty}$ ergeben die neue Axe zu:

$$\alpha = mc \,.\, tg\mu$$

$$\text{mit } tg\mu = \frac{a \,.\, \sin\beta}{mc - a \,.\, \cos\beta}.$$

$a' : \infty b : mc = -\, mP\bar{\infty}$ liefern für die neue Axe:

$$\alpha' = mc \,.\, tg\mu'$$

$$\text{mit } tg\mu' = \frac{a \,.\, \sin\beta}{mc + a \,.\, \cos\beta}.$$

Wie sämmtliche Pyramiden bezüglich ihres Axenschnitts auf a zu transformiren sind, versteht sich nach dem Vorstehenden von selbst, und es sind in den zu Eingang aufgestellten Formeln, je nach den Axenschnitten der Pyramiden, die entsprechenden Werthe für na', na und mc zu substituiren.

Nachdem somit für alle Gestalten des Systems die Schnitte derselben auf der Klinodiagonale auf die zur Hauptaxe rechtwinkelige Hülfsaxe bezogen sind, kann, zur Winkelberechnung, die in den vorhergehenden Systemen benutzte Formel, vergl. p. 20, verwendet werden. In derselben ist nur für den früheren Axenschnitt auf a, der Axenschnitt auf α einzuführen.

Die zweite Art der Transformation findet sich in den Werken QUENSTEDT's, zuletzt in seinem Grundriss der bestimmenden u. rechn. Kryst. 1873. p. 329, entwickelt. Da sie sich zu Winkelberechnungen auf Grund der Projection und zu anderen Bestimmungen gut eignet, so glauben wir sie hier wiedergeben zu sollen. Unserer Bezeichnungsweise zufolge, stellen in Fig. 131 a' und a die vom Mittelpunkt nach beiden Seiten gehenden Halbaxen a dar, mit $c = 1$ sei die Hauptaxe, die zur Axe a unter dem schiefen Winkel β steht, bezeichnet, und $\alpha' \,.\,.\, \alpha$ repräsentire die zu c rechtwinkelige Hülfsaxe. Dieselbe bildet mit a einen Winkel w, der $= 90^0 - \beta$ ist.

Fällen wir aus a′ eine Normale k auf die Hülfsaxe α', so hat man:

$$k : a' = \sin w : 1 = \cos\beta : 1.$$
$$\alpha' : a' = \cos w : 1 = \sin\beta : 1.$$
$$k = a' . \sin w = a' . \cos\beta.$$
$$\alpha' = a' . \cos w = a' . \sin\beta.$$

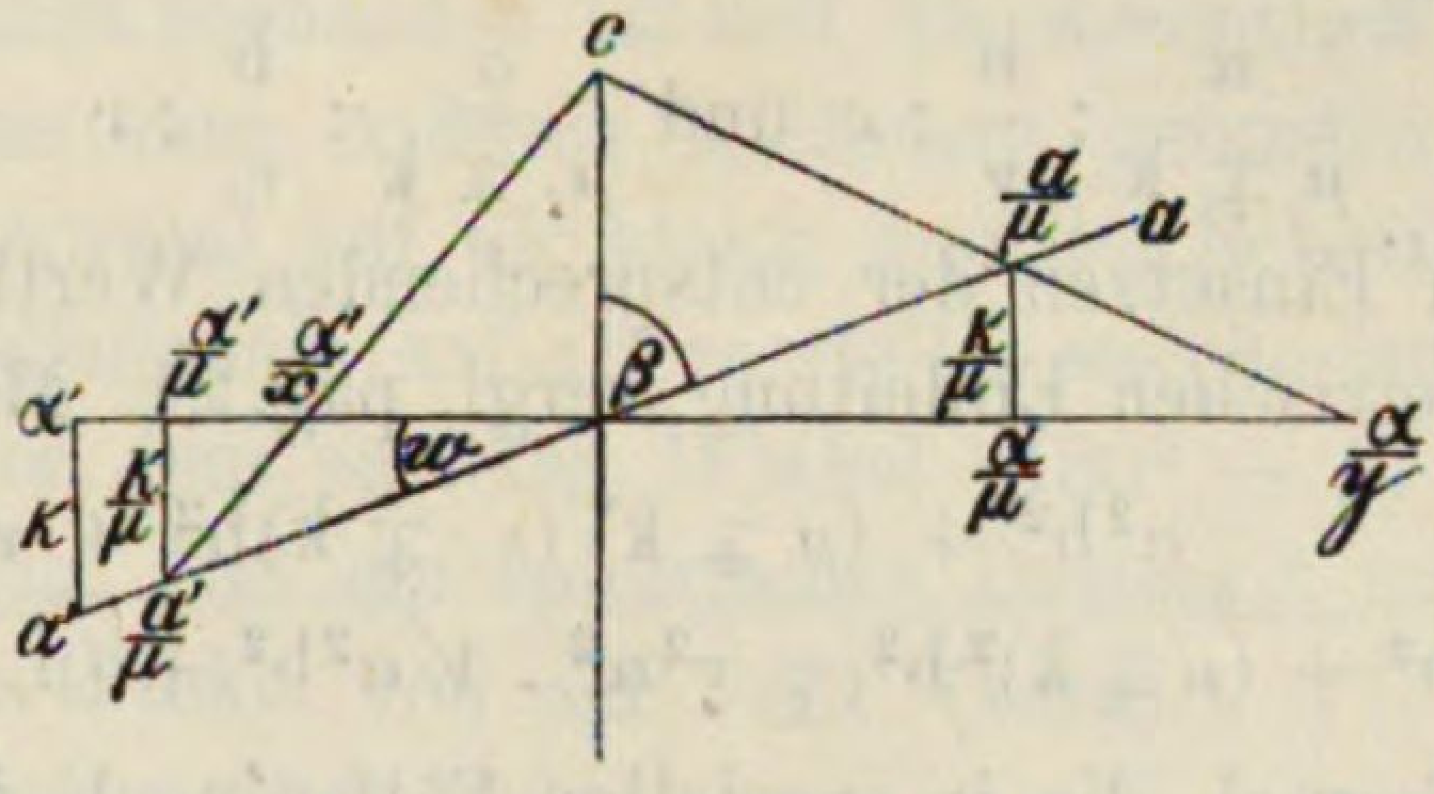


Fig. 131.

Dieselben Werthe würde man erhalten, wenn anstatt a′ die andere Halbaxe a der Betrachtung unterzogen würde, die Resultate gelten also für beide Axenhälften in gleicher Weise.

Es sind nun auf α' und α die Abstände $\frac{\alpha'}{x}$ und $\frac{\alpha}{y}$ zu ermitteln, die zwei Kanten $\frac{a'}{\mu} : c$ und $\frac{a}{\mu} : c$ bei ihrem Schnitt erzeugen.

Diese Abstände können wir finden, da uns die Normalen aus $\frac{a'}{\mu}$ und $\frac{a}{\mu}$ auf die Hülfsaxe $\alpha' \ldots \alpha$ die Stücke: $\frac{k}{\mu}$, $\frac{\alpha'}{\mu}$ und $\frac{\alpha}{\mu}$ bestimmen.

Wir haben: $$1 : \frac{\alpha'}{x} = \frac{k}{\mu} : \frac{\alpha'}{\mu} - \frac{\alpha'}{x},$$

daraus folgt: $$x = \mu + k, \text{ also ist: } \frac{\alpha'}{x} = \frac{\alpha'}{\mu + k}.$$

Ferner findet statt: $$1 : \frac{\alpha}{y} = \frac{k}{\mu} : \frac{\alpha}{y} - \frac{\alpha}{\mu},$$

daraus folgt: $$y = \mu - k, \text{ also ist: } \frac{\alpha}{y} = \frac{\alpha}{\mu - k}.$$

Behalten wir die, beim Beginne der Betrachtung des monoklinen Systems, nach dem Vorgange von NAUMANN, gewählten Bezeichnungen: „positiv und negativ“ bei, verstehen wir also unter positiven Gestalten solche, die über dem spitzen Axenwinkel liegen und unter negativen Formen die, welche sich über dem stumpfen Winkel befinden, so ist eine monokline Gestalt:

$$\pm \frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c,$$

auf rechtwinkelige Axen bezogen, vom Zeichen:

$$\frac{\alpha}{\mu \mp k} : \frac{b}{\nu} : c,$$

Der Neigungswinkel zweier Flächen:

$$\frac{\alpha}{\mu \mp k} : \frac{b}{\nu} : c \text{ und } \frac{\alpha}{\mu, \mp k} : \frac{b}{\nu,} : c$$

findet sich durch Einsetzen der entsprechenden Werthe in die Formel $XXIII^b$ der geometrischen Einleitung, vergl. pag. 21. Man erhält alsdann:

$$\cos w = -\frac{\alpha^2 b^2 + (\mu \mp k)(\mu, \mp k) b^2 + \nu\nu, \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 b^2 + (\mu \mp k)^2 b^2 + \nu^2 \alpha^2} \, . \sqrt{\alpha^2 b^2 + (\mu, \mp k)^2 b^2 + \nu,^2 \alpha^2}}.$$

Mit dieser Formel, die in speciellen Fällen noch der Vereinfachung fähig ist, können die Winkelrechnungen im monoklinen System, besonders auf Grund einer Projectionsfigur der Gestalten, geführt werden. Es kommen alsdann bei diesen Rechnungen die inversen Werthe der Axenschnitte in Betracht und die Hauptaxe c aller Gestalten ist $= 1$ gesetzt. In Folge dieses letzteren Umstandes tritt bei den Gestalten aus der Zone der Hauptaxe in der Rechnung die Grösse ∞ als Factor auf, was uns zu einem Hinweis auf die p. 21, 22, 37 u. 38 gemachten Bemerkungen veranlasst.

3. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Gestalten aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss.

1. Bestimmung der Axenschiefe.

Zur Berechnung des Axenverhältnisses klinorhombischer Formen sind, wie wir sahen, drei von einander unabhängige Winkelmessungen nöthig, da eben so viel Unbekannte, nämlich zwei Lineardimensionen und eine Angulargrösse, der schiefe Winkel β, zu bestimmen sind.

Bei allen Berechnungen muss das vorzüglichste Bestreben darauf gerichtet sein, zuerst den schiefen Winkel zu erhalten. Man kann zu diesem Zwecke auf mehrfache Weise verfahren.

a. Bestimmung von β durch directe Messung beim Vorhandensein der Pinakoide oP und $\infty P \grave{\infty}$.

Von allen Methoden ist diese die unmittelbarste und beste, zudem lässt sie sich recht oft anwenden.

Die Neigung: oP : ∞P$\bar{\infty}$ (vorn) ergibt $180^0 - \beta$,
während aus: oP : ∞P$\bar{\infty}$ (hinten) β direct folgt.

b. Bestimmung von β beim Vorhandensein nur eines Pinakoids oP oder ∞P$\bar{\infty}$.

Stellen wir uns z. B. eine klinorhombische Combination vor, an welcher ∞P$\grave{\infty}$ nicht vorhanden ist und die wesentlich nur oP und ∞P aufweist. Alsdann kann β durch Rechnung gefunden werden, da die Symmetrieebene normal auf oP steht, und der Schnitt beider die Projection der Klinodiagonale auf oP vorstellt, welche zur vorderen Kante des Prisma's unter dem schiefen Winkel $(180^0 - \beta)$ geneigt ist.

Man lege, Fig. 132 ein sphärisches Dreieck * mit:

A = d. halben Winkel von ∞P : ∞P (vorn).
B = Combk. ∞P : oP (vorn).
C = 90^0.

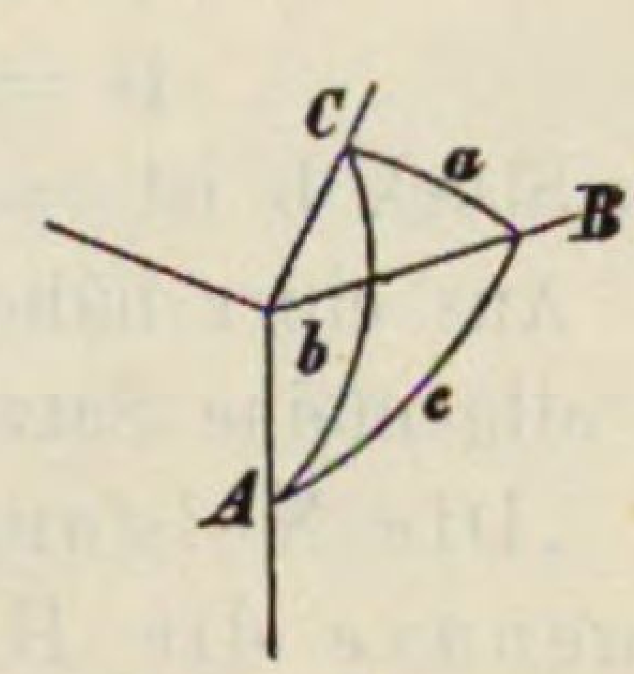


Fig. 132.

Man findet $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$ und hat:

$$b = 180^0 - \beta.$$

Wird, um das sphärische Dreieck zu bilden, die Combinationskante oP : ∞P (hinten) in Rechnung gezogen, so erhält man direct: $b = \beta$.

Beispiel. Feldspath. Gemessen seien: ∞P : ∞P = $118^0\ 47'$.
∞P : oP = $67^0\ 47'\ 20''$.
(hinten)

log. cos b = log. cos $67^0\ 47'\ 20''$ = 9,5775152 — 10
— log. sin $59^0\ 23'\ 30''$ = 9,9348356 — 10
9,6426796 — 10

$b = \beta = 63^0\ 56'\ 46''$.

Die Berechnung bleibt im Wesentlichen dieselbe, wenn anstatt oP und ∞P die Gestalten ∞P$\bar{\infty}$ und P$\grave{\infty}$ an der Combination vorhanden sind. Es wird dann im letzteren Falle die Kante P$\grave{\infty}$: P$\grave{\infty}$, die der Klinodiagonale parallel ist, zu der durch den Schnitt der Symmetrieebene mit ∞P$\bar{\infty}$ erzeugten Projection der Hauptaxe berechnet. — Selbstverständlich können, im ersten Falle, alle anderen Prismen ∞P$\grave{n}$ und ∞P$\bar{n}$, ebenso wohl als ∞P, zur Rechnung herangezogen werden, wie auch im letzteren, anstatt P$\grave{\infty}$, alle mP$\grave{\infty}$ Verwendung finden können.

* Die zwei zur Bildung des sphärischen Dreiecks nöthigen Messungen dienen nicht allein zur Berechnung von β, sondern auch zur Erlangung des Axenverhältnisses a : b. —

c. **Bestimmung von β beim Fehlen der Pinakoide oP und $\infty P\grave{\infty}$.**

Kommen an einer klinorhombischen Combination blos Prismen und Klinodomen vorwaltend vor, so muss, zur Bestimmung von β, die im klinodiagonalen Hauptschnitt liegende Kante des betreffenden Prisma's zu der in demselben Hauptschnitt liegenden Kante des betreffenden Klinodoma's berechnet werden.

Man hat alsdann in einem sphärischen Dreieck (aus dem dann gleichzeitig auch die Axen berechnet werden können) von der Lage des Dreiecks in Fig. 132:

A = dem halben Winkel ∞Pn : ∞Pn.
C = dem halben Winkel mP$\grave{\infty}$: mP$\grave{\infty}$.
B = Combk. ∞Pn : mP$\grave{\infty}$ (vorn).

Das Stück b ist $= 180^0 - \beta$.

Aus einer näheren Betrachtung des Vorstehenden ergibt sich aber der allgemeine Satz:

„Die Neigung irgend einer Kante aus der Zone, deren Zonenaxe die Hauptaxe ist, zu einer anderen Kante aus der Zone, deren Zonenaxe durch die Klinodiagonale vorgestellt wird, ergibt die Axenschiefe."

In der Praxis wird man solche Kanten wählen, die in einer Ebene, welche parallel der Symmetrieebene gedacht ist, liegen und gebildet sind durch die Schnitte gleichwerthiger Domen- oder Prismenflächen unter einander. Dann werden auch die Kanten zu berücksichtigen sein, die entstehen durch die Schnitte von Domen- oder Prismenflächen mit dem Klinopinakoid. — Geht dies nicht an, so wird man zuzusehen haben, dass mindestens eine Kante, z. B. die aus der Zone der Hauptaxe, gebildet werde durch den Schnitt gleichwerthiger Flächen, sich also durch die Symmetrieebene halbiren lasse, und die Neigung der Kante, welche eine Fläche aus der Zone der Klinodiagonale mit dem klinodiagonalen Hauptschnitt bildet, dazu berechnen. — Kommen Kanten in Betracht, die durch die Schnitte ungleichwerthiger Flächen gebildet sind und überdies dann noch in derselben Ebene, oder in verschiedenen, einander und dem klinodiagonalen Hauptschnitt parallelen Ebenen, liegen können, so verwickelt sich die Rechnung. Man wird jedoch in der Praxis kaum in die Lage kommen, aus so ungünstigen Elementen die Rechnung führen zu müssen, bei der man übrigens wesentlich die eben gegebenen Auseinandersetzungen zu beachten hätte.

d. Bestimmung von β als Function der Neigungswinkel der Flächen coordinirter Hemidomen oder der Kanten coordinirter Hemipyramiden gegen den basischen oder den orthodiagonalen Hauptschnitt.

Seien gegeben, Fig. 133, die Neigungen der Flächen von $\pm mP\bar{\infty}$ (Kanten von $\pm mPn$) gegen den basischen Hauptschnitt: ν und ν', oder die Neigungen derselben Flächen von $\pm mP\bar{\infty}$ (Kanten von $\pm mPn$) gegen den orthodiagonalen Hauptschnitt: μ und μ', so gelten die Formeln: *

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{2\sin\nu \,.\, \sin\nu'}{\sin(\nu - \nu')} = \frac{2\sin\mu \,.\, \sin\mu'}{\sin(\mu - \mu')}.$$

Besagte Neigungen ν, ν', μ, μ' erhält man für die Pyramiden im Allgemeinen durch Rechnung in später mitzutheilender Weise, für die Domen aus folgenden Messungen:

$$oP \;:\; + mP\bar{\infty} = 180^0 - \nu \quad ; \quad oP \;:\; - mP\bar{\infty} = 180^0 - \nu'.$$

$$\infty P\bar{\infty} \;:\; + mP\bar{\infty} = 180^0 - \mu \quad ; \quad \infty P\bar{\infty} \;:\; - mP\bar{\infty} = 180^0 - \mu'.$$

Zur Ableitung übergehend, stelle Fig. 133 die Ebene des klinodiagonalen Hauptschnitts eines monoklinen Krystalls dar; ν, ν', μ, μ' seien die Neigungswinkel, welche die Projectionen der Flächen von $\pm mP\bar{\infty}$ gegen die Axen a und c bilden, und der Winkel β, den beide einschliessen, werde gesucht.

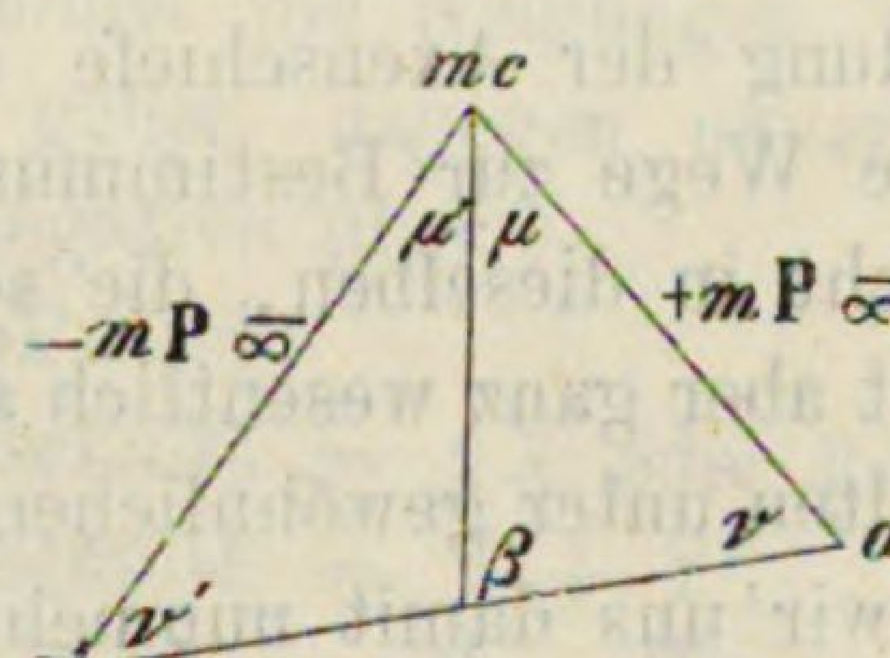


Fig. 133.

Alsdann hat man:

1. $a : mc = \sin\mu : \sin 180^0 - (\beta + \mu)$.
2. $a' : mc = \sin\mu' : \sin 180^0 - ([180^0 - \beta] + \mu')$.

Nun ist aber in 1.: $\sin 180^0 - (\beta + \mu) = \sin(\beta + \mu)$ und in 2. wird: $\sin 180^0 - ([180^0 - \beta] + \mu') = \sin(\beta - \mu')$, also erhält man: $\sin\mu : \sin(\beta + \mu) = \sin\mu' : \sin(\beta - \mu')$

Entwickelt man die Summen und Differenzen der Sinus und multiplicirt aus, so folgt:

$$\sin\mu \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\mu' - \sin\mu \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\mu' = \sin\mu' \,.\, \sin\beta \,.\, \cos\mu + \\ + \sin\mu' \,.\, \cos\beta \,.\, \sin\mu.$$

Hieraus folgt durch Division mit $\cos\beta$ und Ordnen der Ausdrücke:

$$\mathrm{tg}\beta(\sin\mu \,.\, \cos\mu' - \cos\mu \,.\, \sin\mu') = \sin\mu \,.\, \sin\mu' + \sin\mu \,.\, \sin\mu';$$

* Vergl. Kupffer, Handb. d. rechn. Krystallonomie 1830. p. 387.

was schliesslich ergibt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sin\mu\,.\,\sin\mu'}{\sin(\mu - \mu')}.$$

Für ν und ν' lässt sich der Ausdruck in ähnlicher Weise herleiten.

Beispiel. Am Epidot seien gegeben die Neigungen:

$$oP : +P\bar{\infty} = 116^0\ 18'.$$
$$oP : -P\bar{\infty} = 145^0\ 17'\ 41''.$$

Alsdann ist: $\nu = 63^0\ 42'$; $\nu' = 34^0\ 42'\ 19''$.

log. tg β = log. num. 2	=	0,3010300
+ log. sin 63⁰ 42′	=	9,9525437 — 10
+ log. sin 34⁰ 42′ 19″	=	9,7553834 — 10
		0,0089571
— log. sin 28⁰ 59′ 41″	=	9,6854991 — 10
		0,3234580
		$\beta = 64^0\ 36'$.

e. Indirecte Methoden zur Bestimmung von β.

Ausser diesen vorstehend genannten, häufigsten Methoden zur Ermittelung der Axenschiefe sieht man sich bisweilen genöthigt, noch andere Wege zur Bestimmung einzuschlagen. Die Möglichkeit, eine Einsicht in dieselben, die sehr mannigfach sein können, zu erlangen, beruht aber ganz wesentlich auf der Fähigkeit, erst die klinorhombischen Gestalten unter gewöhnlichen Verhältnissen berechnen zu können, wesshalb wir uns damit nunmehr vertraut machen müssen. Da, bei der grossen Zahl der indirecten Methoden zur Bestimmung von β, es nicht möglich sein würde, sie alle gleichmässig zu würdigen, so müssen wir uns bescheiden, einige derselben bei den nun folgenden Berechnungen anzugeben und an Beispielen zum Schluss vorzuführen. Wir möchten desshalb die Durcharbeitung besagter Beispiele dem Anfänger ganz besonders empfehlen, damit er dadurch in den Stand gesetzt werde, bei den Berechnungen das Wesentliche sofort erkennen und andere Fälle entsprechend behandeln zu können.

2. Berechnung des Axenverhältnisses und der einzelnen Gestalten.

a. Berechnung der Hemipyramiden.

Wir bezeichnen, Fig. 134, die Neigung der Fläche einer positiven Hemipyramide gegen den klinodiagonalen Hauptschnitt mit X, gegen den orthodiagonalen Hauptschnitt mit Y, gegen den basischen

Hauptschnitt mit Z. Ferner nennen wir: X′, Y′, Z′ die entsprechenden Neigungen bei einer negativen Hemipyramide.

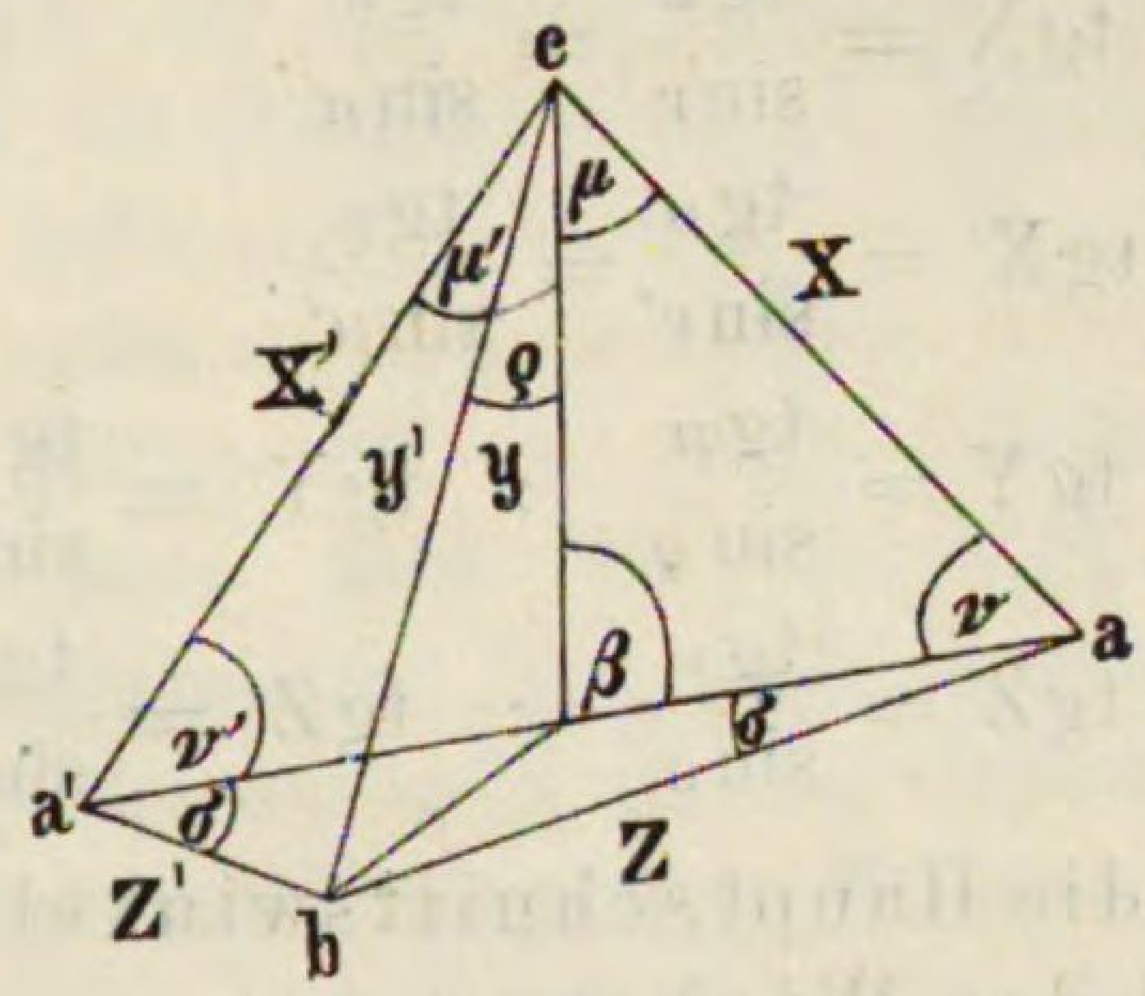


Fig. 134.

Die Neigung von X gegen die Axe c heisse μ,
" " " X " " " a " ν,
" " " Y " " " c " ϱ,
" " " Z " " " a " σ.

Für die negative Hemipyramide werden die Neigungen von X′ gegen c und a′ zu μ' und ν'; ϱ und σ gehen dagegen unverändert aus der positiven Hemipyramide in die negative über.

Beim Zusammenvorkommen von ± mPn ist:
der Winkel im klinodiagonalen Hauptschnitt = 2X oder 2X′,
" " " orthodiagonalen Hauptschnitt = Y + Y′,
" " " basischen Hauptschnitt = Z + Z′.

Nennt man die Winkel: X, X′, Y, Y′, Z und Z′ **Kantenwinkel**, die Winkel: μ, μ', ν, ν', ϱ und σ **Hauptschnittswinkel** der Pyramiden, so sind die **Hauptschnittswinkel folgende Functionen der Kantenwinkel**:

$$\cos\mu = \frac{\cos Y}{\sin X} \quad ; \quad \cos\mu' = \frac{\cos Y'}{\sin X'}.$$

$$\cos\nu = \frac{\cos Z}{\sin X} \quad ; \quad \cos\nu' = \frac{\cos Z'}{\sin X'}.$$

$$\cos\varrho = \frac{\cos X}{\sin Y} = \frac{\cos X'}{\sin Y'}.$$

$$\cos\sigma = \frac{\cos X}{\sin Z} = \frac{\cos X'}{\sin Z'}.$$

Ferner ist zu bemerken, dass:

$$\mu + \nu + \beta = 180^0.$$

$$\mu' + \nu' = \beta.$$

Weiter sind die Kantenwinkel folgende Functionen der Hauptschnittswinkel:

$$\mathrm{tg}X = \frac{\mathrm{tg}\,\sigma}{\sin\nu} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\sin\mu}.$$

$$\mathrm{tg}X' = \frac{\mathrm{tg}\,\sigma}{\sin\nu'} = \frac{\mathrm{tg}\,\varrho}{\sin\mu'}.$$

$$\mathrm{tg}Y = \frac{\mathrm{tg}\,\mu}{\sin\varrho} \quad ; \quad \mathrm{tg}Y' = \frac{\mathrm{tg}\,\mu'}{\sin\varrho}.$$

$$\mathrm{tg}Z = \frac{\mathrm{tg}\,\nu}{\sin\sigma} \quad ; \quad \mathrm{tg}Z' = \frac{\mathrm{tg}\,\nu'}{\sin\sigma}.$$

Endlich sind die Hauptschnittswinkel folgende Functionen der Axen und des Winkels β:

$$\mathrm{tg}\mu = \frac{a.\sin\beta}{c - a.\cos\beta} \quad ; \quad \mathrm{tg}\mu' = \frac{a.\sin\beta}{c + a.\cos\beta}.$$

$$\mathrm{tg}\nu = \frac{c.\sin\beta}{a - c.\cos\beta} \quad ; \quad \mathrm{tg}\nu' = \frac{c.\sin\beta}{a + c.\cos\beta}.$$

$$\mathrm{cotg}\,\varrho = \frac{c}{b} \quad ; \quad \mathrm{cotg}\,\sigma = \frac{a}{b}.$$

Was die Berechnung der Pyramiden im Allgemeinen anlangt, so ist das Bestreben darauf zu richten, zwei sich nicht bestimmende Hauptschnittswinkel darzustellen. Aus der Kenntniss derselben und der des Winkels β (welch' letztere wir zunächst voraussetzen wollen) lässt sich, wenn die betreffende Pyramide die Stammform ist, das Axenverhältniss a : b : c (b = 1) bestimmen; ist dagegen die Pyramide eine beliebige, so ergeben sich ihre Ableitungscoëfficienten, wenn man die gefundenen Axenlängen mit denen der Stammform vergleicht.

Fassen wir zunächst die Berechnung des Axenverhältnisses der Stammform in's Auge, so sind die Relationen:

$$a : c = \sin\mu : \sin\nu = \sin\mu' : \sin\nu';$$

$$\mathrm{cotg}\,\varrho = c \quad ; \quad \mathrm{cotg}\,\sigma = a,$$

unter Annahme von b = 1 aufgestellt, zu berücksichtigen. Diesen Relationen lässt sich sodann, indem nach Bedürfniss a, b, c in ihnen mit den Werthen: na, nb, mc erscheinen, für alle mPn die nöthige Allgemeinheit geben, in der sie zur Berechnung der Ableitungscoëfficienten tauglich sind.

Um, abgesehen vom Winkel β, die zur Berechnung der Pyramiden nothwendigen Elemente, nämlich zwei sich nicht bestimmende Hauptschnittswinkel, zu erhalten, ist entweder darauf Bedacht zu nehmen, dieselben durch Messung zu erlangen, oder, wenn dies, wie bei ϱ und σ

der Fall, nicht angeht, durch Rechnung zu gewinnen. Zum Zwecke der letzteren können, wie wir oben sahen, zwei Kantenwinkel der Pyramide, oder ein Kantenwinkel und ein Hauptschnittswinkel dienen.

Sind die Neigungen der Pyramidenflächen zu den Pinakoiden messbar, so folgen daraus die Kantenwinkel, indem:

$$mPn : \infty P\grave{\infty} = 180^0 - X.$$
$$mPn : \infty P\bar{\infty} = 180^0 - Y.$$
$$mPn : \ oP \ = 180^0 - Z \text{ ist.}$$

Der Winkel X kann auch als die Hälfte der Neigung von $mPn : mPn$ im klinodiagonalen Hauptschnitt erhalten werden, ferner ist die Neigung der Fläche von mPn zu dem Orthodoma, welches die im klinodiagonalen Hauptschnitt liegenden Polkanten von mPn gerade abstumpft $= X + 90^0$. Diese aus der einen Symmetrieebene des Systems sich ergebenden Folgerungen gelten nicht mehr in entsprechender Weise für die Kantenwinkel in den anderen zwei Hauptschnitten.

Manchmal kommt es vor, dass einer oder der andere der Kantenwinkel nicht gemessen werden kann, sondern berechnet werden muss. Alsdann ist stets danach zu streben, die Rechnung am klinodiagonalen Hauptschnitt zu führen, d. h. die betreffenden sphärischen Dreiecke anschliessend an denselben zu legen. Nur in dieser Lage ist im monoklinen Systeme unter passenden Umständen die Bildung rechtwinkeliger, sphärischer Dreiecke noch möglich. Bei der Rechnung selbst ist zu berücksichtigen, dass die klinodiagonalen Polkanten einer Pyramide zu den in demselben Hauptschnitt liegenden Prismenkanten derartig neigen, dass für + mPn der Winkel $= \beta + \nu$ ist und für — mPn der Werth $= (180^0 - \beta) + \nu'$ entsteht. Zieht man die Klinodomenkanten in Betracht, so sind die Winkel für $+ mPn = \beta + \mu$; für $- mPn = (180^0 - \beta) + \mu'$.

Was die Hauptschnittswinkel anlangt, so sind dieselben entweder aus den Kantenwinkeln, wie oben gezeigt, zu rechnen, oder, was aber nur noch für μ, μ', ν, ν' gilt, aus der Neigung zugehöriger Hemidomen gegen $\infty P\bar{\infty}$ und oP darzustellen. Die halben Neigungswinkel von $mP\grave{\infty} : mP\grave{\infty}$ über oP und $\infty Pn : \infty Pn$ über $\infty P\bar{\infty}$ geben nicht mehr ϱ und σ der zugehörigen Pyramiden.

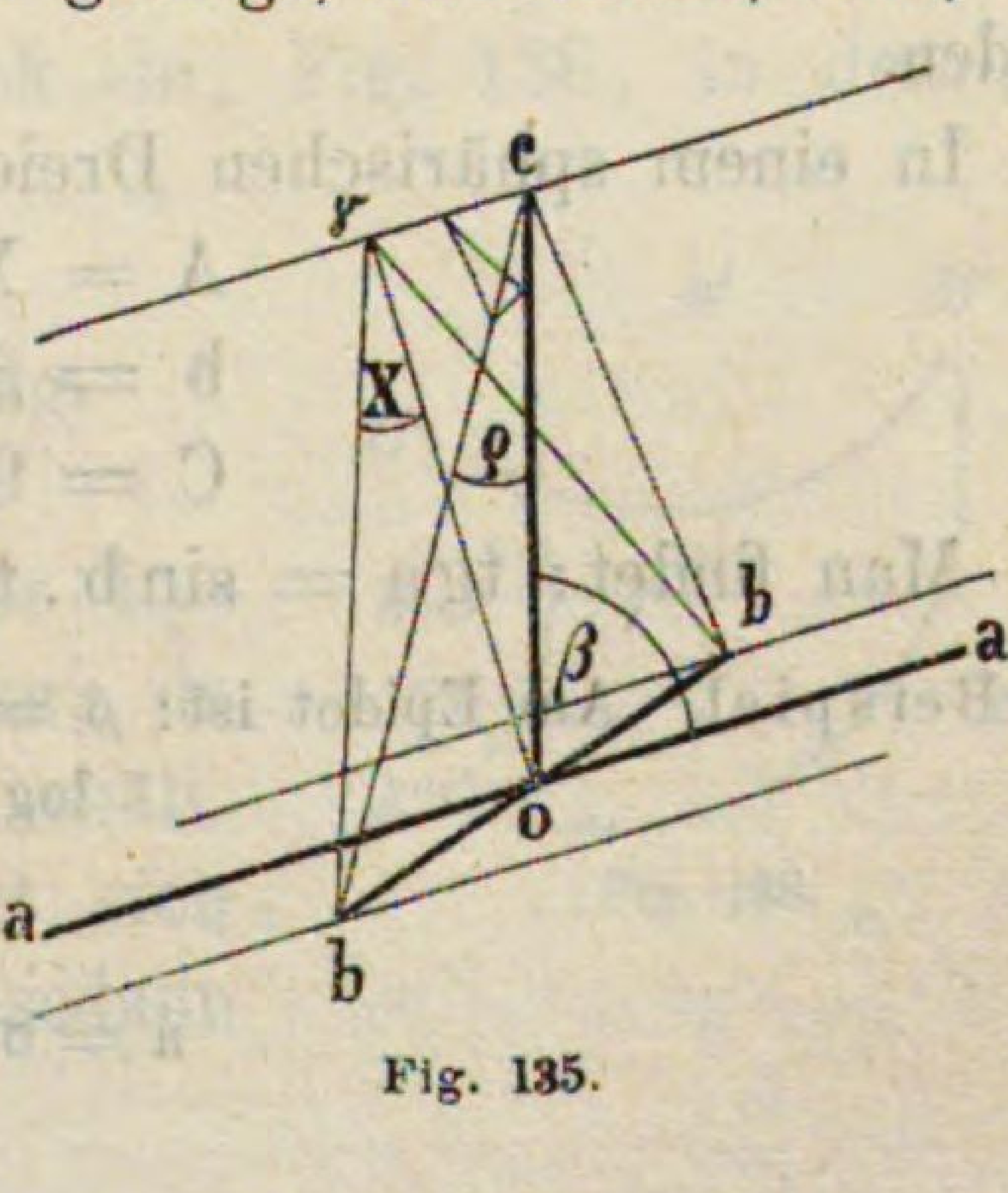


Fig. 135.

Man macht sich dies am besten durch beistehende Figur 135. für

die Klinodomen und ϱ klar. Sei der Winkel von mP$\grave{\infty}$: mP$\grave{\infty}$ im klinodiagonalen Hauptschnitt = 2X, so ist seine Hälfte nicht mehr gleich dem Hauptschnittswinkel ϱ der zugehörigen Pyramide, da im Dreieck boγ sowohl ob, als oγ senkrecht auf oa stehen, während im Dreieck boc nur ob, aber nicht oc, normal auf oa ist; oc ist vielmehr zu oa unter dem Winkel β geneigt. Die Winkel X und ϱ werden um so mehr differiren, je kleiner β ist, dagegen einander gleich sein müssen, wenn, was aber im monoklinen Systeme unmöglich ist, $\beta = 90^0$ wird. Aus Kenntniss von X und β lässt sich indessen ϱ sehr leicht berechnen.

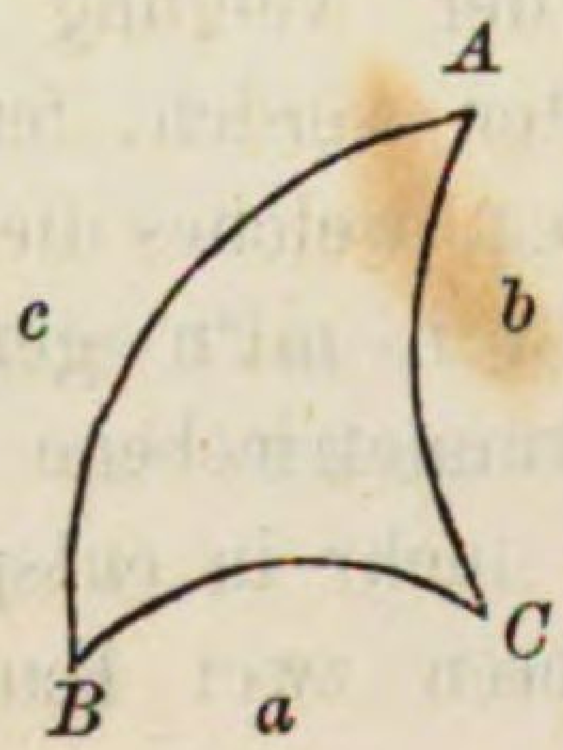


Fig. 136.

Man hat nämlich ein sphärisches Dreieck, vergl. Fig. 135 u. 136, mit folgenden Stücken:

A = X von mP$\grave{\infty}$.
b = β.
c = 90^0.

Man findet: tg a = sin b . tg A; a = ϱ.

Beispiel. Am Epidot ist: $\beta = 64^0\ 36'$; X v. P$\grave{\infty}$ = $31^0\ 30'\ 38''$.

$$\begin{aligned} \log.\ \mathrm{tg}\,a = \log.\ \sin 64^0\ 36' &= 9{,}9558490 - 10 \\ + \log.\ \mathrm{tg}\ 31^0\ 30'\ 38'' &= 9{,}7874989 - 10 \\ \hline & \ 9{,}7433479 - 10 \\ a = \varrho &= 28^0\ 58'\ 39''. \end{aligned}$$

Anmerkung. Selbstverständlich kann auch die Relation: sin b = = tg a . cotg A ; b = β, zur Berechnung der Axenschiefe dienen, wenn A = X von mP$\grave{\infty}$ und a = ϱ der zugehörigen Pyramide bekannt sind.

Bezüglich der Prismen und σ der zugehörigen Pyramiden gilt das Gleiche, was wir soeben für die Klinodomen und ϱ der zugehörigen Pyramiden ermittelten. Sei der Winkel von ∞Pn : ∞Pn im klinodiagonalen Hauptschnitt = 2X, so ist seine Hälfte ebenfalls nicht mehr gleich dem Hauptschnittswinkel σ der zugehörigen Pyramide; dieser letztere kann aber aus der Kenntniss von X und β berechnet werden.

In einem sphärischen Dreieck, vergl. Fig. 136, haben wir:

A = X von ∞Pn.
b = β.
C = 90^0.

Man findet: tg a = sin b . tg A ; a = σ.

Beispiel. Am Epidot ist: $\beta = 64^0\ 36'$, X von ∞P = $35^0\ 0'\ 15''$.

$$\begin{aligned} \log.\ \mathrm{tg}\ a = \log.\ \sin 64^0\ 36' &= 9{,}9558490 - 10 \\ + \log.\ \mathrm{tg}\ 35^0\ 0'\ 15'' &= 9{,}8452940 - 10 \\ \hline & \ 9{,}8011430 - 10 \\ a = \sigma &= 32^0\ 19'\ 6''. \end{aligned}$$

Anmerkung. Wie im vorigen Falle, kann auch hier die Relation: $\sin b = \operatorname{tg} a . \operatorname{cotg} A$; $b = \beta$ zur Bestimmung der Axenschiefe dienen, wenn $A = X$ von ∞Pn und $a = \sigma$ der zugehörigen Pyramide bekannt sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir dazu übergehen, zu zeigen, wie, wenn die Stammform gegeben ist, aus drei Messungen Axenschiefe und Axenverhältniss in den hauptsächlichsten und vorzugsweise in Betracht kommenden Fällen ermittelt werden können. —

Ist die Stammform berechnet, so erfordern die mPn zu ihrer Bestimmung im Allgemeinen zwei Winkelmessungen. Lässt sich aus dem Zonenverband dagegen für die mPn ein allgemeines Zeichen ableiten, so ist nur ein Ableitungscoëfficient zu berechnen und hierzu genügt eine Winkelmessung, wie wir später sehen werden.

Die Ermittelung der Axenschiefe und des Axenverhältnisses bei gegebener Stammform wollen wir in folgenden Unterfällen untersuchen.

1. Es sei die vollständige Pyramide ± P vorhanden.

Die Berechnung lässt sich alsdann am besten aus der Kenntniss der Winkel: X und X′ unter Hinzunahme von (Y + Y′) oder (Z + Z′) führen.

Nehmen wir an, es seien X, X′ und (Y + Y′) gegeben, so kann man ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 137, was folgende Stücke enthält:

$$A = X'.$$
$$B = X.$$
$$C = (Y + Y').$$

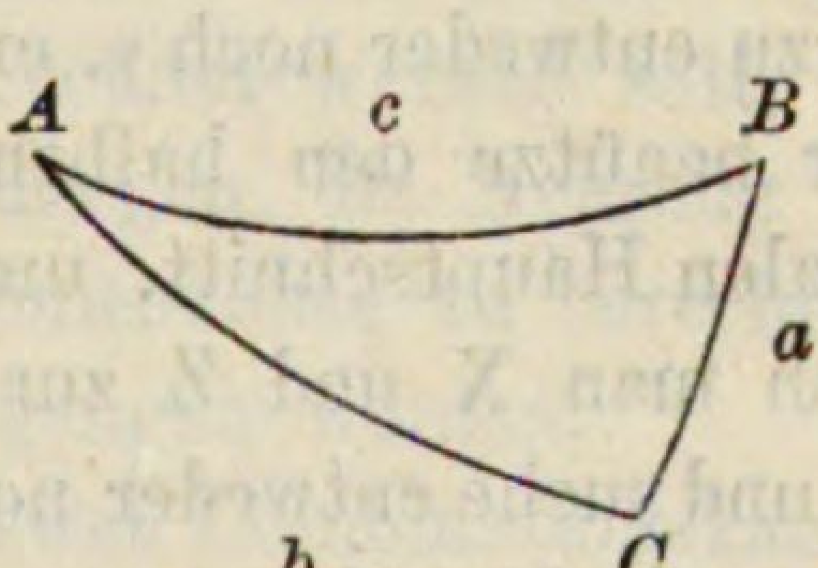


Fig. 137.

In diesem Dreieck berechne man $c = (\mu + \mu')$ der Pyramide und a, welch' letzteres Stück den ebenen Winkel vorstellt, unter dem X zu Y neigt.

Alsdann gehe man in ein Dreieck ein, Fig. 138, in dem gegeben sind:

$$B' = X.$$
$$c' = a \text{ aus voriger Rechnung.}$$
$$C' = 90^0.$$



Fig. 138.

In diesem Dreieck ist $a' = \mu$ der Pyramide + P zu bestimmen, womit man, da bereits $(\mu + \mu')$ bekannt ist, auch μ' erhält.

Mit den Winkeln μ und μ' findet sich die Axenschiefe in bekannter Weise, sodann

bestimmt sich ν und, aus der Kenntniss von X und ν, auch σ und damit a durch:

$$\operatorname{cotg} \sigma = \frac{\operatorname{cotg} X}{\sin \nu} = a.$$

Schliesslich findet sich die Hauptaxe durch die Relation:

$$c = \frac{a \,.\, \sin \nu}{\sin \mu}.$$

Wenn, neben X und X′, der Winkel (Z + Z′) gegeben ist, so verläuft die Rechnung der vorigen ähnlich; man stellt alsdann ν und ν' dar und verfährt in bekannter Weise.

2. Es sei eine Hemipyramide, z. B. + P gegeben.

α. Drei Kantenwinkel seien gemessen.

Man berechne aus X und Y die Hauptschnittswinkel μ und ϱ, aus X und Z den Hauptschnittswinkel ν und ermittele $\beta = 180^0 - (\mu + \nu)$. Die Axen finden sich durch:

$$c = \operatorname{cotg} \varrho \;;\; a = \frac{c \,.\, \sin \mu}{\sin \nu}.$$

β. Zwei Kantenwinkel seien gemessen, ein Hauptschnittswinkel entweder aus einer passenden Messung direct erhalten, oder aus einer solchen berechnet.

Sind X und Y gegeben, so berechne man μ und ϱ und nehme hierzu entweder noch ν, erhalten aus der Messung $+ P\bar{\infty} : oP = 180^0 - \nu$, oder benütze den halben Neigungswinkel von $P\grave{\infty} : P\grave{\infty}$ im klinodiagonalen Hauptschnitt, um, in Verbindung mit ϱ, daraus β zu berechnen. Kann man X und Z zur Rechnung verwenden, so stelle man ν und σ dar und suche entweder noch μ aus der Messung $+ P\bar{\infty} : \infty P\bar{\infty} = 180^0 - \mu$ zu ermitteln, oder β aus dem halben Neigungswinkel von $\infty P : \infty P$ im klinodiagonalen Hauptschnitt in Verbindung mit σ, zu rechnen. — In beiden Fällen vollendet man die Rechnung in bekannter Weise. Ebenso wird man nunmehr auch im Stande sein, dieselbe zu führen, wenn ein Kantenwinkel, ein passender Hauptschnittswinkel und eine weitere zweckdienliche Messung, z. B. X, μ und $P\grave{\infty} : P\grave{\infty}$ u. s. f. gegeben sind.

Die Berechnung der Ableitungscoëfficienten der Pyramiden mPn erfordert im Allgemeinen zwei Winkelmessungen. Lässt sich jedoch für eine Pyramide aus dem Zonenverband ein allgemeines Zeichen herleiten, z. B. erkennen, dass sie eine mP, mPm oder Pn sei, so ist nur ein Ableitungscoëfficient zu berechnen und hierzu nur eine passend angestellte Winkelmessung nöthig.

Ist ± P nach allen Kanten- und Hauptschnittswinkeln bekannt, so haben damit gemeinsam:

1. $\pm mP$ (Zone: $\infty P : oP$) den Winkel σ.
2. $\pm\ P\bar{n}$ (Zone: $\pm P : \pm P\bar{\infty}$) die Winkel $\mu, \nu; \mu', \nu'$.
3. $\pm\ P\grave{n}$ (Zone: $\pm P :\ P\grave{\infty}$) den Winkel ϱ.
4. $\pm mP\bar{m}$ (Zone: $\pm P : \infty P\bar{\infty}$) den Winkel ϱ.
5. $\pm mP\grave{m}$ (Zone: $\pm P : \infty P\grave{\infty}$) die Winkel $\mu, \nu; \mu', \nu'$.

Man hat daher bei der Berechnung der klinorhombischen Pyramiden den Zonenverhältnissen die grösste Aufmerksamkeit zu schenken, um, im gegebenen Falle, von der durch Vorstehendes bewirkten Vereinfachung der Rechnung Nutzen ziehen zu können.

Was die Berechnung der Pyramiden mPn aus einer eigenthümlichen und einer Combinationskante, oder aus zwei Combinationskanten anlangt, so lassen sich darüber wenig allgemeine Regeln geben, da die Rechnungen je nach der Combination, die vorliegt, sehr verschieden geführt werden müssen.

Von besonderer Wichtigkeit ist es jedoch auch hier, danach zu streben, die Rechnungen an den klinodiagonalen Hauptschnitt anschliessend vorzunehmen, da nur noch in diesem Falle, unter sonst geeigneten Verhältnissen, die Bildung rechtwinkeliger, sphärischer Dreiecke im monoklinen Systeme möglich ist. So kann, wenn die Neigung der klinodiagonalen Polkante einer Pyramide zur Fläche einer Gestalt aus der Zone der Orthodiagonale berechnet werden soll, ein rechtwinkeliges Dreieck gelegt werden. Ist dagegen die Neigung besagter Polkante zu einer Prismen- oder Klinodomenkante zu berechnen, so muss in ein schiefwinkeliges Dreieck eingegangen werden.

Bezüglich der Berechnung der mPn aus zwei Combinationskanten gelten für die an den klinodiagonalen Hauptschnitt anschliessenden Rechnungen die im rhombischen Systeme p. 195 u. 196 gemachten Bemerkungen. — Für alle anderen Rechnungen kommen schiefwinkelige Dreiecke zur Verwendung und sind erstere unter steter Berücksichtigung der Hauptschnitte und Hauptschnittswinkel zu führen.

b. Berechnung der Prismen.

Wir bezeichnen mit X, Y, Z die Neigungen der Fläche eines jeden Prisma's zu dem klinodiagonalen, orthodiagonalen und basischen Hauptschnitt, entsprechend der bei den Pyramiden eingeführten Bezeichnungsweise.

Für jedes Prisma gilt alsdann: $X + Y = 90^0$.

Zum Zweck der Berechnung erinnern wir uns bei der der Pyramiden die Relation:

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\sigma \,.\, \operatorname{cotg} X$$

zur Ermittelung der Axenschiefe aufgestellt zu haben, wenn der Hauptschnittswinkel σ der betreffenden Pyramide, und X, der halbe Winkel der Neigung der zugehörigen Prismenflächen im klinodiagonalen Hauptschnitt, gegeben waren. Führt man in diesen Ausdruck an Stelle von $\operatorname{tg}\sigma$ (σ nunmehr als Hauptschnittswinkel von $\pm$ P betrachtet) den Werth $\frac{b}{a}$ ein, folgt:

$$\sin\beta = \frac{b}{a \,.\, \operatorname{tg} X},$$

in welcher Gleichung jetzt X den halben Neigungswinkel der Flächen des Prisma's ∞P im klinodiagonalen Hauptschnitt bedeutet.

Diese Gleichung kann, wenn β und X gegeben sind, zur Berechnung des Axenverhältnisses benutzt werden.

Man erhält alsdann, da b = 1 ist:

$$a = \frac{1}{\operatorname{tg} X \,.\, \sin\beta} = \frac{\operatorname{cotg} X}{\sin\beta}.$$

Ferner ergibt sich, zur Berechnung von X verwendbar:

$$\operatorname{tg} X = \frac{1}{a \,.\, \sin\beta};\ \operatorname{cotg} X = a \,.\, \sin\beta.$$

Wird die soeben angewandte Formel verallgemeinert, so dient sie zur Berechnung sämmtlicher $\infty \bar{P} n$ und $\infty \grave{P} n$.

Die Gestalten $\infty \bar{P} n$ = a : nb : ∞c ergeben:

$$\sin\beta = \frac{n b}{a \,.\, \operatorname{tg} X}.$$

Daraus folgt: $n = a \,.\, \sin\beta \,.\, \operatorname{tg} X$.

Ferner hat man: $\operatorname{tg} X = \frac{n}{a \,.\, \sin\beta}$.

Die Gestalten $\infty \grave{P} n$ = na : b : ∞c ergeben:

$$\sin\beta = \frac{b}{n a \,.\, \operatorname{tg} X}.$$

Daraus folgt: $n = \frac{1}{a \,.\, \sin\beta \,.\, \operatorname{tg} X} = \frac{\operatorname{cotg} X}{a \,.\, \sin\beta}$.

Ferner ist: $\operatorname{tg} X = \frac{1}{n a \,.\, \sin\beta}$; $\operatorname{cotg} X = n a \,.\, \sin\beta$.

Was die Berechnung von Y aller Prismen anlangt, so ist dieselbe in der von X enthalten, da X + Y = 90° sind. Z berechnet sich aus

einem rechtwinkeligen, sphärischen Dreieck, vergl. pag. 223, Fig. 132 Winkel B.

c. Berechnung der Klinodomen.

Wir nehmen auch hier an, die Neigungen der Fläche eines jeden Klinodoma's gegen den klinodiagonalen, orthodiagonalen und basischen Hauptschnitt seien mit X, Y und Z bezeichnet, entsprechend den bei den Pyramiden eingeführten Benennungen. Es gilt alsdann für jedes Klinodoma:

$$X + Z = 90^0.$$

Nunmehr machen wir, wie im vorigen Falle, von der bei der Berechnung der Pyramiden aufgestellten Relation:

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\varrho \,.\, \operatorname{cotg} X$$

Gebrauch, in welcher ϱ den Hauptschnittswinkel der betreffenden Pyramide und X den halben Winkel der Neigungen der zugehörigen Klinodomenflächen im klinodiagonalen Hauptschnitt vorstellen. Setzt man in diesem Ausdruck für $\operatorname{tg}\varrho$ den Werth $\frac{b}{c}$, so folgt:

$$\sin\beta = \frac{b}{c \,.\, \operatorname{tg} X}.$$

In dieser Gleichung bedeutet jetzt X den halben Neigungswinkel der Flächen des Doma's $P\grave{\infty}$ im klinodiagonalen Hauptschnitt.

Die genannte Formel kann, wenn β und X gegeben sind, zur Berechnung des Axenverhältnisses benutzt werden; man erhält, da $b = 1$ ist:

$$c = \frac{1}{\operatorname{tg} X \,.\, \sin\beta} = \frac{\operatorname{cotg} X}{\sin\beta}.$$

Ferner ergibt sich, zur Berechnung von X verwendbar:

$$\operatorname{tg} X = \frac{1}{c \,.\, \sin\beta}; \quad \operatorname{cotg} X = c \,.\, \sin\beta.$$

Wird die soeben angewandte Formel verallgemeinert, so kann sie zur Berechnung sämmtlicher $mP\grave{\infty}$ dienen.

Die Gestalten $mP\grave{\infty} = \infty a : b : mc$ ergeben:

$$\sin\beta = \frac{b}{mc \,.\, \operatorname{tg} X}.$$

Daraus folgt $m = \frac{1}{c \,.\, \sin\beta \,.\, \operatorname{tg} X} = \frac{\operatorname{cotg} X}{c \,.\, \sin\beta}$.

Ferner ergibt sich: $\operatorname{tg} X = \frac{1}{mc \,.\, \sin\beta}$; $\operatorname{cotg} X = mc \,.\, \sin\beta$.

Was die Berechnung von Z aller Klinodomen anlangt, so ist dieselbe in der von X enthalten, da $X + Z = 90^0$ sind. Y berechnet

sich aus einem rechtwinkeligen, sphärischen Dreieck, entsprechend wie Z der Prismen.

d. Berechnung der Orthodomen.

Stellen X, Y, Z und X′, Y′, Z′ die Neigungen einer Fläche von $\pm$ mP∞ gegen den klinodiagonalen, orthodiagonalen und basischen Hauptschnitt vor, so gilt vorab: $X = X' = 90^0$. Von den anderen Neigungswinkeln fallen Y und Y′ mit den Hauptschnittswinkeln μ und μ' der entsprechenden Pyramiden zusammen, Z und Z′ sind mit ν und ν' derselben identisch. Es werden desshalb beide Bezeichnungen oft für einander gebraucht und namentlich die letztere häufig an Stelle der ersteren gesetzt.

Für das Stammdoma $\pm$ P∞ gilt:

$$a : c = \sin\mu : \sin\nu = \sin\mu' : \sin\nu'.$$

Daraus folgt: $c = \frac{a.\sin\nu}{\sin\mu} = \frac{a.\sin\nu'}{\sin\mu'}$.

Ferner erhält man für alle Orthodomen $\pm$ mP∞ = $= a : \infty b : mc$:

$$a : mc = \sin\mu : \sin\nu = \sin\mu' : \sin\nu'.$$

Dies ergibt: $m = \frac{a.\sin\nu}{c.\sin\mu} = \frac{a.\sin\nu'}{c.\sin\mu'}$.

Zur Berechnung von μ und ν oder μ' und ν' sind bei der Betrachtung der Pyramiden unter der Abtheilung: „Berechnung der Hauptschnittswinkel aus den Axen“ die nöthigen Formeln gegeben, welche indessen zum Zwecke der Rechnung, durch die logarithmisch bequemen Formeln der trigonometrischen Einleitung, vergl. pag. 2, zu ersetzen sind.

— Was die Rückrechnung der gemessenen Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten anlangt, so lässt sich die Berechnung der Kantenwinkel der Pyramiden, Prismen und Domen am einfachsten durch die gegebenen Formeln bewirken. Das Gleiche gilt für die Combinationskanten in den Zonen der Hauptaxe, Klinodiagonale und Orthodiagonale. Die wichtigsten, an den klinodiagonalen Hauptschnitt anschliessenden Rechnungen wird man ebenfalls mit Trigonometrie, häufig sogar mit rechtwinkeligen, sphärischen Dreiecken, führen können. Die übrigen Fälle erfordern schiefwinkelige, sphärische Dreiecke, oder die Anwendung der transformirten Winkelformel. Letztere kommt da besonders zur Geltung, wo es sich darum handelt, die Neigungen von Flächen beliebiger Lage zu einander darzustellen.

4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

a. Epidot aus dem Untersulzbachthal im Pinzgau.*

Nehmen wir in der Combination, Tafel VII. Fig. 3, M = oP, T = $\infty P \bar{\infty}$, P = $\infty P \grave{\infty}$, n = + P an, so bestimmen sich, mit Hülfe einer Projection auf oP, Tafel VII. Fig. 4, die übrigen Gestalten, wie folgt:

$+P\bar{\infty}$, $+nP\bar{\infty}(n<1)$, $+mP\bar{\infty}(m>1)$, $-P\bar{\infty}$, $-mP\bar{\infty}(m>1)$,
r , i , l , e , h,

$+mP\,(m>1)$, $-P$, ∞P , $\infty P\bar{n}$, $P\grave{\infty}$, $nP\grave{\infty}\,(n<1)$, $+P\grave{n}$,
q , d , z , u , o , k, b

$+mP\bar{m}$, $+mP\grave{m}$.
y , δ.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses der Grundform gehen wir von folgenden Fundamentalmessungen aus:

oP : $\infty P\bar{\infty}$ (vorn) = 115° 24′.
oP : $+P\bar{\infty}$ = 116° 18′.
$\infty P : \infty P$ über $\infty P\grave{\infty}$ = 109° 59′ 30″.

Vor allen Dingen sieht man, dass $\infty P\bar{\infty}$ und $+P\bar{\infty}$ sehr nahe gleich gegen oP geneigt sind. Der Unterschied beträgt nur 0° 54′; dennoch verbietet derselbe, beide Flächen als zugehörige in dem Sinne zu nehmen, in welchem wir im rhombischen Systeme von zugehörigen Flächenpaaren reden konnten. Daselbst waren nämlich die zugehörigen Paare auch gleich geneigt gegen die krystallographischen Elemente; im monoklinen Systeme sind diejenigen Flächenpaare aus der Zone der Orthodiagonale, aus denen zu einem Symbole zu vereinigende Formen zu bilden wären, niemals gleich geneigt gegen dieselben krystallographischen Elemente.

Zur Berechnung übergehend folgt:

a. Aus der Messung oP : $\infty P\bar{\infty}$ = 115° 24′ der Winkel β = = 64° 36′.

b. Die Messung $\infty P : \infty P$ über $\infty P\grave{\infty}$ = 109° 59′ 30″ lässt sich, in Verbindung mit β, zur Berechnung des Axenverhältnisses a : b (b = 1) benützen.

* Vergl. die Mitth. des Verf. im Neuen Jahrbuch f. Min. 1872. p. 113 u. f.

Es ist: $\grave{a} = \frac{\operatorname{cotg} X}{\sin\beta}$ und, da der gemessene Prismenwinkel $= 2Y$, auch $= \frac{\operatorname{tg} Y}{\sin\beta}$.

$$\begin{aligned}
\text{log. num } \grave{a} = \text{log. tg } 54^0\ 59'\ 45'' &= 0{,}1547060 \\
- \text{log. sin } 64^0\ 36' &= 9{,}9558490 - 10 \\
\hline
&\ 0{,}1988570 \\
\text{num. } \grave{a} &= 1{,}580727.
\end{aligned}$$

c. Aus der Messung $oP : + P\grave{\infty} = 116^0\ 18'$ erhalten wir $\nu = 63^0\ 42'$ und, da $\beta = 64^0\ 36'$, auch $\mu = 51^0\ 42'$.

Es ist: $\overset{|}{c} = \frac{a \,.\, \sin\nu}{\sin\mu}$, folglich:

$$\begin{aligned}
\text{log. num. } \overset{|}{c} = \text{log. num a} &= 0{,}1988570 \\
+ \text{log. sin } 63^0\ 42' &= 9{,}9525437 - 10 \\
\hline
&\ 0{,}1514007 \\
- \text{log. sin } 51^0\ 42' &= 9{,}8947459 - 10 \\
\hline
&\ 0{,}2566548 \\
\text{num. } \overset{|}{c} &= 1{,}805738.
\end{aligned}$$

Das Axenverhältniss lautet also: $\grave{a} : \bar{b} : \overset{|}{c} = 1{,}580727 : 1 : 1{,}805738$.

$\beta = 64^0\ 36'$.

2. Da die Gestalten $n = + P$, $d = - P$, $r = + P\grave{\infty}$, $e = - P\grave{\infty}$ und $o = P\overset{|}{\infty}$ theils aus der ursprünglichen Annahme, theils aus dem Zonenverband bekannt sind, so wäre es nur nöthig, ihre verschiedenen Neigungswinkel zu messen und, durch Rückrechnung derselben aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten, sich von der Güte des Axenverhältnisses und der Flächenbildung zu überzeugen. Wir übergehen dies und wenden uns zur Ableitung und Berechnung der noch nicht bestimmten Formen.

3. Zur Berechnung von $i = + nP\grave{\infty}$ sei gemessen: $oP : + nP\grave{\infty} = 145^0\ 39'$, woraus $\nu = 34^0\ 21'$ und $\mu = 81^0\ 3'$ folgen.

Man hat allgemein: $m = \frac{a \,.\, \sin\nu}{c \,.\, \sin\mu}$, da jedoch, ausser dieser Berechnung, noch mehrere ähnliche vorkommen, so schreiben wir: $m = \frac{\frac{a}{c} \,.\, \sin\nu}{\sin\mu}$ und bilden $\frac{a}{c}$ ein für alle Male.

$$\begin{aligned}
\text{log. num. } \frac{a}{c} = \text{log. num. a} &= 0{,}1988570 \\
- \text{log. num. c} &= 0{,}2566548 \\
\hline
&\ 9{,}9422022 - 10.
\end{aligned}$$

$$\log.\ \mathrm{num.}\ n = \log.\ \mathrm{num.}\ \frac{a}{c} = 9{,}9422022 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 34^0\ 21' = 9{,}7514691 - 10$$
$$9{,}6936713 - 10$$
$$- \log.\ \sin 81^0\ 3' = 9{,}9946798 - 10$$
$$9{,}6989915 - 10$$
$$n = 0{,}5.$$

Das Doma i ist $= + \frac{1}{2} P\bar{\infty}$.

4. Zur Bestimmung von $l = + mP\bar{\infty}$ sei gemessen $\infty P\bar{\infty}$: : $+ mP\bar{\infty} = 154^0\ 2'$, daraus folgen $\mu = 25^0\ 58'$ und $\nu = 89^0\ 26'$.

$$\log.\ \mathrm{num.}\ m = \log.\ \mathrm{num.}\ \frac{a}{c} = 9{,}9422022 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 89^0\ 26' = 9{,}9999788 - 10$$
$$9{,}9421810 - 10$$
$$- \log.\ \sin 25^0\ 58' = 9{,}6413235 - 10$$
$$0{,}3008575$$
$$\mathrm{num.}\ m = 2.$$

Das Doma l ist $= + 2P\bar{\infty}$.

5. Die Ermittelung von $h = - mP\bar{\infty}$ stützt sich auf die Messung $oP : - mP\bar{\infty} = 133^0\ 50'$. Hieraus folgt $\nu' = 46^0\ 10'$, β' ist dies Mal $= 115^0\ 24'$, folglich bleibt für μ' ein Winkel von $18^0\ 26'$ übrig.

$$\log.\ \mathrm{num.}\ m = \log.\ \mathrm{num.}\ \frac{a}{c} = 9{,}9422022 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 46^0\ 10' = 9{,}8581505 - 10$$
$$9{,}8003527 - 10$$
$$- \log.\ \sin 18^0\ 26' = 9{,}4999633 - 10$$
$$0{,}3003894$$
$$\mathrm{num.}\ m = 2.$$

Das Doma h ist $= - 2P\bar{\infty}$.

6. Was die Gestalt $k = nP\grave{\infty}$ anlangt, so ist zu deren Ableitung gemessen: $oP : nP\grave{\infty} = 140^0\ 48'$. Die zur Berechnung dienende Formel lautet:

$$n = \frac{\mathrm{cotg}\, X}{c \,.\, \sin \beta}.$$

Es ist also:

$$\log.\ \mathrm{num.}\ n = \log.\ \mathrm{cotg.}\ 50^0\ 48' = 9{,}9114666 - 10$$

$\log.\ \mathrm{num.}\ c = 0{,}2566548$	$0{,}2125038$
$+ \log.\ \sin 64^0\ 36' = 9{,}9558490 - 10$	$9{,}6989628 - 10$
$0{,}2125038$	$\mathrm{num.}\ n = 0{,}5.$

Das Doma k ist $= \frac{1}{2} P\grave{\infty}$.

7. Trägt man die bis jetzt bestimmten Gestalten in eine Projection auf oP, Tafel VII, Fig. 4 ein, so können einige der folgenden aus dem Zonenverband abgeleitet werden. Zunächst ist das Prisma $u = \infty P\bar{n}$ zu berücksichtigen. Eine Fläche dieser Gestalt $\underline{u}$ fällt in die Zone $\underline{z} : \underline{T}$, dann in die Zone $\underline{k} : \underline{d}$. Sie liegt folglich mit ihrer Sectionslinie im Mittelpunkt und in dem Zonenpunkt, dem die Coordinaten a : — 2b zukommen. Nach der Rechnung mit dem Mittelpunkt haben wir zu setzen:

$$m = 1 \text{ , } n = -\,{}^{1}/_{2}$$

und erhalten: $-\frac{a}{1} : \frac{b}{-{}^{1}/_{2}} : \frac{c}{0} = a : \bar{2}b : \infty c = \infty P\bar{2}$.

Die Gestalt $\underline{y}$ ist eine $+ mP\bar{m}$, weil in der Zone $\underline{n} : \underline{T} = + P : \infty P\bar{\infty}$ gelegen. Da $\underline{l} = + 2P\bar{\infty}$ die Polkanten X von $+ mP\bar{m}$ gerade abstumpft, so folgt für y das Zeichen: ${}^{1}/_{2}a : b : c = + 2P\bar{2}$.

Wäre letzteres Zonenverhältniss nicht zu erkennen gewesen, so hätte man geltend machen müssen, dass $y = + mP\bar{m}$ mit $+$ P den Hauptschnittswinkel ϱ gemeinsam hat. Aus der Messung y : T wäre darzustellen gewesen Y, und mit Y und ϱ hätte alsdann die Pyramide ausgerechnet werden müssen.

Die Gestalt $\underline{q}$ gehört der Zone $\underline{n} : \underline{z}$ an, ist also eine $+$ mP. Abgesehen von dieser Zone, besteht für die Fläche $\underline{q}$ z. B. noch die wohl erkennbare Zone: $\underline{q}$, $\underline{y}$, $\underline{l}$. Die Coordinaten des letzteren Zonenpunkts sind: ${}^{1}/_{2}a$: ob; die Aufgabe ist: aus diesem Zonenpunkt, parallel der Sectionslinie a : b, eine Gerade zu ziehen. Ohne alle Rechnung folgt, dass dieselbe die Axe b ebenfalls in dem Abstand ${}^{1}/_{2}$ schneiden muss, und wir erhalten daher: ${}^{1}/_{2}a : {}^{1}/_{2}b : c = + 2P$. Wäre die letztere Zone nicht zu erkennen gewesen, so hätte man geltend machen müssen, dass q, als Pyramide $+$ mP, mit $+$ P den Hauptschnittswinkel σ gemeinsam hat. Eine weitere Messung, z. B. zu $P = \infty P\breve{\infty}$, hätte X ergeben und mit X und σ wäre alsdann die Pyramide zu berechnen gewesen.

8. Zu bestimmen ist nun $\delta = + mP\grave{m}$, welches Zeichen der Gestalt aus der Zone $n : P = + P : \infty P\breve{\infty}$ zukommt. Weitere Zonen sind nicht vorhanden, die Pyramide erfordert daher noch eine Winkelmessung zu ihrer völligen Bestimmung. Wir wählen hierzu $+ mP\grave{m}$: : $\infty P\breve{\infty} = 170^{0}\ 0'$ und bilden daraus $X = 10^{0}\ 0'$. Unter Berücksichtigung des allgemeinen Zeichens kann man ferner geltend machen, dass μ und ν dieselben Werthe, wie in der Grundform, haben müssen.

Hiermit ist ein sphärisches Dreieck zu legen, Fig. 139, das folgende Stücke enthält:

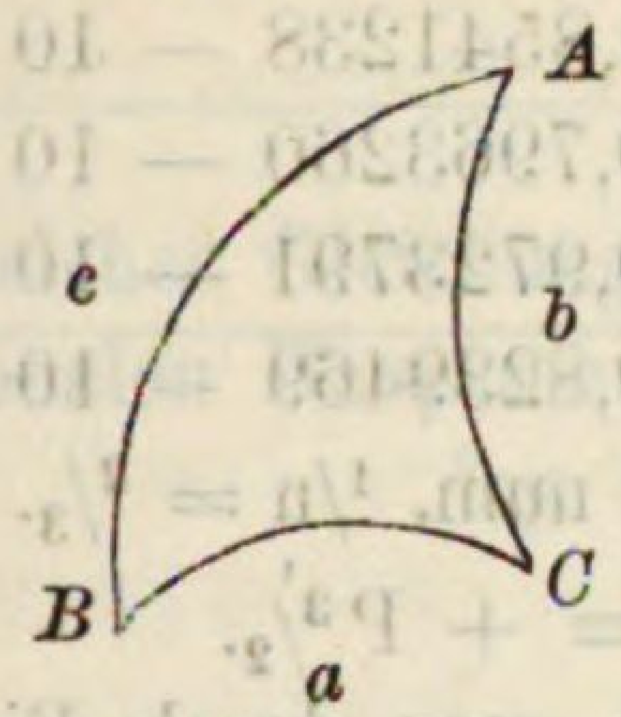


Fig. 139.

$$A = 10^0\ 0' = X \text{ von } + mP\grave{n}.$$
$$b = 63^0\ 42' = \nu \text{ von } + P.$$
$$C = 90^0.$$

Man findet: $tg\,a = \sin b\,.\,tg\,A = \frac{\bar{b}}{m\grave{a}}$.

Somit erhält man: $m = \frac{\cot g\,A}{\grave{a}\,.\,\sin b}$.

$$\log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \cot g\ 10^0\ 0' = 0{,}7536812$$
$$\underline{0{,}1514007}$$
$$0{,}6022805$$
$$\text{num.}\ m = 4.$$

$$\log.\ \text{num.}\ a = 0{,}1988570$$
$$+ \log.\ \sin 63^0\ 42' = 9{,}9525437 - 10$$
$$\overline{0{,}1514007}$$

Die Pyramide δ ist $= + 4P\grave{4}$.

9. Die letzte Gestalt ist die Pyramide $b = + P\grave{n}$. Ihr allgemeines Zeichen resultirt aus der Zone $n : o = + P : P\grave{\infty}$, und es ist somit ϱ der Grundform ein mit zur Berechnung zu verwendender Winkel. Da zur Bestimmung von ϱ die Relation: $\cot g\,\varrho = \grave{c}$ besteht, und wir den log. der Hauptaxe schon besitzen, so folgt $\varrho = 28^0\,58'\,39''$. Zur völligen Bestimmung muss noch ein weiterer Winkel gemessen werden; wir wählen hierzu die Neigung $+ P\grave{n} : \infty P\grave{\infty}$ über $+ P = 100^0\ 7'$ und erhalten daraus Y von $+ P\grave{n} = 79^0\ 53'$.

Zum Zwecke der Berechnung brauchen wir nicht σ zu bestimmen, was erst durch drei Auflösungen von rechtwinkeligen Dreiecken darzustellen wäre; wir bringen vielmehr die Pyramide $+ P\grave{n}$ auf die Form $+ {}^1/_n P\,{}^1\bar{/}_n$ und berechnen einfacher ${}^1/_n c$.

Da $\varrho = 28^0\,58'\,39''$ und $Y = 79^0\ 53'$ gegeben sind, so findet statt:

$$tg\,\mu = \sin\varrho\,.\,tg\,Y.$$

$$\log.\ tg\,\mu = \log.\ \sin 28^0\ 58'\ 39'' = 9{,}6852634 - 10$$
$$\underline{+ \log.\ tg\ 79^0\ 53' = 0{,}7485388}$$
$$0{,}4338022$$
$$\mu = 69^0\ 46'\ 53''.$$

Da der Winkel $\beta = 64^0\ 36'$, so ist $\nu = 45^0\ 37'\ 7''$.

Man hat nunmehr: ${}^1/_n = \frac{a\,.\,\sin\nu}{c\,.\,\sin\mu}$.

$$\text{log. num. } ^1/_n = \text{log. num. } \frac{a}{c} = 9{,}9422022 - 10$$
$$+ \text{ log. sin } 45^0\ 37'\ 7'' = 9{,}8541238 - 10$$
$$9{,}7963260 - 10$$
$$- \text{ log. sin } 69^0\ 46'\ 53'' = 9{,}9723791 - 10$$
$$9{,}8239469 - 10$$
$$\text{num. } ^1/_n = {}^2/_3.$$

Die Pyramide b ist also $= + {}^2/_3 P^2/_3 = + P\grave{}^3/_2$.

Nachdem alle Gestalten berechnet sind, erhält man durch Eintragen ihrer entsprechenden Sectionslinien in die Projection ein Bild des Zonenzusammenhangs der Combination.

b. Sphen von der Sella-Alp. St. Gotthard.*

Der Krystall, in einer Klinodiagonalprojection auf der Tafel VII., Fig. 5 dargestellt, erweist sich als ein Zwilling, dessen Gesetz lautet: „Zwillingsaxe die Normale auf der Fläche P. Zusammensetzungsfläche P. Umdrehungswinkel 180°.“

Die Symmetrieebene geht der Fläche q parallel, die somit zu $\infty P\acute{\infty}$ wird. Nimmt man überdies $P = oP$, $l = \infty P$, und $r = P\acute{\infty}$ an, so bestimmen sich die übrigen Gestalten, wie folgt:

$\infty P\grave{n}$, $+ mP\grave{\infty}$, $+ m'P\grave{\infty}$, $nP\acute{\infty}$ $(n < 1)$, $- mP\grave{n}$, vier $+ mP\grave{n}$.
m , x , y , o , t , n, d, s u. β.

1. Zur Ableitung des Axenverhältnisses und des Winkels β seien gemessen:

$\infty P : \infty P$ im klin. Hauptsch. $= 133^0\ 52'$.
$oP : \infty P$ vorn $= 94^0\ 15'$.
$oP : P\acute{\infty}$ $= 146^0\ 45'\ 30''$.

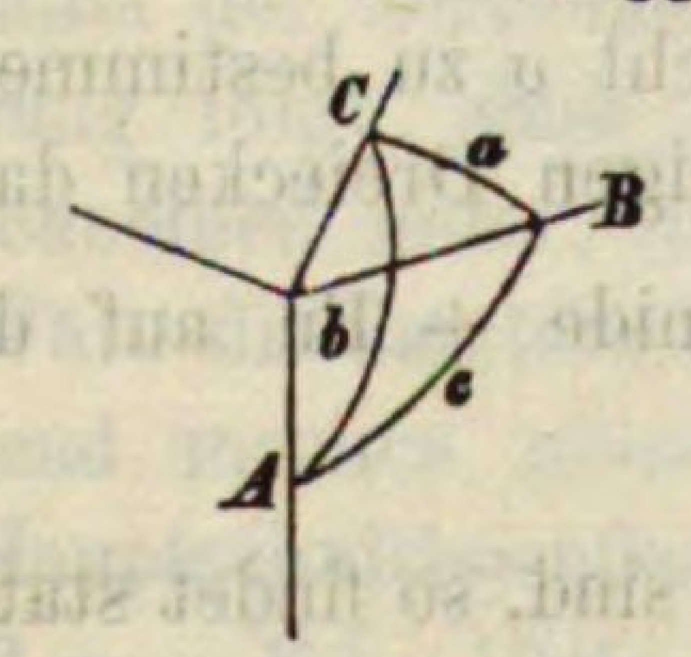


Fig. 140.

Wir stellen zuerst die Axenschiefe dar und haben in einem sphärischen Dreieck, Fig. 140:

$A = 65^0\ 56'$.
$B = 94^0\ 15'$.
$C = 90^0$.

Es ist: $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$; $a = 180^0 - \beta$.

$$\text{log. cos a} = \text{log. cos } 85^0\ 45' = \text{N. } 8{,}8698680 - 10$$
$$- \text{ log. sin } 66^0\ 56' = 9{,}9638112 - 10$$
$$\text{N. } 8{,}9060568 - 10$$
$$a = 94^0\ 37'\ 12''.$$
$$\beta = 85^0\ 22'\ 48''.$$

* Vergl. Hessenberg. Min. Notizen II. Forts., Abh. d. Senckenberg. Gesellsch. B. III. pag. 277, T. VII, Fig. 6.

Um das Axenverhältniss a : b (b = 1) zu berechnen, gilt:

$$a = \frac{\operatorname{cotg} X}{\sin \beta},$$

in welcher Gleichung X den halben Winkel von $\infty P : \infty P$ im klinodiagonalen Hauptschnitt bedeutet.

log. num. a = log. cotg 65° 56′ = 9,6292553 — 10
— log. sin 85° 22′ 48″ = 9,9985866 — 10
9,6306687 — 10
num. à = 0,427237.

Zur Ermittelung von b : c dient in unserem Falle die Relation:

$$c = \frac{\operatorname{cotg} X}{\sin \beta},$$

in der X den halben Winkel von $P\grave{\infty} : P\grave{\infty}$ im klinodiagonalen Hauptschnitt vorstellt. Die Messung $oP : P\grave{\infty}$ = 146° 45′ 30″ ergibt X = = 56° 45′ 30″.

log. num. c = log. cotg 56° 45′ 30″ = 9,8165202 — 10
— log. sin 85° 22′ 48″ = 9,9985866 — 10
9,8179336 — 10
num. c̀ = 0,657557.

Das Axenverhältniss ist also:

$\grave{a} : \bar{b} : \grave{c}$ = 0,427237 : 1 : 0,657557.
β = 85° 22′ 48″.

2. Wir wenden uns nunmehr zur Bestimmung von m = $\infty P\grave{n}$. Gemessen sei $\infty P\grave{n} : \infty P\grave{\infty}$ = 141° 56′, so folgt daraus Y = 51° 56′. Wir finden den Ableitungscoëfficienten nach der Formel:

$$n = \frac{\operatorname{tg} Y}{a \, . \, \sin \beta}.$$

log. num. n = log. tg 51° 56′ = 0,1061489
9,6292553 — 10
0,4768936
num. n = 3.

log. sin 85° 22′ 48″ = 9,9985866 — 10
+ log. num. a = 9,6306687 — 10
9,6292553 — 10

Das Prisma m ist = $\infty P\grave{3}$.

3. Die Gestalt o gehört einem Klinodoma an. Zur Ableitung sei gemessen $nP\grave{\infty} : oP$ = 167° 40′, daraus bilden wir X = 77° 40′ und berechnen n nach der Formel:

$$n = \frac{\operatorname{cotg} X}{c \, . \, \sin \beta}.$$

$$\log.\ \text{num.}\ n = \log.\ \text{cotg}\ 77^0\ 40' = 9{,}3397391 - 10$$
$$9{,}8165202 - 10$$

$$\log.\ \text{num.}\ c = 9{,}8179336 - 10 \qquad 9{,}5232189 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 85^0\ 22'\ 48'' = 9{,}9985866 - 10 \qquad \text{num.}\ n = {}^1/_3.$$
$$9{,}8165202 - 10$$

Das Doma o ist $= {}^1/_3 P\bar{\infty}$.

4. Bestimmung von $x = + mP\bar{\infty}$. Gemessen sei $oP : + mP\bar{\infty} = 140^0\ 43'$, daraus folgt $\nu = 39^0\ 17'$ und, da $\beta = 85^0\ 22'\ 48''$ ist, erhält man $\mu = 55^0\ 20'\ 12''$.

$$m = \frac{\frac{a}{c}\,.\sin\nu}{\sin\mu}.$$

$$\log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \text{num.}\ a = 9{,}6306687 - 10$$
$$- \log.\ \text{num.}\ c = 9{,}8179336 - 10$$
$$9{,}8127351 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 39^0\ 17' = 9{,}8015106 - 10$$
$$9{,}6142457 - 10$$
$$- \log.\ \sin 55^0\ 20'\ 12'' = 9{,}9151402 - 10$$
$$9{,}6991055 - 10$$
$$\text{num.}\ m = {}^1/_2.$$

Das Doma x ist $= + {}^1/_2 P\bar{\infty}$.

5. Bestimmung von $y = + m'P\bar{\infty}$. Gemessen sei $oP : + m'P\bar{\infty} = 119^0\ 43'$; daraus folgen $\nu = 60^0\ 17'$ und $\mu = 34^0\ 20'\ 12''$.

$$\log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \text{num.}\ \frac{a}{c} = 9{,}8127351 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 60^0\ 17' = 9{,}9387635 - 10$$
$$9{,}7514986 - 10$$
$$- \log.\ \sin 34^0\ 20'\ 12'' = 9{,}7513212 - 10$$
$$0{,}0001774$$
$$\text{num.}\ m = 1.$$

Das Doma y ist $= + P\bar{\infty}$.

6. Nachdem die vorstehend genannten Gestalten berechnet sind, fertige man, Tafel VII, Fig. 6, eine Projection derselben auf die Basis an und wende sich nunmehr zur Gestalt $n = mP\acute{n}$. Eine Fläche n derselben fällt in die Zonen:

l' : r. Coord. d. Zonenp. a : b.
und l : o. Coord. d. Zonenp. — 3a : 3b.

Wir haben daher: $m = 1$, $n = 1$, $m_, = -{}^1/_3$, $n_, = {}^1/_3$

und erhalten: $\frac{(-\frac{1}{3}.1)-(1.\frac{1}{3})}{1.-\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}a : \frac{(-\frac{1}{3}.1)-(1.\frac{1}{3})}{1.\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)}b =$

$= \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{9}}a : \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{9}}b = 3a : \frac{3}{2}b : c = +\frac{2}{3}P\grave{2}.$

Die Pyramide n ist $= +\frac{2}{3}P\grave{2}$.

Wären keine Zonen vorhanden, so müsste die Pyramide aus zwei Messungen berechnet werden. Wir hätten zu diesem Behufe:

$+ mP\grave{n} : oP = 144^0\ 56'$; daraus $Z = 35^0\ 4'$.

$+ mP\grave{n} : \infty P\grave{\infty} = 111^0\ 54'$; daraus $X = 68^0\ 6'$.

Hiermit könnten die Hauptschnittswinkel σ, ν und μ ermittelt werden. Man hätte zuerst zu bestimmen:

$$\cos\sigma = \frac{\cos X}{\sin Z}.$$

log. cos σ = log. cos $68^0\ 6'$ = 9,5716946 — 10
— log. sin $35^0\ 4'$ = 9,7593121 — 10
9,8123825 — 10
$\sigma = 49^0\ 31'\ 6''$.

Alsdann ist: $n = \frac{\text{cotg}\,\sigma}{a}$.

log. num. n = log. cotg $49^0\ 31'\ 6''$ = 9,9312175 — 10
— log. num. $\grave{a}$ = 9,6306687 — 10
0,3005488
num. n = 2.

Hiernach wären ν und μ zu berechnen. Man hat:

$$\cos\nu = \frac{\cos Z}{\sin X}.$$

log. cos ν = log. cos $35^0\ 4'$ = 9,9130102 — 10
— log. sin $68^0\ 6'$ = 9,9674713 — 10
9,9455389 — 10
$\nu = 28^0\ 5'\ 53''$.

Ferner ist, da β $85^0\ 22'\ 48''$, der Winkel $\mu = 66^0\ 31'\ 19''$.

Die Verlängerung der Hauptaxe folgt schliesslich durch die Formel:

$m = \frac{2a.\sin\nu}{c.\sin\mu}$. log. num. m = log. num. 2 = 0,3010300
+ log. num. $\frac{a}{c}$ = 9,8127351 — 10
+ log. sin $28^0\ 5'\ 53''$ = 9,6730043 — 10
9,7867694 — 10
— log. sin $66^0\ 31'\ 19''$ = 9,9624701 — 10
9,8242993 — 10
num. c = $\frac{2}{3}$.

Man hat hiernach durch Rechnung ebenfalls für die Pyramide n den Werth $+ {}^2/_3 P\grave{2}$.

Wäre, wie dies am Sphen häufig vorkommt, die Neigung zu $\infty P \grave{\overline{\infty}}$ nicht messbar gewesen, so hätte man die Gestalt auf andere Weise berechnen und beispielsweise ein sphärisches Dreieck, Fig. 141, mit folgenden Stücken legen müssen:

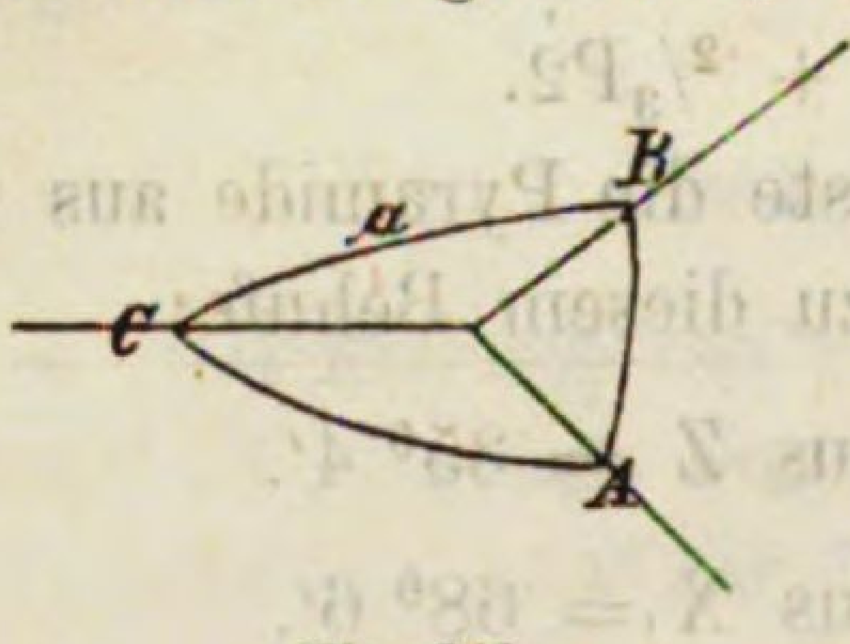


Fig. 141.

$A = $ Combk. $+ mP\grave{n} : + {}^1/_2 P\overline{\infty}$.

$B = $ Combk. $+ mP\grave{n} : oP$.

$C = $ Combk. $+ {}^1/_2 P\overline{\infty} : oP$.

In diesem Dreieck würde a zu berechnen gewesen sein, ein ebener Winkel, gebildet aus der Neigung der Combinationskante $oP : + mP\grave{n}$, die parallel Z von $+ mP\grave{n}$ ist, zur Combinationskante $oP : + {}^1/_2 P\overline{\infty}$, welche sich der Orthodiagonale parallel erstreckt. Daraus folgt, dass a, als stumpfer Winkel $= 90^0 + \sigma$ von $+ mP\grave{n}$ ist. Mit σ und Z, welch' letzterer Winkel sich aus der Messung $oP : + mP\grave{n}$ ergibt, würde alsdann die Pyramide in bekannter Weise zu berechnen sein.

7. Bestimmung von $d = + mP\grave{n}$. Eine Fläche d dieser Gestalt fällt in die Zonen:

q : n ; Coord. d. Zonenp. 3a : ob.

und r : m ; Coord. d. Zonenp. — 3a : b.

Wir haben dies Mal nur den Axenschnitt auf b zu berechnen und finden denselben in bekannter Weise $= {}^1/_2 b$. Die Pyramide d ist also $= 3a : {}^1/_2 b : c = + 2P\grave{6}$.

Soll die Gestalt berechnet werden, so kann dies aus einer Winkelmessung, z. B. aus $d : q = 140^0\ 25'$, woraus $X = 39^0\ 35'$ folgt, geschehen, wenn man die Zone q : n mit bei der Rechnung berücksichtigt. Aus dem Zonenverband mit n folgt für d in der Projection die Lage 3a : yb. Vergleicht man diese Axenschnitte mit denen von $n = 3a : {}^3/_2 b$, so ergibt sich, dass für die Gestalt d nur noch der Schnitt auf b ermittelt werden muss. Aus der Gleichheit der Axenschnitte auf a lässt sich aber weiter folgern, dass die Kanten X in beiden Pyramiden von 3a : c gehen, somit auch die in Betracht kommenden Hauptschnittswinkel μ und ν in der einen Pyramide dieselben Werthe haben müssen, wie in der anderen.

Wir können daher aus X und ν den Hauptschnittswinkel σ finden und mit derselben Gleichung auch sofort den Schnitt auf b bestimmen, da folgende Beziehung besteht:

$$\mathrm{tg}\,\sigma = \mathrm{tg}\,X \,.\, \sin\nu = \frac{y\,b}{3\,a}.$$

woraus $y = \mathrm{tg}\,X \,.\, \sin\nu \,.\, 3\grave{a}$ folgt.

log. num. y = log. tg 39° 35′	=	9,9173911 — 10
+ log. sin 28° 5′ 53″	=	9,6730043 — 10
+ log. num. 3	=	0,4771213
+ log. num. à	=	9,6306687 — 10
		9,6981854 — 10
		num. y = $^1/_2$.

Die Pyramide d geht somit von $3a : {}^1/_2 b : c = + 2P6$.

8. Bestimmung von $s = + mP\grave{n}$. Zum Zwecke derselben messen wir:

$+ mP\grave{n} : \infty P\grave{\infty} = 146^0\ 2'$, daraus folgt $X = 33^0\ 58'$.

$+ mP\grave{n}\ (s') : + mP\grave{n}\ (\underline{s'})$ am Zwilling $= 147^0\ 50'$; die Hälfte dieses Winkels, der ein einspringender ist, gibt die Neigung der Fläche zum basischen Hauptschnitt, $Z = 73^0\ 55'$. — Zur Berechnung der Pyramide haben wir zuerst ν zu bestimmen.

log. cos ν = log. cos 73° 55′	=	9,4425349 — 10
— log. sin 33° 58′	=	9,7471868 — 10
		9,6953481 — 10
		ν = 60° 16′ 28″.

Vergleicht man diesen Werth mit dem des Winkels ν von $+ P\grave{\infty}$, so findet man, dass beide einander gleich sind. Hieraus folgt, dass $+ P\grave{\infty}$ die Polkanten s von $+ mP\grave{n}$ gerade abstumpft, dieses also entweder vom Zeichen $mP\grave{m}$, P oder $P\grave{n}$ ist. Welches dieser Zeichen der Gestalt s zukommt, findet man, wenn man die Veränderung der Orthodiagonale berechnet. Je nachdem dieselbe nach einem Coëfficienten $y < 1$, $= 1$, oder > 1 vor sich geht, ist die Gestalt vom Zeichen $P\,{}^1\!/m$ ($mP\grave{m}$), P oder $P\bar{n}$.

Zur Berechnung hat man:

$$\mathrm{tg}\,\sigma = \mathrm{tg}\,X \,.\, \sin\nu = \frac{y\,b}{a}.$$

$$y = \mathrm{tg}\,X \,.\, \sin\nu \,.\, \grave{a}.$$

log. num. y = log. tg 33° 58′	=	9,8284423 — 10
+ log. sin 60° 16′ 28″	=	9,9387250 — 10
+ log. num. à	=	9,6306687 — 10
		9,3978360 — 10
		num. y = $^1/_4$.

Die Pyramide s geht also von $a : {}^1/_4 b : c = + 4P\grave{4}$.

9. Bestimmung von $\beta = + mP\grave{m}$. Vorstehendes allgemeines Zeichen kommt der Gestalt aus der Zone s' : q zu, gleichzeitig ergibt sich damit, dass μ und ν dieselben Werthe, wie in der Pyramide s = $= + 4P\grave{4}$ haben. β ist daher aus einer Messung zu berechnen.

Wir messen $+ mP\grave{m} : \infty P\grave{\infty} = 153^0\ 12'$ und erhalten $X = 26^0\ 48'$. Die Berechnung ist dieselbe wie im vorigen Falle, die Pyramide wird unter der Form $P^1/\bar{m}$ dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{log. num. } y = \text{log. tg } 26^0\ 48' &= 9{,}7034086 - 10 \\ + \text{log. sin } 60^0\ 16'\ 28'' &= 9{,}9387250 - 10 \\ + \text{log. num. à} &= 9{,}6306687 - 10 \\ \hline & \ \ 9{,}2728023 - 10 \\ \text{num. } y &= 0{,}187414. \end{aligned}$$

Da sich für diesen Decimalbruch kein einfacher Werth unmittelbar finden lässt, so entwickele man in einen Kettenbruch und suche dadurch den nächst liegenden einfachen Bruchwerth zu erhalten. Man hat:

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Das Resultat ist $^3/_{16}$, die Gestalt β ist also $+ P^3\grave{/}_{16} = + {}^{16}/_3 P^{16}\grave{/}_3$.

Trägt man die Sectionslinien der bis jetzt bestimmten Gestalten in eine Projection auf o P ein, so offenbart sich der Zonenzusammenhang derselben. Von den entstehenden Zonenpunkten sind zwei, nämlich diejenigen, welche von den Sectionslinien x, β, d' und x, β', d gebildet zu sein scheinen, mit einiger Unsicherheit behaftet und desshalb der Zonencontrole zu unterwerfen.

Gehen wir von dem in der Projection mit ✳ bezeichneten Zonenpunkt im positiven Quadranten aus, so bilden ihn die Sectionslinien von $x = 2a : \infty b : c$ und von $d = 3a : {}^1/_2 b : c$. Von seinen Coordinaten ist die eine, 2a, bestimmt, und desshalb nur die auf b bezügliche zu ermitteln.

Wir haben: $\mu = {}^1/_2$, $\nu = 0$; $\mu_, = {}^1/_3$, $\nu_, = 2$

und erhalten: $$\frac{{}^1/_2 - {}^1/_3}{({}^1/_2 \cdot 2) - ({}^1/_3 \cdot 0)}\, b = {}^1/_6 b.$$

Die Coordinaten des Zonenpunktes sind daher: $2a : {}^1/_6 b$. Bilden wir hiermit und mit den Axenschnitten von $\beta' = a : - {}^3/_{16} b$ die Controlgleichung, so folgt:

$$\frac{2}{1} + \frac{{}^1/_6}{-{}^3/_{16}} = \frac{10}{9}.$$

Dies weist darauf hin, dass die Zone in der That nicht vor-

handen ist. Es würde sich indessen eine Zone ergeben, wenn man eine von a : — $\frac{1}{6}$b gehende Sectionslinie in Betracht zöge. Man erhielte alsdann:

$$\frac{2}{1} + \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{6}} = 1.$$

Die Gestalt + $6P\grave{6}$ genügt also der Zone, während die in unserem Falle vorhandene Pyramide + $\frac{16}{3}P\grave{\frac{16}{3}}$ nicht in dieselbe fällt.

10. Bestimmung von t = — $mP\grave{n}$. Die Fläche t′ der genannten Gestalt fällt in die Zonen:

l′ : r ; Coordinaten d. Zonenp. a : b
und m′ : s′ ; Coordinaten d. Zonenp. — 3a : — b.

Wir haben daher: $m = 1$, $n = 1$; $m_, = -\frac{1}{3}$, $n_, = -1$ und erhalten:

$$\frac{(-\frac{1}{3}.1) - (1.-1)}{1. - \frac{1}{3}(1 - [-1])} a : \frac{(-\frac{1}{3}.1) - (1.-1)}{1. - 1(-\frac{1}{3} - 1)} b =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} a : \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} b = -a : \frac{1}{2}b : c = -2P\grave{2}.$$

Die Pyramide t ist also = — $2P\grave{2}$.

Wären keine Zonen vorhanden, so könnte man entweder die Pyramide aus der Kenntniss von X und Z, hervorgehend aus den Messungen zu $\infty P\grave{\infty}$ und oP, berechnen, oder man müsste, wenn eine dieser Neigungen, z. B. die zu $\infty P\grave{\infty}$, nicht darstellbar wäre, durch ein sphärisches Dreieck, Fig. 142, den Hauptschnittswinkel σ (vergl. die Berechnung von n in Nro. 6), zu erhalten suchen.

Besagtes Dreieck würde enthalten:

A = Combk. $P\grave{\infty}$: — $mP\grave{n}$.
B = Combk. $P\grave{\infty}$: oP.
C = Combk. oP : — $mP\grave{n}$.

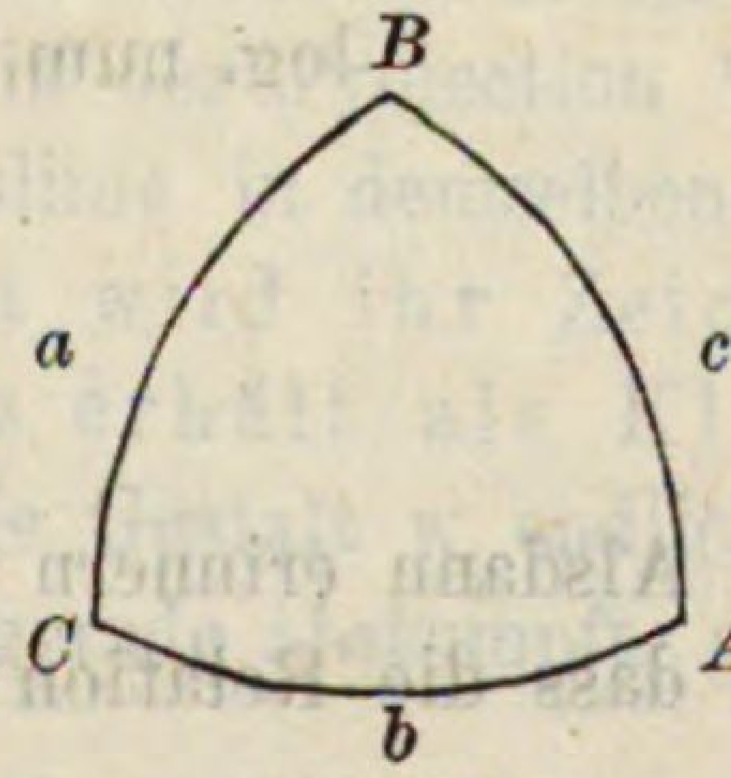


Fig. 142.

In demselben wäre zu berechnen die Seite a, welcher ebene Winkel gebildet wird aus der Neigung der Kante oP : $P\grave{\infty}$ zur Kante oP : : — $mP\grave{n}$. Erstere Kante geht der Klinodiagonale, letztere der Kante Z von — $mP\grave{n}$ parallel. Der Winkel a, als stumpfer Winkel, ist somit = 180° — σ von — $mP\grave{n}$. Aus der Kenntniss von Z, sich ergebend aus der Neigung oP : — $mP\grave{n}$, und der von σ ist die Pyramide in bekannter Weise zu berechnen.

c. Hornblende vom Vesuv.

Eine allgemeine Bestimmung des auf Tafel VII. in den Fig. 7 und 7ª dargestellten Krystalls ergibt, wenn wir das der Symmetrieebene parallele Flächenpaar x = ∞P∞̀ setzen, ferner P = oP, s = = ∞P∞̄ und r = + P annehmen, folgende Combination:

∞P , ∞P̀n , + mP (m > 1) , — mP , + mP̀m , — mP̀m , mP∞̀,
M , k , w , q , c , t , z,
+ mP∞̄.
v.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses und des Winkels β gehen wir von folgenden Fundamentalmessungen* aus:

oP : ∞P∞̄ = 104° 58′, daraus ergibt sich β = 75° 2′.

∞P : ∞P = 124° 11′ }
+ P : + P = 148° 28′ } im klinodiagonalen Hauptschnitt.

Die beiden letzten Messungen gestatten, unter Hinzuziehung von β, das Axenverhältniss abzuleiten, wenn auch nicht so ganz direct, wie früher. Wir sind jedoch genöthigt, von diesen oder ähnlichen Messungen auszugehen, da ± P∞̄ und P∞̀ am Krystalle nicht vorkommen, und die Ableitungscoëfficienten der vorhandenen Domen erst aus dem Zonenverband ermittelt werden müssten, sollten ihre Winkel zur Axenbestimmung herangezogen werden. Dies könnte nun zwar von uns mit Leichtigkeit geschehen; wir wollen jedoch den anderen Weg einschlagen.

Aus der Messung ∞P : ∞P = 124° 11′ leiten wir zuerst in bekannter Weise a : b (b = 1) ab.

log. num. a = log. cotg 62° 5′ 30″ = 9,7239963 — 10
— log. sin 75° 2′ = 9,9850114 — 10
9,7389849 — 10

num. à = 0,548258.

Alsdann erinnern wir uns, zum Zweck der Berechnung der Hauptaxe, dass die Relation:

$$\text{cotg}\,\sigma = \grave{a}$$

besteht. Wir erhalten dadurch σ = 61° 15′ 57″. Hiermit und mit der Kenntniss von X von + P = 74° 14′ kann ν berechnet werden.

* Die Fundamentalwinkel sind der Tabelle in der Mineralogie von Des-Cloizeaux 1862, T. I, p. 77 u. 78 entnommen.

$$\log. \sin \nu = \log. \cot g\, 74^0\, 14' = 9{,}4507774 - 10$$
$$+ \log. \operatorname{tg} \sigma = 0{,}2610151^{*}$$
$$\overline{9{,}7117925 - 10}$$
$$\nu = 30^0\, 59'\, 47''.$$

Da $\beta = 75^0\, 2'$ ist, so findet sich $\mu = 73^0\, 58'\, 13''$.

$$\log. \text{num. } c = \log. \text{num. } a = 9{,}7389849 - 10$$
$$+ \log. \sin \nu = 9{,}7117925 - 10$$
$$\overline{9{,}4507774 - 10}$$
$$- \log. \sin 73^0\, 58'\, 13'' = 9{,}9827770 - 10$$
$$\overline{9{,}4680004 - 10}$$
$$\text{num. } \grave{c} = 0{,}293765.$$

Das Axenverhältniss ist also: $\grave{a} : \bar{b} : \grave{c} = 0{,}548258 : 1 : 0{,}293765.$
$$\beta = 75^0\, 2'.$$

2. Bestimmung von $k = \infty P \grave{n}$. Zum Zwecke derselben sei gemessen $\infty P \grave{\infty} : \infty P \grave{n} = 147^0\, 49'$.

$$\log. \text{num. } n = \log. \operatorname{tg} 57^0\, 49' = 0{,}2011233$$
$$9{,}7239963 - 10$$
$$\overline{0{,}4771270}$$
$$\text{num. } n = 3.$$

$$\log. \text{num. } a = 9{,}7389849 - 10$$
$$+ \log. \sin 75^0\, 2' = 9{,}9850114 - 10$$
$$\overline{9{,}7239963 - 10}$$

Das Prisma k ist $= \infty P \grave{3}$.

3. Nachdem $\infty P \grave{\infty}$, $\infty P \bar{\infty}$, $+ P$, ∞P und $\infty P \grave{3}$ in eine Projection auf oP eingetragen sind, Tafel VII., Fig. 8, lassen sich v, z und w durch den Zonenverband ermitteln. Für v und z ist eine Zone: v, r, z, M' und eine entsprechende auf der anderen Seite des Krystalls: v, r', z', M vorhanden. Berücksichtigen wir erstere Zone, so sind die Coordinaten des entsprechenden Zonenpunktes in der Projection $^1/_2 a$: : $^1/_2 b$. Die Gestalt v liegt mit ihrer Sectionslinie in demselben und geht als Orthodoma der Axe b parallel, somit wird ihr Zeichen zu $^1/_2 a : \infty b : c = + 2 P \bar{\infty}$. Die Gestalt z erhält als Klinodoma das Zeichen $\infty a : {}^1/_2 b : c = 2 P \grave{\infty}$. Die Gestalt w endlich ist eine mP und, weil $+ 2 P \bar{\infty}$ ihre Polkanten X gerade abstumpft, geht sie von $^1/_2 a : {}^1/_2 b : c = + 2P$.

4. Zur Bestimmung der Pyramide $c = + mP\grave{m}$ veranstalten wir die Messung $+ mP\grave{m} : \infty P \grave{\infty} = 130^0\, 15'$ und erhalten daraus X =

* **Da der Winkel σ nicht absolut genau aufgeschlagen ist, so verwendet man, zur Berechnung des Axenverhältnisses, besser den aus dem log. num. a zu erhaltenden log. tg σ.**

$= 49^0\ 45'$. Aus der Grundform + P sind μ und ν zur Rechnung heranzuziehen. Diese letztere ist am einfachsten so vorzunehmen, dass die Pyramide unter der Form $P^1/\bar{m}$ berechnet wird.

Wir haben $\operatorname{tg}\sigma = \operatorname{tg}X.\sin\nu = \frac{yb}{a}$.

$$y = \operatorname{tg}X.\sin\nu.\grave{a}.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \text{num}.\ y = \log.\ \operatorname{tg} 49^0\ 45' &= 0{,}0723410 \\ + \log.\ \sin\nu &= 9{,}7117925 - 10 \\ + \log.\ \text{num}.\ \grave{a} &= 9{,}7389849 - 10 \\ \hline &\ 9{,}5231184 - 10 \\ \text{num}.\ y &= {}^1/_3. \end{aligned}$$

Die Pyramide c ist $= + P^1\!/\bar{_3} = + 3P\grave{3}$.

5. Ist die soeben berechnete Gestalt in die Projection eingetragen, so lassen sich schliesslich q und t deduciren. Erstere Gestalt fällt mit der Fläche q′ in die Zone z : c; Coordinaten des Zonenpunktes: — $^1/_2$a : $^1/_2$b. Als Pyramide der Hauptreihe muss die durch diesen Zonenpunkt gehende Sectionslinie den Sectionslinien von r′, w′ und M′ parallel gehen, die Gestalt q ist daher = — a : b : c = — P.

Was die Pyramide t anlangt, so besteht für sie zuerst die Hauptzone: x, t, q, q′, t′, x; Coordinaten des Zonenpunktes — a : ob, ferner ist sie, z. B. mit der Fläche t′, ein Glied der Zone: v, r, z, t′, M′; Coordinaten des Zonenpunktes: $^1/_2$a : $^1/_2$b. — Da der Schnitt auf der Axe a bekannt ist, so bleibt nur der auf b zu bestimmen übrig. Dies ist ohne alle Rechnung möglich, denn, wenn man die Sectionslinie, welche die beiden genannten Zonenpunkte verbindet, in die Projection einträgt, so offenbaren sich die Zonen c′, k′, t′ und c, s, t′, welch' erstere auch in Fig. 7 hervortritt. Hieraus bestimmt sich die Gestalt t direct zu: — a : $^1/_3$b : c = — $3P\grave{3}$.

Somit wäre die ganze Combination entwickelt, und wir wollen sie nun benutzen, um an ihr zu zeigen, wie, wenn es wünschenswerth befunden werden sollte, eine Aenderung der Axen und des Axenwinkels vorzunehmen, dies geschehen kann.

In den Krystallen des monoklinen Systems ist die Richtung der Orthodiagonale eine durch die Symmetrie des Systems bedingte, die Axe b unterliegt also in Bezug auf ihre Richtung keiner Aenderung. Sollen Richtungsänderungen der Axen stattfinden, so erstrecken sich dieselben nur auf die Axen à und ċ und damit auch auf den schiefen Winkel β. Aenderungen in der Grösse der Axen können dagegen selbstverständlich bei einer jeden derselben vorkommen, d. h. es können

beliebige, vorkommende Gestalten, die sich sonst dazu eignen, als Grundform dienen.

In unserem vorliegenden Falle wollen wir die Orthodiagonale und Hauptaxe der Lage nach beibehalten, dagegen eine neue Klinodiagonale einführen, die mit der Hauptaxe einen von 90° wenig abweichenden Winkel bildet, und auf dies Axensystem dann die übrigen Gestalten beziehen.

Zur Lösung der Aufgabe kann man mit Vortheil die pag. 220 und 221 erläuterte Transformation heranziehen, die bereits Quenstedt * zu demselben Zweck unter dem Namen des „Satzes über die Vertauschung der Projectionsebene" angewandt hat.

Soll, wie es im monoklinen Systeme häufig vorkommt, unter Erhaltung von Hauptaxe und Orthodiagonale, eine neue Klinodiagonale eingeführt werden, so lässt sich der betreffende Satz, wie folgt, aussprechen:

Um ein System von Flächen, das auf die basische Endfläche projicirt ist, auf eine beliebige andere Fläche aus der Zone der Orthodiagonale zu projiciren, legen wir diese Fläche, als neue Projectionsebene parallel sich selbst durch den Mittelpunkt des Krystalls und verfahren nach der bei der Transformation der Winkelformel gegebenen Anleitung. **

Es stelle Fig. 143 den Durchschnitt eines monoklinen Krystalls

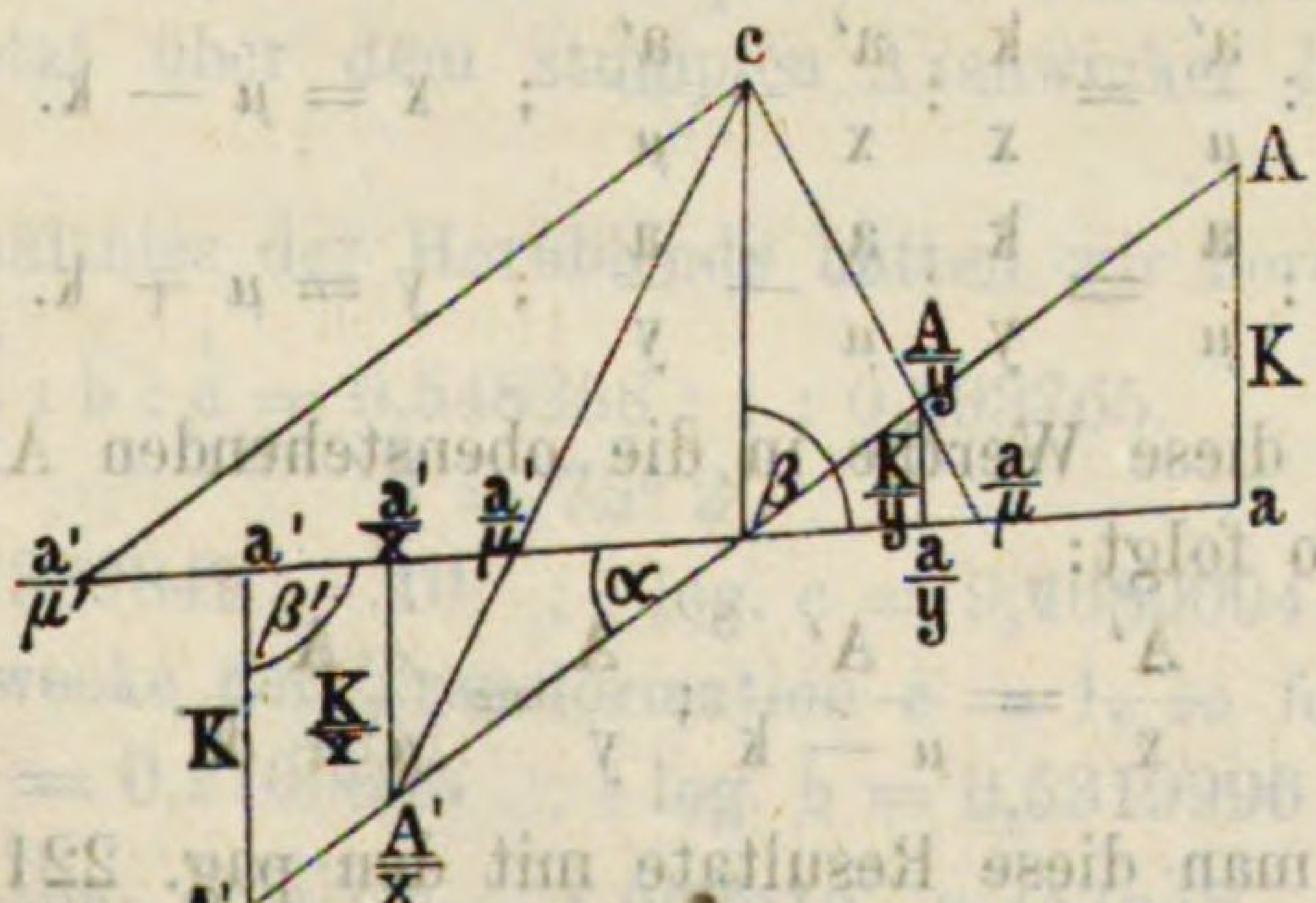


Fig. 143.

nach seiner Symmetrieebene vor; die in derselben liegenden Axen seien mit a und c bezeichnet, c sei = 1 gesetzt, und es solle die Kante

* Vergl. Quenstedt, Mineralogie 1863 p. 98 u. 99.

** Wie zu verfahren ist, wenn Hauptaxe und Klinodiagonale ihre Rollen vertauschen, bedarf wohl keiner Erörterung.

$\frac{a'}{\mu}$: c auf die Fläche $\frac{a'}{\mu'} : \frac{b}{o}$: c, welche sich im vorliegenden Durchschnitt durch die Kante $\frac{a'}{\mu'}$: c darstellt, projicirt werden. Man lege, parallel der Kante $\frac{a'}{\mu'}$: c, die Gerade A' . . . A durch den Mittelpunkt des Krystalldurchschnitts, ziehe aus a' die Linie k parallel der Axe c, so dass k zu a' unter dem Winkel $\beta' = 180^0 - \beta$ neigt. Alsdann ist, da a und c nicht mehr normal zu einander stehen:

$$k = \frac{A . \sin \alpha}{\sin \beta'} = \frac{A . \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Diese Berechnung setzt die Länge von A voraus; ist dieselbe nicht bekannt, so kann man sie leicht durch:

$$A = \frac{a . \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$$

finden. Ueberdies ist k auch durch:

$$k = \frac{a . \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}$$

zu bestimmen.

Um die Abstände $\frac{A'}{x}$ und $\frac{A}{y}$ zu finden, können wir, unter Berücksichtigung der nunmehr schiefen Axen, entsprechend wie früher verfahren und erhalten:

$$1 : \frac{a'}{\mu} = \frac{k}{x} : \frac{a'}{x} - \frac{a'}{\mu} \quad ; \quad x = \mu - k.$$

$$1 : \frac{a}{\mu} = \frac{k}{y} : \frac{a}{\mu} - \frac{a}{y} \quad ; \quad y = \mu + k.$$

Führt man diese Werthe in die obenstehenden Axenschnitte auf A' und A ein, so folgt:

$$\frac{A'}{x} = \frac{A'}{\mu - k}; \quad \frac{A}{y} = \frac{A}{\mu + k}.$$

Vergleicht man diese Resultate mit den pag. 221 erhaltenen, so findet man die Vorzeichen von k vertauscht. Damals führten wir an Stelle der stark geneigten Axe a eine rechtwinkelige α zu c ein (für den vorliegenden Zweck, in dem es sich nur um Aenderung schiefer Axen handelt, könnte die Axe α auch eine nahezu rechtwinkelige vorstellen), jetzt gehen wir von einer nahezu rechtwinkeligen Axe zu einer stark geneigten über.

Das Vorzeichen von k ist durch die Lage beider Axen zu einander bedingt und richtet sich nach folgender Regel:

Liegt auf der vorderen (negativen) Seite des Krystalls die neue schiefe Axe unter der alten, so ist k negativ zu nehmen, liegt sie über der alten, so muss k positiv eingeführt werden.

Um die Axen unseres Hornblendekrystalls in der oben erwähnten Weise zu verändern, nehmen wir an P und die Fläche, welche die Polkanten X von r = + P gerade abstumpfen würde, seien coordinirte Hemidomen. Alsdann bezeichnen wir die Neigung von P zur Axe $c = \beta = 75^0\, 2'$ mit μ', ferner die Neigung von X von + P zur Axe $c = \mu = 73^0\, 58'\, 13''$ mit μ und bestimmen die Axenschiefe durch:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2 \sin\mu \,.\, \sin\mu'}{\sin(\mu - \mu')}.$$

$$\begin{array}{rl}
\log.\ \operatorname{tg}\beta = \log.\ \text{num.}\ 2 = & 0{,}3010300 \\
+ \log.\ \sin 73^0\, 58'\, 13'' = & 9{,}9827770 - 10 \\
+ \log.\ \sin 75^0\, 2' \quad = & 9{,}9850114 - 10 \\
\hline
 & 0{,}2688184 \\
- \log.\ \sin(-1^0\, 3'\, 47'') = & \text{N.}\ 8{,}2684081 - 10 \\
\hline
 & \text{N.}\ 2{,}0004103 \\
 & \beta = 90^0\, 34'\, 21''.
\end{array}$$

Die neue Klinodiagonale A ist also zu c unter einem von 90^0 nur um $0^0\, 34'\, 21''$ abweichenden Winkel geneigt. Der stumpfe Theil desselben fällt aber nunmehr dahin, wo früher der spitze lag, und es werden in Folge dieses Umstandes die positiven Gestalten früherer Betrachtungsweise jetzt über dem stumpfen Axenwinkel liegen und zu negativen werden.

Das Axenverhältniss der Hornblende hatten wir berechnet zu:

$$\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}548258 : 1 : 0{,}293765.$$
$$\beta = 75^0\, 2'.$$
$$\log.\ a = 9{,}7389849 - 10 \quad ; \quad \log.\ c = 9{,}4680004 - 10.$$

Setzen wir zum Zwecke der Transformation c = 1, so folgt:

$$\log.\ a = 0{,}2709845 \quad ; \quad \log.\ b = 0{,}5319996$$

$$\text{und daraus: } \grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 1{,}866313 : 3{,}404099 : 1.$$
$$\beta = 75^0\, 2'.$$

Wir fertigen nunmehr mit Berücksichtigung der Projection des Hornblendekrystalls auf oP, Tafel VII, Fig. 8, einen Aufriss in der Symmetrieebene an, Fig. 144, welcher die alten Axen a und c (c = 1), sowie die im klinodiagonalen Hauptschnitt liegenden Kanten, ferner die als Linien sich darstellenden Projectionen der Flächen aus der Zone der Orthodiagonale enthält. Ist dies geschehen, so fügen wir,

unter dem von uns berechneten schiefen Winkel zu c geneigt, die neue Klinodiagonale A so ein, dass der Winkel von $90^0\ 34'\ 21'' = \beta'$, den

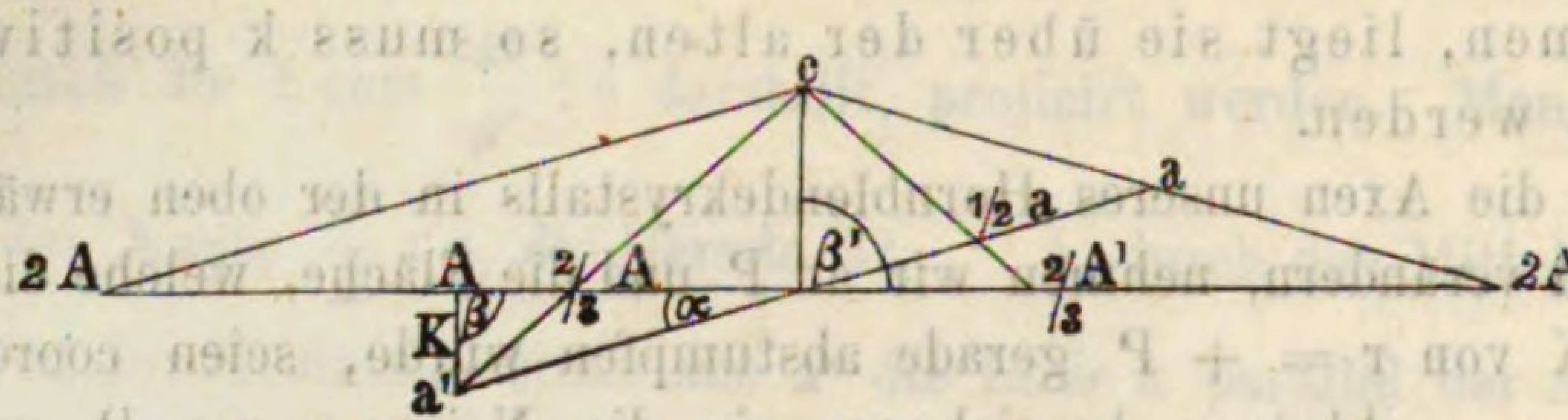


Fig. 144.

sie mit der Axe c bildet, nunmehr nach der früher als positiv betrachteten Seite zu gerichtet ist.

Da für die früher als negativ angenommene Seite, die neue Axe A jetzt über der alten, a', liegt, so ist hier k positiv einzuführen und $\frac{a'}{\mu}$ wird zu $\frac{A}{\mu + k}$; auf der vormals positiven Seite gilt das Umgekehrte, da die neue Axe A' sich unter der alten, a, befindet: $\frac{a}{\mu}$ wird zu $\frac{A'}{\mu - k}$.

Zur Berechnung von k hat man im vorliegenden Falle die Relation:

$$k = \frac{a'.\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

In dieser Gleichung ist $a' = 1{,}866313$; $\log.\ a = 0{,}2709845$; $\alpha = (90^0\ 34'\ 21'' - 75^0\ 2') = 15^0\ 32'\ 21''$; $\beta = 89^0\ 25'\ 39''$.

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{num.}\ k = \log.\ \text{num.}\ a &= 0{,}2709845 \\
+ \log.\ \sin 15^0\ 32'\ 21'' &= 9{,}4279679 - 10 \\
&\ 9{,}6989524 - 10 \\
- \log.\ \sin 89^0\ 25'\ 39'' &= 9{,}9999783 - 10 \\
&\ 9{,}6989741 - 10 \\
\text{num.}\ k &= {}^1\!/_2.
\end{aligned}$$

Um A zu berechnen, ist zu setzen, vergl. Fig. 144:

$$A = \frac{a.\sin(\beta' - \alpha)}{\sin\beta}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{num.}\ A = \log.\ \text{num.}\ a &= 0{,}2709845 \\
+ \log.\ \sin 75^0\ 2' &= 9{,}9850114 - 10 \\
&\ 0{,}2559959 \\
- \log.\ \sin 89^0\ 25'\ 39'' &= 9{,}9999783 - 10 \\
&\ 0{,}2560176 \\
\text{num.}\ A &= 1{,}803090.
\end{aligned}$$

Das neue Axenverhältniss lautet demnach:

$$A : \bar{b} : c = 1{,}803090 : 3{,}404099 : 1.$$
$$\beta = 89^0\ 25'\ 39''.$$

Die Transformation vollzieht sich wie folgt:

$$r = + P = a : b : c \text{ wird zu } \frac{A'}{1-{}^{1}/_{2}} : b : c = 2A' : b : c = - P\grave{2}.$$

$$c = + 3P\grave{3} = a : {}^{1}/_{3}b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A'}{1-{}^{1}/_{2}} : {}^{1}/_{3}b : c = 2A' : {}^{1}/_{3}b : c = - 3P\grave{6}.$$

$$w = + 2P = {}^{1}/_{2}a : {}^{1}/_{2}b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A'}{2-{}^{1}/_{2}} : {}^{1}/_{2}b : c = {}^{2}/_{3}A' : {}^{1}/_{2}b : c = - 2P\grave{{}^{4}/_{3}}.$$

$$v = + 2P\bar{\infty} = {}^{1}/_{2}a : \infty b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A'}{2-{}^{1}/_{2}} : \infty b : c = {}^{2}/_{3}A' : \infty b : c = - {}^{3}/_{2}P\bar{\infty}.$$

$$q = - P = a' : b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A}{1+{}^{1}/_{2}} : b : c = {}^{2}/_{3}A : b : c = + {}^{3}/_{2}P\bar{{}^{3}/_{2}}.$$

$$t = - 3P\grave{3} = a' : {}^{1}/_{3}b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A}{1+{}^{1}/_{2}} : {}^{1}/_{3}b : c = {}^{2}/_{3}A : {}^{1}/_{3}b : c = + 3P\grave{2}.$$

$$P = oP = \infty a' : \infty b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A}{o+{}^{1}/_{2}} : \infty b : c = 2A : \infty b : c = + {}^{1}/_{2}P\bar{\infty}.$$

$$z = 2P\grave{\infty} = \infty a' : {}^{1}/_{2}b : c \;\text{„}\;\text{„}\; \frac{A}{o+{}^{1}/_{2}} : {}^{1}/_{2}b : c = 2A : {}^{1}/_{2}b : c = + 2P\grave{4}.$$

Auf alle der Hauptaxe parallele Gestalten hat die Transformation keinen Einfluss, da gegen die Grösse ∞ im Nenner die endliche Grösse $\pm {}^{1}/_{2}$ verschwindet. Für beide Axenverhältnisse behalten daher:

$$s = \infty P\bar{\infty}, \quad x = \infty P\grave{\infty}, \quad M = \infty P \text{ und } k = \infty P\grave{3}$$

ihre Werthe bei.

Die Gestalten bekommen etwas einfachere Indices, wenn man von einer Grundform ausgeht, die die Axen A und b in den doppelten Abständen schneidet. Man erhält alsdann deren Axenverhältniss:

$$A : b : c = 3{,}606180 : 6{,}808198 : 1.$$
$$\beta = 89^{0}\, 25'\, 39''.$$

Bezogen hierauf werden die neuen Axenschnitte von:

$$r = A' : {}^{1}/_{2}b : c = - 2P\grave{2} \quad ; \quad q = {}^{1}/_{3}A : {}^{1}/_{2}b : c = + 3P\bar{{}^{3}/_{2}}.$$

$$c = A' : {}^{1}/_{6}b : c = - 6P\grave{6} \quad ; \quad t = {}^{1}/_{3}A : {}^{1}/_{6}b : c = + 6P\grave{2}.$$

$$w = {}^{1}/_{3}A' : {}^{1}/_{4}b : c = - 4P\grave{{}^{4}/_{3}} \quad ; \quad P = A : \infty b : c = + P\bar{\infty}.$$

$$v = {}^{1}/_{3}A' : \infty b : c = - 3P\bar{\infty} \quad ; \quad z = A : {}^{1}/_{4}b : c = + 4P\grave{4}.$$

Die Gestalten s, x, M und k behalten ihre oben stehenden Werthe. — Man findet das Hornblendesystem in dieser Weise in der Mineralogie von Quenstedt beschrieben. —

d. Tribenzhydroxylamin.*

Die auf Tafel VIII. Fig. 1 abgebildete Combination bietet, wenn man von dem Flächenpaar TT′ als ∞P ausgeht, deren noch zwei andere dar. Nehmen wir von denselben cc′ als — P an, so ist es vorläufig noch nicht festzustellen, ob nn′ eine Pyramide oder ein Klinodoma sei, da alle Pinakoide fehlen.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses seien gemessen:

∞P : ∞P im klin. Hauptschnitt = 96° 36′.

— P : — P „ „ „ = 149° 24′.

— P : ∞P vorn = 118° 14′.

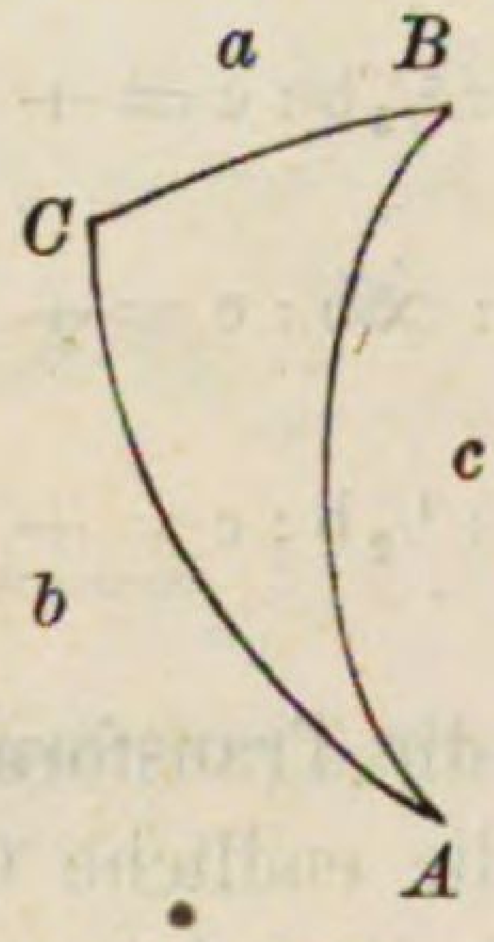


Fig. 145.

Man kann mit diesen Daten ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 145, in dem folgende Stücke bekannt sind:

$$A = 48^0\,18' = X \text{ von } \infty P.$$
$$B = 74^0\,42' = X' \text{ von } - P.$$
$$C = 118^0\,14'.$$

Zu bestimmen sind die Seiten a und c.

Man hat: $$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1/_2\,(A + B - C)\,.\,\cos{}^1/_2\,(A + C - B)}{\sin B\,.\,\sin C}}.$$

$$\frac{A + B - C}{2} = 2^0\,23' \;;\; \frac{A + C - B}{2} = 45^0\,55'.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos\,2^0\,23' = 9{,}9996242 - 10$$
$$+ \log.\cos\,45^0\,55' = 9{,}8424244 - 10$$
$$9{,}8420486 - 10$$
$$9{,}9293180 - 10$$
$$19{,}9127306 - 20$$

$$\log.\sin\,74^0\,42' = 9{,}9843281 - 10$$
$$+ \log.\sin\,61^0\,46' = 9{,}9449899 - 10$$
$$9{,}9293180 - 10$$

Daraus $\sqrt{} = 9{,}9563653 - 10$

$a = 50^0\,30'\,44''$.

Zur Berechnung von c hat man:

$$\sin c = \frac{\sin C.\sin a}{\sin A}.$$

* Vergl. die Mitth. des Verf. in den Annalen der Chemie und Pharmacie B. 166, p. 181 u. f. — In dem Axenverhältniss, was daselbst angegeben, muss b, anstatt 1,115835, gleich 1,114835 gesetzt werden. Dieser Druckfehler ist natürlich auf die gerechneten Winkel, die mittelst correcter Daten erhalten sind, von keinem Einfluss. —

$$\begin{aligned} \log.\sin c = \log.\sin 61^0\,46' &= 9{,}9449899 - 10 \\ + \log.\sin 50^0\,30'\,44'' &= 9{,}8874824 - 10 \\ \hline & \ 9{,}8324723 - 10 \\ - \log.\sin 48^0\,18' &= 9{,}8731102 - 10 \\ \hline & \ 9{,}9593621 - 10 \\ &= 65^0\,35'\,54''. \end{aligned}$$

Die Natur der Aufgabe erfordert c als stumpfen Winkel zu nehmen, somit ist er $= 114^0\,24'\,6''$.

Eine einfache Ueberlegung zeigt nun, dass $c = \beta' + \nu' = (180^0 - \beta) + \nu'$ ist; somit wird β erhalten werden können, wenn es gelingt ν' zu berechnen.

Dies ist durch folgendes Dreieck möglich, Fig. 146, in dem gegeben sind:

$B' = 74^0\,42'$.

$C' = 90^0$.

$c' = 50^0\,30'\,44''$.

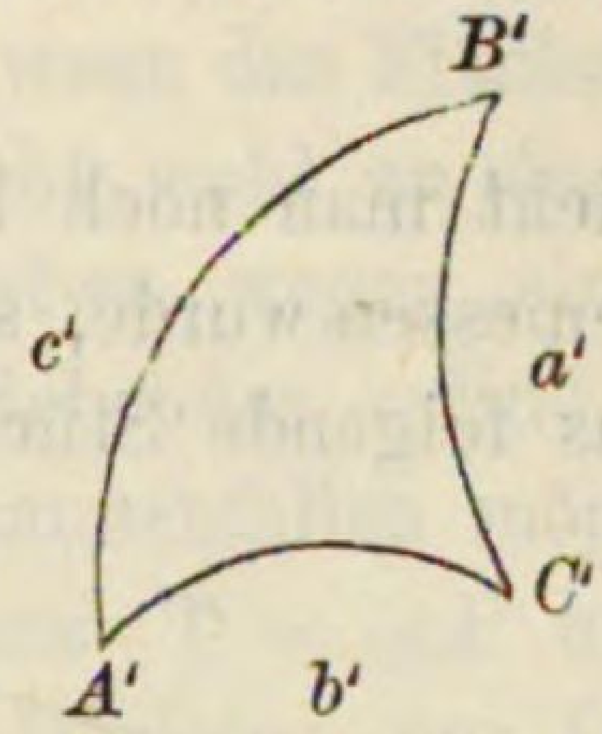


Fig. 146.

Man hat: $\operatorname{tg} a' = \cos B' . \operatorname{tg} c'$; $a' = \nu'$.

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{tg} a' = \log.\cos 74^0\,42' &= 9{,}4213950 - 10 \\ + \log.\operatorname{tg} 50^0\,30'44'' &= 0{,}0840843 \\ \hline & \ 9{,}5054793 - 10 \\ \nu' &= 17^0\,45'\,26''. \end{aligned}$$

Zieht man diesen Winkel von $\beta' + \nu'$ ab, so bleibt für β' der Werth $96^0\,38'\,40''$ übrig. Hiernach ist $\mu' = 65^0\,35'\,54''$.

Durch dasselbe Dreieck kann man, da $b' = \sigma$ ist, diesen Winkel und damit die Axe à finden. Man hat:

$$\operatorname{tg} b' = \sin a' . \operatorname{tg} B' = \frac{b}{a}.$$

$$à = \frac{\operatorname{cotg} B'}{\sin a'}.$$

$$\begin{aligned} \log.\text{num.}\, à = \log.\operatorname{cotg} 74^0\,42' &= 9{,}4370670 - 10 \\ - \log.\sin 17^0\,45'\,26'' &= 9{,}4842775 - 10 \\ \hline & \ 9{,}9527895 - 10 \\ \text{num.}\, à &= 0{,}896994. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Hauptaxe gilt:

$$c = \frac{a . \sin \nu}{\sin \mu}.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \text{num.}\ c = \log.\ \text{num.}\ a &= 9{,}9527895 - 10 \\ +\ \log.\ \sin 17^0\ 45'\ 26'' &= 9{,}4842775 - 10 \\ \hline & \ 9{,}4370670 - 10 \\ -\ \log.\ \sin 65^0\ 35'\ 54'' &= 9{,}9593618 - 10 \\ \hline & \ 9{,}4777052 - 10 \\ \text{num.}\ c &= 0{,}300404. \end{aligned}$$

Das Axenverhältniss ist also: $\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}896994 : 1 : 0{,}300404.$

$$\beta = 83^0\ 21'\ 20''.$$

2. Zur Berechnung der Gestalt n veranstalten wir die Messungen:

$$\begin{aligned} n : n' &= 146^0\ 50'. \\ n' : c' &= 162^0\ 50'. \end{aligned}$$

Zieht man noch hinzu: $c : c' = 149^0\ 24'$, welcher Winkel früher gemessen wurde, so kann man ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 147, das folgende Stücke enthält:

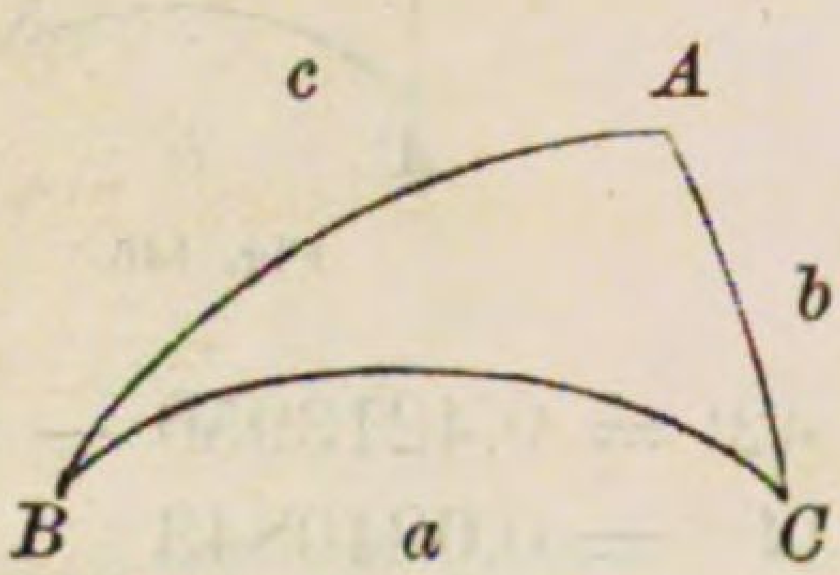


Fig. 147.

$$\begin{aligned} A &= 162^0\ 50'. \\ B &= \ 74^0\ 42'. \\ C &= \ 73^0\ 25'. \end{aligned}$$

In diesem Dreieck ist a zu berechnen, die Neigung der im klinodiagonalen Hauptschnitt liegenden Kanten von n : n' und c : c'.

$$\frac{A + B - C}{2} = 82^0\ 3'\ 30''\ ;\ \frac{A + C - B}{2} = 80^0\ 46'\ 30''.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \cos \frac{a}{2} = \log.\ \cos 82^0\ \ 3'\ 30'' &= 9{,}1403975 - 10 \\ +\ \log.\ \cos 80^0\ 46'\ 30'' &= 9{,}2049657 - 10 \\ \hline \log.\ \sin 74^0\ 42' = 9{,}9843281 - 10 \qquad & \ 8{,}3453632 - 10 \\ +\ \log.\ \sin 73^0\ 25' = 9{,}9815494 - 10 \qquad & \ 9{,}9658775 - 10 \\ \hline 9{,}9658775 - 10 \qquad & \ 18{,}3794857 - 20 \\ \text{Daraus}\ \sqrt{\ } &= 9{,}1897428 - 10 \\ a &= 162^0\ 11'\ 26''. \end{aligned}$$

Zieht man von diesem Winkel den Hauptschnittswinkel μ' von $-$ P $= 65^0\ 35'\ 54''$ ab, so bleibt die Neigung der Kante n : n' gegen den orthodiagonalen Hauptschnitt mit $96^0\ 35'\ 32''$ übrig.

Dieser Winkel ist von β' nur um $0^0\ 3'\ 8''$ verschieden und, in Anbetracht der kleinen, unvermeidlichen Fehler bei den Messungen, gleich β' zu setzen. Daraus folgt aber, dass die Kante n : n' die Projection der Klinodiagonale ist, d. h. das Flächenpaar nn' selbst einem Klinodoma zugehört.

Zur Berechnung des Ableitungscoëfficienten m hat man schliesslich:

$$m = \frac{\text{cotg}\, X}{c \,.\, \sin\beta},$$

in welcher Gleichung $X = 73^0\, 25'$ ist.

$$\text{log. num. } m = \text{log. cotg } 73^0\, 25' = 9{,}4739192 - 10$$
$$9{,}4747783 - 10$$
$$\overline{9{,}9991409 - 10}$$
$$\text{num. } m = 0{,}998 = 1.$$

$$\text{log. num. } c = 9{,}4777052 - 10$$
$$+ \text{ log. sin } 83^0\, 21'\, 30'' = 9{,}9970731 - 10$$
$$\overline{9{,}4747783 - 10}$$

Das Klinodoma n ist $= P\grave{\infty}$.

3. Wir knüpfen an dies Beispiel den Gang einer Berechnung des Axenverhältnisses an, wie solche vorzunehmen wäre, wenn das Flächenpaar c c′ fehlte, und überdies die Neigung T : T′ nicht wohl zu einem Fundamentalwinkel herangezogen werden könnte, etwa wegen einer Wölbung der Säulenzone, bei der die Axe der entstehenden cylinderähnlichen Gestalt mit der Zonenaxe der Säule zusammenfallen möge.

Geht man alsdann von der Annahme aus, dass $T = \infty P$ und $n = P\grave{\infty}$ sei, so sind zur Bestimmung des Axenverhältnisses, nur folgende Messungen möglich:

1. n : n′ im klinodiag. Hauptschn.
2. n′ : T oder n : T′ vorn.
3. n′ : T′ oder n : T hinten.

Die Messungen 2. und 3. werden sich, da die Kanten n′ : T, n : T′, n′ : T′ und n : T nahezu senkrecht auf der Kante T : T′ stehen, mit grösserer Sicherheit als eine Messung der Kante T : T′ anstellen lassen; der schädliche Einfluss der Wölbung der Flächen T und T′ macht sich am wenigsten geltend, wenn die betreffenden Kanten senkrecht zur Axe der Wölbung (hier Kante T : T′) verlaufen.

Um auf Grund der vorgenommenen Messungen ein sphärisches Dreieck zu bilden, berücksichtigen wir, dass die Neigung der Flächen n : n′, über den basischen Hauptschnitt hinweg gemessen, die Ergänzung der obenstehenden Neigung, n : n′ im klinodiagonalen Hauptschnitt, zu 180^0 ist und legen hiermit ein Dreieck, Fig. 148, das folgende Stücke enthält:

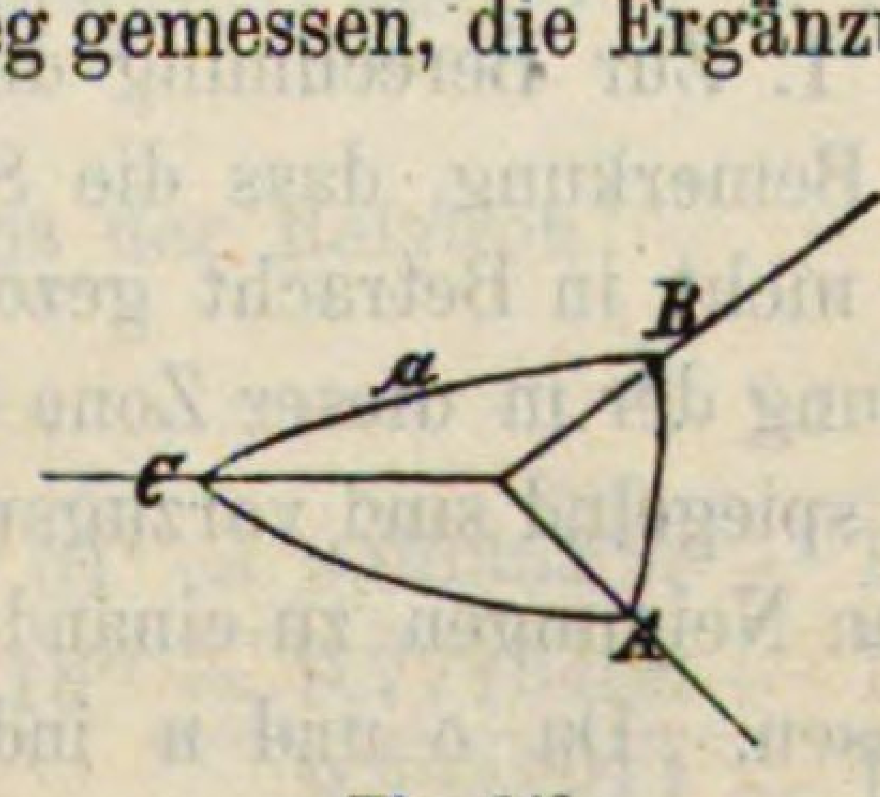


Fig. 148.

A = Combk. n : T hinten = Combk. n′ : T′ hinten = T vorn links : n unten links.
B = Combk. n′ : T vorn.
C = 180^0 — Combk. n : n′ i. klin. Hauptschn.

In diesem Dreieck berechnen wir a, d. i. die Neigung der Kante von n : n′, über den basischen Hauptschnitt hinweg gemessen, zur

Kante n′ : T vorn. Hierauf gehen wir in ein zweites Dreieck ein, Fig. 149, in dem bekannt sind:

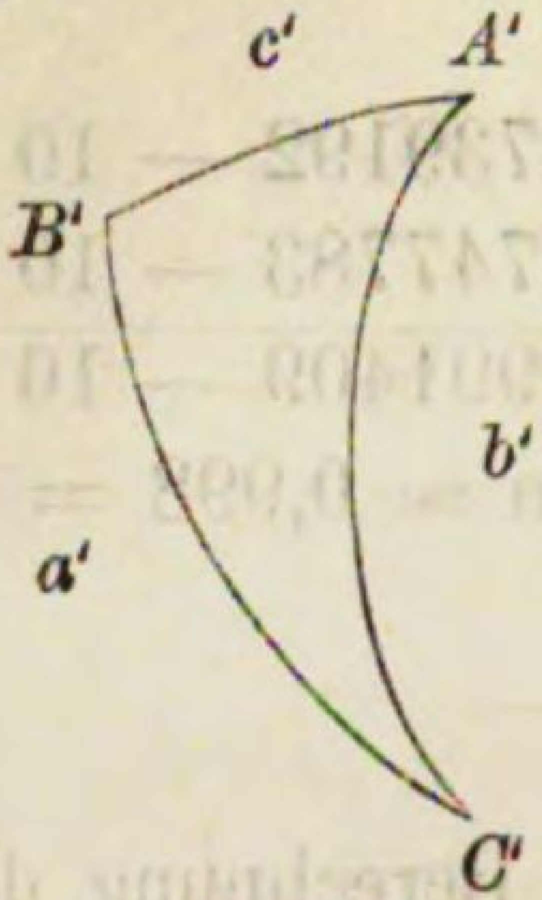


Fig. 149.

A′ = $^1/_2$ Winkel d. Combk. n : n′ i. klin. Hauptschn.
B′ = Combk. n′ : T vorn.
c′ = 180° — a aus voriger Rechnung.

Wir berechnen nunmehr b′ = 180° — β und C′ = X von ∞P. Hiermit vollendet man dann die Berechnung des Axenverhältnisses ohne Mühe.

e. Dibenzoylanisylhydroxylamin.*

Nachdem der auf Tafel VIII., Fig. 2 und 2ª dargestellte Krystall mit Rücksicht auf Formentypus, Symmetrie und optisches Verhalten (die erste Mittellinie der optischen Axen coincidirt mit der Axe der Symmetrie und es zeigt sich eine deutliche gekreuzte Dispersion) als dem monoklinen System zugehörig erkannt ist, gehen wir zu seiner näheren krystallographischen Bestimmung über.

Von Pinakoiden ist ausser dem, der Symmetrieebene parallelen Flächenpaar M = $\infty P\grave{\infty}$ keines vorhanden; nimmt man T als ∞P, o als + P an und betrachtet die Zone i′, n′, n, i als die der Klinodomen, so bestimmen sich die übrigen Gestalten wie folgt:

$$\begin{matrix} \infty P\grave{n} & , & 2P\grave{\infty} & , & mP\grave{\infty}\ (m > 2) & , & +\ mP & , & mP\bar{m}. \\ k & , & n & , & i & , & w & , & r. \end{matrix}$$

Was die Gestalt n anlangt, so geht in der Projection, vergl. Tafel VIII. Fig. 3, die entsprechende Sectionslinie der Axe a parallel und fällt in den durch den Schnitt der Sectionslinien von o und T′ gebildeten Zonenpunkt, der die Coordinaten $^1/_2$a : $^1/_2$b besitzt. Hieraus leitet sich n zu $2P\grave{\infty}$ ab.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses schreitend, machen wir die Bemerkung, dass die Säulenzone mit ihren Winkeln hierzu durchaus nicht in Betracht gezogen werden kann, der überaus starken Missbildung der in dieser Zone auftretenden Flächen wegen. Wahrhaft glatt und spiegelnd sind vorzugsweise nur die Flächen von o, o′, n und n′, aus deren Neigungen zu einander wir daher die Fundamentalwerthe schöpfen müssen. Da o und n indessen einander nicht zugehörige Gestalten sind, so wird die Berechnung des Axenverhältnisses weitläufig werden,

* Aus einer zur Zeit noch nicht abgeschlossenen Arbeit von Prof. W. Lossen und dem Verfasser mit den H. Dr. Hillebrand und Trechmann.

und es ist bei derselben jedenfalls das durch n gegebene Verhältniss der Axenschnitte $^1/_2$b : c mit in Rechnung zu ziehen.

Wir messen folgende Fundamentalwinkel:

+ P : + P	im klin. Hauptschn.	=	154° 52′.
2P∞̀ : 2P∞̀	„ „ „	=	133° 42′.
2P∞̀ : + P	anliegende	=	144° 4′.

Hiermit können wir ein sphärisches Dreieck bilden, Fig. 150 (vergl. auch in der Figur 152 das Dreieck 1.), das folgende Stücke enthält:

A = 144° 4′.
B = 66° 51′.
C = 77° 26′.

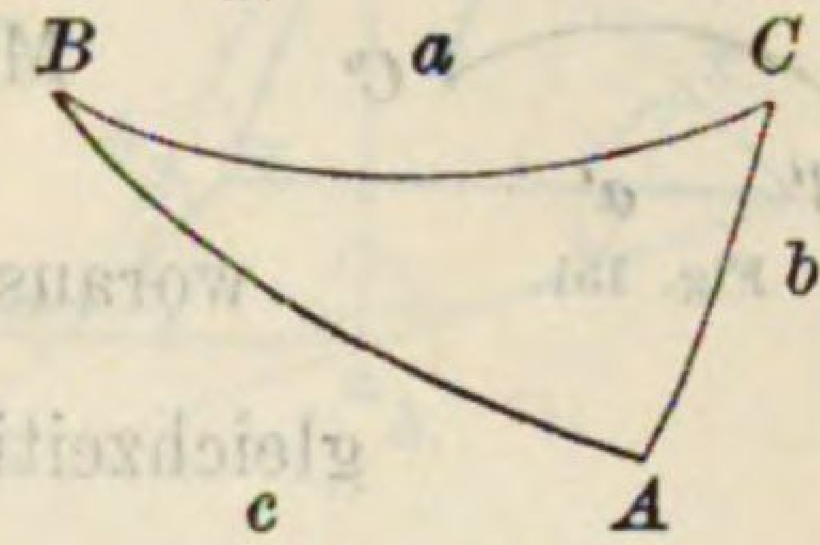


Fig. 150.

Wir berechnen in diesem Dreieck zunächst die Seite a, dann die Seite b.

Man hat $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1/_2(A+B-C)\,.\,\cos{}^1/_2(A+C-B)}{\sin B\,.\,\sin C}}$

$\frac{A+B-C}{2} = 66^0\,44'\,30''$; $\frac{A+C-B}{2} = 77^0\,19'\,30''$.

$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 66^0\,44'\,30'' = 9{,}5964624 - 10$
$+ \log.\cos 77^0\,19'\,30'' = 9{,}3412773 - 10$
$8{,}9377397 - 10$

$\log.\sin 66^0\,51' = 9{,}9635417 - 10$
$+ \log.\sin 77^0\,26' = 9{,}9894692 - 10$
$9{,}9530109 - 10$

$9{,}9530109 - 10$
$18{,}9847288 - 20$

Daraus $\sqrt{} = 9{,}4923644 - 10$
$a = 143^0\,47'\,42''$.

Da die Kante n : n′ die Projection der Klinodiagonale vorstellt, so ist die Pyramidenkante X von + P hierzu unter dem Winkel $\beta + \mu$ geneigt. Der soeben berechnete Winkel a entspricht also $\beta + \mu$, folglich ist $\nu = 36^0\,12'\,18''$.

Zur Berechnung von b bedienen wir uns der Relation:

$$\sin b = \frac{\sin B\,.\,\sin a}{\sin A}.$$

$\log.\sin b = \log.\sin 66^0\,51' = 9{,}9635417 - 10$
$+ \log.\sin 36^0\,12'\,18'' = 9{,}7713494 - 10$
$9{,}7348911 - 10$
$- \log.\sin 35^0\,56' = 9{,}7685223 - 10$
$9{,}9663688 - 10$
$b = 67^0\,44'\,29''$.

Nunmehr können wir in ein rechtwinkeliges Dreieck übergehen, Fig. 151 (vergl. auch Fig. 152, Dreieck 2.), in dem gegeben sind:

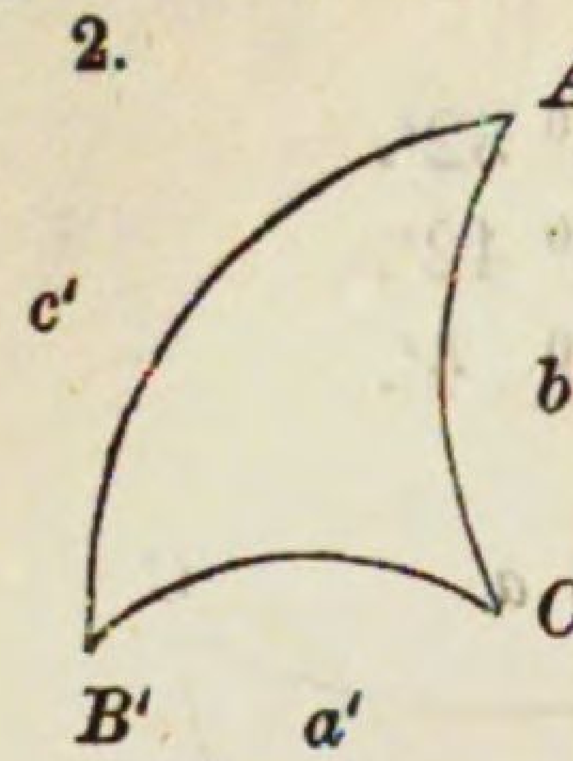


Fig. 151.

$A' = 77^0\ 26' = X$ von $+ P$.

$b' = 36^0\ 12'\ 18'' = \nu$ von $+ P$.

$C' = 90^0$.

Wir berechnen zuerst a', dann B' und c'.

Man hat: $\text{tg}\,a' = \sin b' . \text{tg}\,A' = \frac{\bar{b}}{\grave{a}}$,

woraus, da $\bar{b} = 1$,

gleichzeitig: $\grave{a} = \frac{1}{\sin b' . \text{tg}\,A'}$ folgt.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg}\ a' = \log.\ \sin 36^0\ 12'\ 18'' &= 9{,}7713494 - 10 \\ + \log.\ \text{tg}\ 77^0\ 26' &= 0{,}6518593 \\ \hline &\ \ 0{,}4232087 \\ a' &= 69^0\ 19'\ 26''. \end{aligned}$$

Ferner ist log. num. $\grave{a} = 9{,}5767913 - 10$, woraus sich die Axe $\grave{a} = 0{,}3773908$ ergibt.

Zur Berechnung von $B' = Z$ von $+ P$ gilt die Relation: $\cos B' = \sin A' . \cos b'$.

$$\begin{aligned} \log.\ \cos B' = \log.\ \sin 77^0\ 26' &= 9{,}9894692 - 10 \\ + \log.\ \cos 36'\ 12'\ 18'' &= 9{,}9068245 - 10 \\ \hline &\ \ 8{,}8962937 - 10 \\ B' = Z \text{ von } + P &= 38^0\ 2'\ 25''. \end{aligned}$$

Um c' zu ermitteln haben wir:

$$\text{tg}\,c' = \frac{\text{tg}\,b'}{\cos A'}.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg}\,c' = \log.\ \text{tg}\ 36^0\ 12'\ 18'' &= 9{,}8645250 - 10 \\ - \log.\ \cos 77^0\ 26' &= 9{,}3376099 - 10 \\ \hline &\ \ 0{,}5269151 \\ c' &= 73^0\ 26'\ 48''. \end{aligned}$$

Um den weiteren Gang der Rechnung einzusehen, diene Fig. 152, die das Axenkreuz (vorläufig noch bezüglich c und β mit beliebigen Dimensionen) so darstellt, dass die Axe b auf den Beobachter zu verlaufend gedacht ist. An besagtem Axenkreuz ist eine Fläche von $+ P$ und eine solche von $2P\breve{\infty}$ angelegt; letztere geht daher von $\infty a : {}^1/_2 b : c$ und es ist $mo = mb = {}^1/_2 \bar{b}$.

Zu bestimmen ist nun die Länge des Stücks na. Da $ob = \bar{b} = 1$,

ferner oa = à = 0,3773908 ist, so ermittelt sich:

$$na = \sqrt{\frac{1 + (0,3773908)^2}{4}} = 0,534421.$$

$$\log. na = 9,7278836 - 10.$$

Im ebenen Dreieck cna sind alsdann bekannt die Seite na, die Winkel nca = 67° 44′ 29″ und can = 73° 26′ 48″, folglich zunächst der Winkel cna = 38° 48′ 43″, dann aber auch die Seite nc, da man hat:

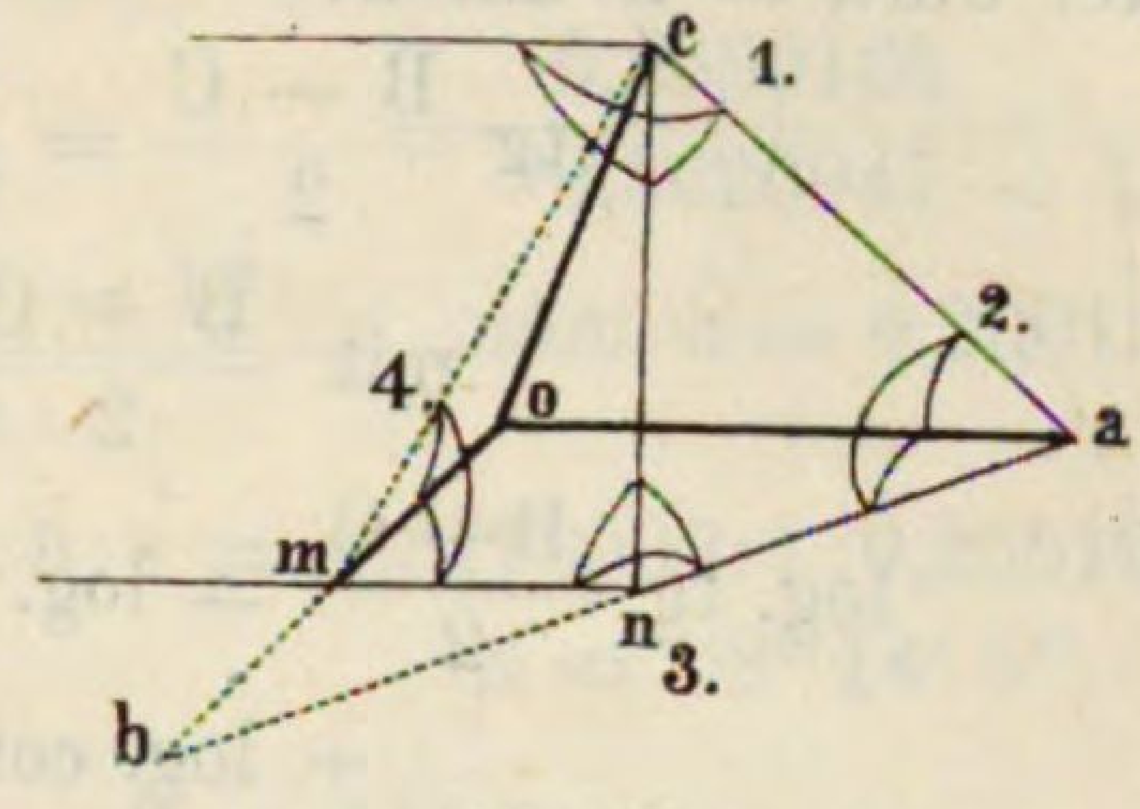


Fig. 152.

$$nc = \frac{na \,.\, \sin 73^0\, 26'\, 48''}{\sin 67^0\, 44'\, 29''}.$$

$$\begin{aligned} \log.\,\text{num.}\; nc = \log.\,\text{num.}\; na &= 9,7278836 - 10 \\ + \log.\,\sin 73^0\, 26'\, 48'' &= 9,9816170 - 10 \\ \hline & 9,7095006 - 10 \\ - \log.\,\sin 67^0\, 44'\, 29'' &= 9,9663688 - 10 \\ \hline & 9,7431318 - 10 \\ \text{num.}\; nc &= 0,5535181. \end{aligned}$$

Hiernach ist ein weiteres sphärisches Dreieck, Fig. 153, aufzulösen, das die Lage des Dreiecks 3, in Fig. 152 hat. In demselben sind gegeben:

A = 144° 4′.
B = 38° 2′ 25″.
C = 23° 9′.*
a = 110° 40′ 34″.
c = 38° 48′ 43″.

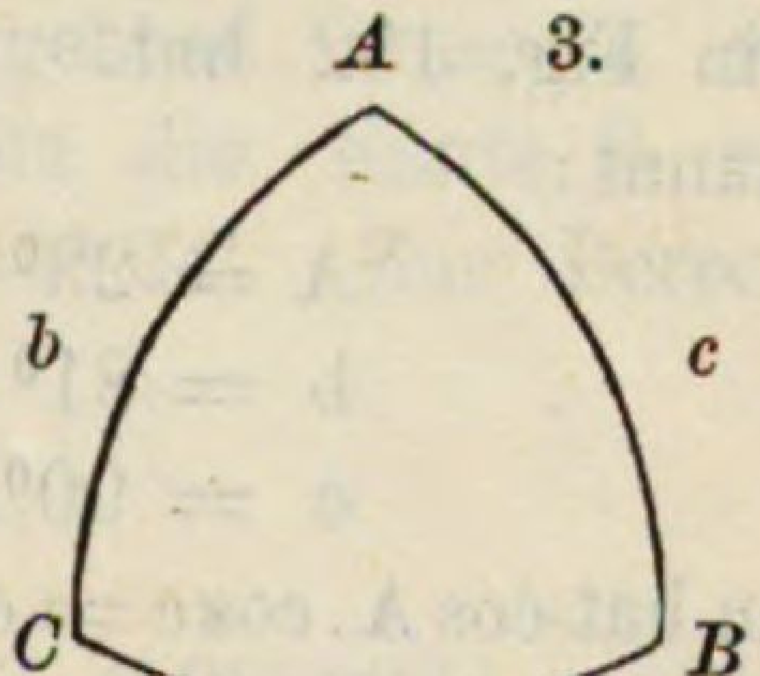


Fig. 153.

Wir können also das fehlende Stück b, dessen wir bedürfen, leicht durch:

$$\sin b = \frac{\sin B \,.\, \sin a}{\sin A}$$

finden.

$$\begin{aligned} \log.\,\sin b = \log.\,\sin 38^0\;\, 2'\, 25'' &= 9,7897325 - 10 \\ + \log.\,\sin 69^0\, 19'\, 26'' &= 9,9710861 - 10 \\ \hline & 9,7608186 - 10 \\ - \log.\,\sin 35^0\, 56' &= 9,7685223 - 10 \\ \hline & 9,9922963 - 10 \\ b &= 79^0\, 14'\, 24''. \end{aligned}$$

* Neigung der Fläche von 2P$\grave{\infty}$ gegen den basischen Hauptschnitt. —

Ist b gefunden, so kann man in dem ebenen Dreieck cmn, worin nc = 0,5535181 , nm = 0,1886954 und Winkel cnm = 79° 14′ 24″ bekannt sind, den Winkel cmn finden. Heisse zu dem Ende nc = b, nm = c und der Winkel cnm = A, so erhält man den Winkel cmn = B durch:

$$\text{tg}\,\frac{B-C}{2} = \frac{(b-c)}{(b+c)}\,.\,\text{cotg}\,\frac{A}{2}$$

$$\text{mit}\ \frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}.$$

$$\log.\,\text{tg}\,\frac{B-C}{2} = \log.\,\text{num.}\,(b-c) = 9{,}5620818 - 10$$

$$+ \log.\,\text{cotg}\ 39^0\ 37'\ 12'' = 0{,}0820430$$

$$9{,}6441248 - 10$$

$$- \log.\,\text{num.}\,(b+c) = 9{,}8705289 - 10$$

$$9{,}7735959 - 10$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^0\ 41'\ 57''.$$

$$\text{Da nun}\ \frac{B+C}{2} = 50^0\ 22'\ 48''.$$

$$\text{So folgt}\ B = 81^0\ \ 4'\ 45''.$$

Hiermit kann zur Berechnung der Axenschiefe (dargestellt durch die gleichwerthige Neigung des basischen zum orthodiagonalen Hauptschnitt), geschritten und ein Dreieck Fig. 154, gelegt werden, das die Position des Dreiecks 4. in Fig. 152 hat. In diesem Dreieck sind bekannt:

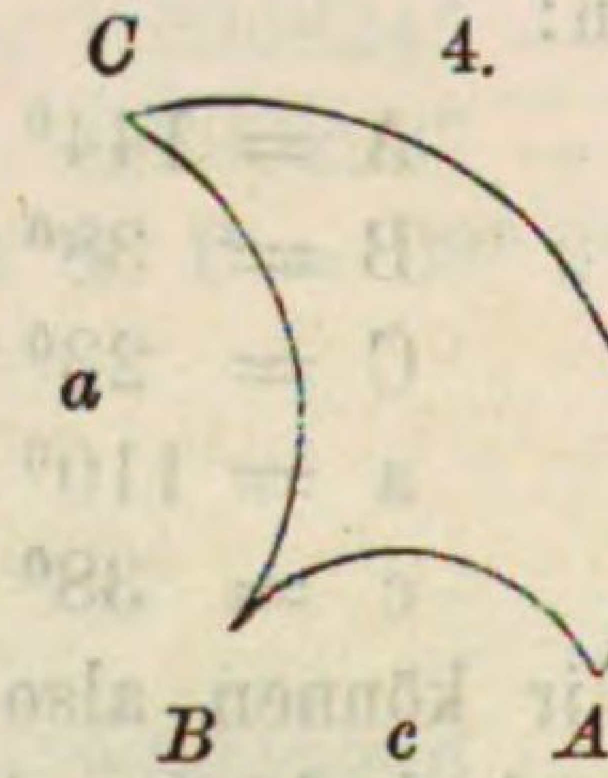


Fig. 152.

A = 23° 9′.
b = 81° 4′ 45″.
c = 90°.

Man hat cos A . cos c = cotg b . sin c — cotg B . sin A und, da c = 90°:

$$o = \text{cotg}\,b - \text{cotg}\,B\,.\,\sin A\ \ ;\ \text{cotg}\,B = \frac{\text{cotg}\,b}{\sin A}.$$

$$\log.\,\text{cotg}\,B = \log.\,\text{cotg.}\ 81^0\ 4'\ 45'' = 9{,}1958121 - 10$$

$$- \log.\,\sin\ 23^0\ 9' = 9{,}5945469 - 10$$

$$9{,}6012652 - 10$$

$$B = \beta = 68^0\ 14'\ 5''.$$

Der zuerst gerechnete Winkel a war = $\beta + \mu$ = 143° 47′ 42″, zieht man hiervon β mit 68° 14′ 5″ ab, so bleibt μ = 75° 33′ 37″ übrig. Die Hauptaxe kann nun entweder aus den Hauptschnittswinkeln μ und ν der Pyramide + P, oder aus dem früher gemessenen Winkel

$2P\grave{\infty}:2P\grave{\infty}$ im klinodiagonalen Hauptschnitt berechnet werden. Wählen wir letzteren Weg, so ist:

$$c = \frac{\cot g X}{m . \sin \beta}.$$

log. num. • = log. cotg 66° 51′ = 9,6310052 — 10
0,2689105
———————
9,3620947 — 10
num. $\acute{c}$ = 0,2301944.

log. num. 2 = 0,3010300
+ log. sin 68° 14′ 5″ = 9,9678805 — 10
———————
0,2689105

Das Axenverhältniss ist also: $\grave{a}:\bar{b}:\acute{c}$ = 0,3773908 : 1 : 0,2301944.
β = 68° 14′ 5″.

2. Bestimmung von k = $\infty P\acute{n}$. Zur Ableitung sei gemessen $\infty P\acute{n} : \infty P\grave{\infty}$ = 125° 5′ Man erhält daraus X = 54° 55′. Die zur Berechnung dienende Formel ist:

$$n = \frac{\cot g X}{a . \sin \beta}.$$

log. num. n = log. cotg 54° 55′ = 9,8465705 — 10
9,5446718 — 10
———————
0,3018987
num. n = 2.

log. num. a = 9,5767913 — 10
+ log. sin 68° 14′ 5″ = 9,9678805 — 10
———————
9,5446718 — 10

Das Prisma k ist = $\infty P\acute{2}$.

3. Zur Berechnung von i = $mP\grave{\infty}$ übergehend, messen wir $2P\grave{\infty} : mP\grave{\infty}$ = 162° 33′ und bilden hieraus, da die Kante Z von $2P\grave{\infty}$ = 23° 9′ ist, die Kante X von $mP\grave{\infty}$ = 49° 24′. Zur Berechnung dient die Formel:

$$m = \frac{\cot g X}{c . \sin \beta}.$$

log. num. m = log. cotg 49° 24′ = 9,9330334 — 10
9,3299752 — 10
———————
0,6030582
num. m = 4.

log. num. c = 9,3620947 — 10
+ log. sin 68° 14′ 5″ = 9,9678805 — 10
———————
9,3299752 — 10

Das Doma i ist = $4P\grave{\infty}$.

4. Was die Pyramide w anlangt, so lässt sie sich als eine + mP erkennen, da sie in eine Zone + P : ∞P fällt. Andere Zonen zu bekannten Gestalten liegen nicht offen dar, wir müssen desshalb die Pyramide berechnen. Hierzu genügt die Messung + P : + mP = 152° 25′; wir bilden daraus Z von + mP = 65° 37′ 25″ und nehmen aus

der Grundform den Hauptschnittswinkel $\sigma = 69^0\, 19'\, 26''$ in Rechnung. Alsdann ist:

$$\mathrm{tg}\,\nu = \mathrm{tg}\,Z \,.\, \sin\sigma.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \mathrm{tg}\,\nu = \log.\ \mathrm{tg}\ 65^0\, 37'\, 25'' &= 0{,}3437836 \\ +\ \log.\ \sin\ 69^0\, 19'\, 26'' &= 9{,}9710862 - 10 \\ \hline & \ 0{,}3148698 \\ \nu &= 64^0\ \ 9'\, 30''. \end{aligned}$$

Da $\beta = 68^0\, 14'\, 5''$, so folgt für $\mu = 47^0\, 36'\, 25''$.

Die Berechnung der Hauptaxe geschieht nach der Formel:

$$m = \frac{a \,.\, \sin\nu}{c \,.\, \sin\mu}.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \mathrm{num.}\ m = \log.\ \mathrm{num.}\ a &= 9{,}5767913 - 10 \\ +\ \log.\ \sin\ 64^0\ 9'\ 30'' &= 9{,}9542435 - 10 \\ \hline & \ 9{,}5310348 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\ \mathrm{num.}\ c &= 9{,}3620947 - 10 \qquad & 9{,}2304670 - 10 \\ +\ \log.\ \sin\ 47^0\ 36'\ 25'' &= 9{,}8683723 - 10 & \overline{0{,}3005678} \\ & \ \overline{9{,}2304670 - 10} & \mathrm{num.}\ m = 2. \end{aligned}$$

Die Pyramide w ist $= + 2P$.

5. Zur Bestimmung der letzten Gestalt, der Pyramide r, messen wir den Winkel der Flächen r : r′ im klinodiagonalen Hauptschnitt $= 160^0\, 40'$ und ziehen ferner in Betracht, dass die Gestalt mit $+ 2P$ die Winkel μ und ν gemeinsam hat. $+ 2P$ geht von $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b : c$, die Pyramide r erstreckt sich von $\frac{1}{2}a : yb : c$. Wir berechnen also nur die Veränderung der Orthodiagonale und haben dafür die Relation;

$$\mathrm{tg}\,\sigma = \mathrm{tg}\,X \,.\, \sin\nu = \frac{yb}{\frac{1}{2}a}.$$

$$y = \mathrm{tg}\,X \,.\, \sin\nu \,.\, \tfrac{1}{2}a.$$

$$\begin{aligned} \log.\ \mathrm{num.}\ y = \log.\ \mathrm{tg}\ 80^0\ 20' &= 0{,}7686976 \\ +\ \log.\ \sin\ 64^0\ 9'\ 30'' &= 9{,}9542435 - 10 \\ +\ \log.\ \mathrm{num.}\ \tfrac{1}{2} &= 9{,}6989700 - 10 \\ +\ \log.\ \mathrm{num.}\ a &= 9{,}5767913 - 10 \\ \hline & \ 9{,}9987024 - 10 \\ \mathrm{num.}\ y &= 0{,}997 = 1. \end{aligned}$$

Die Pyramide r ist daher vom Zeichen $\frac{1}{2}a : b : c = + 2P\bar{2}$.

Somit wäre die ganze Combination entwickelt. — Da über die krystallographischen Verhältnisse des Dibenzoylanisylhydroxylamin noch weiter nichts veröffentlicht ist, so benützen wir die Gelegenheit, um, anschliessend an die Berechnung des Axenverhältnisses und der Ableitungscoëfficienten der Gestalten, eine Zusammenstellung berechneter und gemessener Winkel zu geben, die einerseits die

Güte des Axenverhältnisses zu beurtheilen gestattet, andererseits als Beispiel für solche Zusammenstellungen und Berechnungen dienen möge.

Man hat zuerst nach Rechnung für:

	a : b : c = + P		½a : ½b : c = + 2P		½a : b : c = + $2P\bar{2}$.
X =	77° 26′ 0″	—	71° 14′ 0″	—	80° 21′ 30″.
Y =	75° 54′ 48″	—	50° 17′ 24″	—	48° 17′ 57″.
Z =	38° 2′ 25″	—	65° 39′ 56″	—	64° 35′ 33″.
μ =	75° 33′ 37″	—	47° 33′ 48″	—	47° 33′ 48″.
ν =	36° 12′ 18″	—	64° 12′ 7″	—	64° 12′ 7″.
σ =	69° 19′ 26″	—	69° 19′ 26″	—	79° 18′ 51″.
ϱ =	77° 2′ 12″	—	65° 16′ 45″	—	77° 2′ 12″.

Ferner ergeben:

		X		Y		Z
a : b : ∞c =	∞P	70° 41′ 6½″	—	19° 18′ 53½″	—	69° 31′ 0″.
2a : b : ∞c =	$\infty P\grave{2}$	54° 58′ 14″	—	35° 1′ 46″	—	72° 19′ 26″.
∞a : ½b : c =	$2P\breve{\infty}$	66° 51′ 0″	—	70° 3′ 55″	—	23° 9′ 0″.
∞a : ¼b : c =	$4P\breve{\infty}$	49° 27′ 54″	—	73° 37′ 53″	—	40° 32′ 6″.

Weiter hat man folgende Zusammenstellung berechneter und gemessener Winkel, bei der nach den einzelnen Gestalten geordnet ist. Manchmal ist es auch zweckmässig nach Zonen zu gruppiren.

			Berechnet		Gemessen
∞P	: ∞P	i. kl. Hauptschn.	141° 22′ 13″	—	141° 33′ ca.
„	: $\infty P\breve{\infty}$		109° 18′ 53½″	—	109° 20′.
„	: $\infty P\bar{\infty}$		160° 41′ 6½″	—	—
„	: oP	vorn	110° 29′ 0″	—	—
„	: $\infty P\grave{2}$		164° 17′ 7½″	—	—
„	: $2P\breve{\infty}$	vorn	116° 51′ 31″	—	117° 0′ ca.
$\infty P\grave{2}$	: $\infty P\grave{2}$	i. kl. Hauptschn.	109° 56′ 28″	—	—
„	: $\infty P\breve{\infty}$		125° 1′ 46″	—	125° 5′.
„	: $4P\breve{\infty}$	vorn	127° 8′ 37″	—	—
$2P\breve{\infty}$	: $2P\breve{\infty}$	i. kl. Hauptschn.	—	—	133° 42′—47′.
„	: $\infty P\breve{\infty}$		113° 9′ 0″	—	113° 12′.
„	: $4P\breve{\infty}$		162° 36′ 54″	—	162° 33′—45′.
$4P\breve{\infty}$	: $4P\breve{\infty}$	i. kl. Hauptschn.	98° 55′ 48″	—	99° 0′ ca.
„	: $\infty P\breve{\infty}$		130° 32′ 6″	—	130° 28′.
+P	: +P	i. kl. Hauptschn.	—	—	154° 52′.
„	: $\infty P\breve{\infty}$		102° 34′ 0″	—	102° 35′.
„	: $2P\breve{\infty}$		—	—	144° 4′—14′.

				Berechnet	—	Gemessen
+P	:	4P∞̀		137° 43′ 44″	—	137° 45′.
„	:	∞P	hinten	107° 33′ 25″	—	—
„	:	∞P2̀	hinten	108° 54′ 59″	—	—
„	:	+2P2̄		152° 23′ 4″	—	152° 22′.
„	:	+2P		152° 22′ 29″	—	152° 25′.
+2P	:	+2P	i. kl. Hauptschn.	142° 28′ 0″	—	142° 25′—30′.
„	:	∞P∞̀		108° 46′ 0″	—	108° 43′.
„	:	∞P	hinten	135° 10′ 56″	—	135° 7′.
„	:	∞P2̀	hinten	135° 3′ 32″	—	—
„	:	2P∞̀		120° 21′ 19″	—	120° 28′ ca.
„	:	4P∞̀		121° 29′ 2″	—	121° 27′.
+2P2̄	:	+2P2̄	i. kl. Hauptschn.	160° 43′ 0″	—	160° 40′.
„	:	∞P∞̀		99° 38′ 30″	—	99° 38′—41′.
„	:	∞P	hinten	133° 5′ 39″	—	132° 55′ ca.
„	:	+2P		170° 52′ 30″	—	170° 57′.
„	:	2P∞̀		117° 24′ 35″	—	117° 25′.

Von diesen Winkeln sind die Fundamentalwerthe:

+P : +P = 154° 52′.
2P∞̀ : 2P∞̀ = 133° 42′.
+P : 2P∞̀ = 144° 4′.

durch sorgfältige Messungen an e i n e m vollkommen gebildeten Krystall erhalten, die übrigen Messungen sind theils an eben demselben, theils an anderen Krystallen angestellt worden.

V. Klinorhomboidisches System.

1. Allgemeine Bemerkungen über Symmetrieverhältnisse, Axenwahl, Zonenverband und Winkelformel.

In diesem Systeme ist die höchste Unsymmetrie, welche überhaupt nur eintreten kann, erreicht: die Krystalle verhalten sich nach gar keiner Ebene mehr symmetrisch, was zur Folge hat, dass jede höhere Vereinigung ihrer Umgrenzungselemente unmöglich ist, so dass man eigentlich nur noch von Flächen und ihren parallelen Gegenflächen reden kann.

Wenn wir die Durchschnittslinien dreier beliebiger, nicht in einer Zone gelegenen Flächen zu Axen wählen, so wird das so entstehende Axensystem nicht nur drei ungleich grosse Axen, sondern auch drei schiefe Winkel der Axenebenen, und, von diesen in der Grösse verschieden, drei schiefe Winkel der Axen haben müssen.* Die Rechnungen werden in Folge dessen in diesem Systeme eine beträchtliche Erschwerung erfahren. Mehr als je wird nunmehr das Vorhandensein von Pinakoiden (Parallelflächen der Axenebenen) für die Berechnung des Systems und der Elemente desselben erwünscht sein, und man muss daher vor allen Dingen auf die passende Wahl dieser Axenebenen Bedacht nehmen.

Hierbei ist aber der Zonenverband der Gestalten zu berücksichtigen und in erster Linie bei der Entscheidung über die Stellung mit zu Rath zu ziehen. Man wird im Allgemeinen solche Flächen, die in reich entwickelten Zonen liegen, zu Axenebenen wählen, so dass die Mehrzahl der übrigen Flächen des Systems zu Hemiprismen oder Hemidomen, die Minderzahl zu Viertelpyramiden wird. — Ferner muss

* Von diesen letzteren Winkeln kann einer = 90⁰ werden, ohne dass dadurch der Charakter des Systems geändert, oder für die Zwecke der Praxis eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung gewonnen würde.

man, so viel als möglich, bestrebt sein, eine Aufstellung zu finden, bei der alle drei Pinakoide erscheinen, d. h. Flächen des betreffenden Krystalls denselben entsprechen. Geht dies nicht an, so wird man zuzusehen haben, dass mindestens zwei Pinakoide vorhanden sind und nur ungern blos eine oder gar keine Endfläche annehmen. — Ausserdem sind bei der Wahl der Grundform die Rücksichten auf einfache Axenschnitte der übrigen Gestalten und möglichst grossen Deductionszusammenhang derselben zu beachten.

Da man in den meisten Fällen durch keine anderen, als die eben genannten Rücksichten* bezüglich der Axenwahl und der Grundform gebunden ist, so wird man vorstehenden Erfordernissen, zum Zwecke der Vereinfachung von Darstellung und Rechnung, wohl nachzukommen in der Lage sein. Nur dann, wenn verwandte, in anderen Systemen krystallisirende Körper vorkommen, muss in erster Linie auf eine übereinstimmende Stellung, zum Zwecke der Erhaltung der Continuität der ganzen Reihe, Bedacht genommen werden; man hat sich alsdann nach diesem letzteren Erfordernisse, als dem obersten, zu richten und dem entsprechend zu verfahren. Es kommen dadurch die betreffenden Krystalle zuweilen in Stellungen, in welchen sie minder einfach dargestellt und berechnet werden können, als wenn man die genannte Rücksicht nicht zu nehmen gehabt hätte.

Allgemeine Zonenbetrachtungen haben, bei der völligen Auflösung der Gestalten der früheren Systeme in Flächen und Gegenflächen kein Interesse mehr; wir können jedoch, unter dem Vorbehalt der Geltendmachung dieser Auflösung, die Zonenbetrachtung des rhombischen Systems, vergl. p. 191, auf das klinorhomboidische übertragen, da die Bezeichnung der Axen mit der im rhombischen Systeme identisch ist.

In der Projection, die wie früher, zumeist auf die basische Endfläche ausgeführt wird, offenbart sich die eingetretene Unsymmetrie in der verschiedenen Entwickelung eines jeden Quadranten, von denen wir, wie beim klinorhombischen Systeme, den Quadranten hinten rechts als

* Wenn es sich mit den übrigen Erfordernissen vereinigen lässt, wählt man gern die Neigungen der Axenebenen nahe an 90° liegend.

Der Schrauf'sche Vorschlag (Phys. Mineralogie 1866, B. I. p. 179) jenen Winkel der Axen, der sich 90° am meisten nähert, in die Horizontalebene zu legen, dagegen den, der sich von 90° am weitesten entfernt, als den Winkel der vorderen zur verticalen Axe zu betrachten, ist sehr beachtenswerth und anzunehmen, wenn eine grössere Reihe von Beobachtungen nachweist, dass bei chemisch analog zusammengesetzten Körpern, die beispielsweise im rhombischen, monoklinen und triklinen Systeme krystallisiren, der Zusammenhang, namentlich auch der, welcher durch das Vorkommen entsprechender Begrenzungselemente bewirkt wird, erhalten bleibt. —

den positiven annehmen. Die Rechnungen mit der Projection sind, da für diesen, allgemeinsten Fall hergeleitet, hier, wie früher, zu führen.

Die Winkelformel lässt sich im vorliegenden Systeme auch transformiren, findet aber, ihres schwerfälligen Charakters wegen, kaum praktische Verwendung. Man rechnet nach den zu gebenden Anleitungen und im Allgemeinen mit sphärischer Trigonometrie.

2. Berechnung des Axenverhältnisses und der Axenschnitte der verschiedenen Flächen. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten.

1. Allgemeine Betrachtungen.

a. Bezeichnung der Flächen- und Kantenneigungen. Axenverhältniss.

Nehmen wir an, die Wahl der drei Pinakoide sei getroffen, so werden dieselben, parallel sich selbst in den Mittelpunkt gerückt, in ihren Schnitten die drei Axen, in ihren Neigungen zu einander die drei Winkel der Axenebenen abgeben, vergl. Fig. 155.

Man nennt die ungefähr von vorn nach hinten zu verlaufende Axe a,
die ungefähr von rechts nach links sich erstreckende b,
die von oben nach unten ziehende c.

Führt man eine Grundform ein, welche die Axe a in einem kleineren Abstand schneidet, als die Axe b, so kann man:

die Axe ă die Brachydiagonale,
die Axe b̄ die Makrodiagonale,
die Axe c̍ die Hauptaxe nennen.

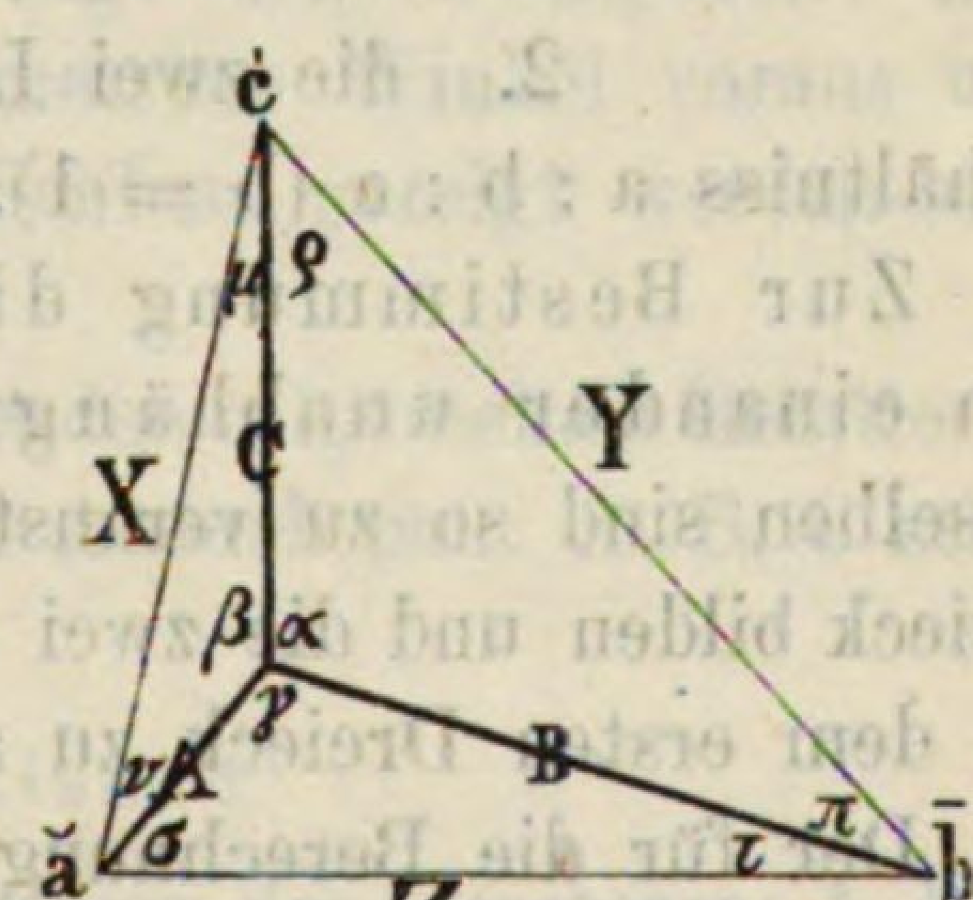


Fig. 155.

Ferner heisst die durch die Axen a und c gehende Ebene der brachydiagonale Hauptschnitt, die durch die Axen b und c gelegte Ebene der makrodiagonale Hauptschnitt und die die Axen a und b in sich schliessende Ebene der basische Hauptschnitt. Die Bezeichnung wäre also der im rhombischen Systeme entsprechend, man hat jedoch dabei nicht zu vergessen, dass im klinorhomboidischen Systeme die „Hauptschnitte" nur in übertragener Bedeutung eingeführt sind, da hier keiner derselben durch die Symmetrie des Systems bedingt, ihre Wahl vielmehr eine ganz willkürliche ist.

Was die in einem sphärischen Dreieck, dem Grunddreieck, sich befindenden Winkel der Axenebenen und der Axen betrifft, so heisst:

der Winkel der Axenebene ac gegen die Axenebene ab = A,
" " " " bc " " " ab = B,
" " " " ac " " " bc = C.

Ferner nennt man:

die Neigung der Axe b gegen die Axe c = α,
" " " " a " " " c = β,
" " " " a " " " b = γ.

Weiter bezeichnet man:

die Neigung einer Fläche gegen d. brachydiagonalen Hauptschnitt mit X,
" " " makrodiagonalen Hauptschnitt mit Y,
" " " basischen Hauptschnitt mit Z.

Die Neigungen X, Y, Z erhalten den Namen: Kantenwinkel.

Schliesslich heisst:

die Neigung von X zur Axe c = μ ; zur Axe a = ν.
" " Y " " c = ϱ ; " " b = π.
" " Z " " a = σ ; " " b = τ.

Die so bezeichneten, ebenen Winkel: μ, ν, ϱ, π, σ und τ sind die Hauptschnittswinkel.

Das klinorhomboidische oder trikline Axenverhältniss enthält fünf zu bestimmende Grössen, nämlich:

1. die drei Angulardimensionen α, β, γ.
2. die zwei Lineardimensionen a und c aus dem Axenverhältniss a : b : c (b = 1).

Zur Bestimmung dieser fünf Unbekannten sind fünf von einander unabhängige Winkelmessungen erforderlich. Dieselben sind so zu veranstalten, dass drei Winkel ein sphärisches Dreieck bilden und die zwei anderen eine solche Lage haben, dass man von dem ersten Dreieck zu anderen Dreiecken fortschreiten kann.

Der für die Berechnung günstigste Fall ist der, in dem alle drei Pinakoide vorhanden sind. Man kann alsdann A, B, C durch directe Messung erhalten und daraus durch Rechnung α, β, γ darstellen. Häufig kommen aber Fälle vor, in denen nur zwei, ja selbst nur ein Pinakoid vorhanden ist; die Winkel A, B, C müssen dann theilweise oder ganz berechnet werden.

Was in solchen Fällen die Ermittelung der immer durch Rechnung zu gewinnenden Axenwinkel: α, β, γ anlangt, so ist es zum Zwecke derselben nicht nöthig, erst sämmtliche Neigungen der Axenebenen: A, B, C zu kennen, vielmehr werden sich im Laufe der Rechnung leichter drei verschiedene Stücke, z. B. A, β, γ oder B, α, γ u. s. w.

ermitteln lassen, aus denen dann die übrigen, da sie mit ihnen in demselben sphärischen Dreieck liegen, folgen.

Allgemeine Andeutungen über den dabei zu befolgenden Gang der Rechnung lassen sich hier nicht geben, da dieselbe nicht nur nach der Verschiedenheit der zu berechnenden Combination eine verschiedene sein wird, sondern auch ganz wesentlich die Kenntniss des Zusammenhangs zwischen Axen, Axenwinkeln, Neigungswinkeln der Axenebenen, Kantenwinkeln und Hauptschnittswinkeln voraussetzt.

Wir werden daher, nach erbrachter Kenntniss dieses Zusammenhangs, und der Berechnung der einzelnen Glieder einer triklinen Combination, an Beispielen (Anorthit und Axinit) zeigen, wie das Axenverhältniss berechnet wird, wenn nur zwei Pinakoide vorhanden sind, oder deren nur eins gegeben ist. —

Der Fall, in dem gar kein Pinakoid vorkommt, wird sich nicht oft der Berechnung darbieten, da unter den Flächen einer triklinen Combination, sich doch wohl eine als Pinakoid wird deuten lassen. Freilich könnte man dagegen geltend machen, dass in einem denkbaren Falle und unter Verhältnissen, die Rücksichten auf eine conforme Stellung mit in anderen Systemen krystallisirenden Körpern fordern, es nicht angezeigt erscheinen möchte, z. B. eine Combination von vier Viertelpyramiden anders als trikline Pyramide zu deuten und sich dann fragen, ob, von dem Vorhandensein eines Pinakoides abgesehen, die Berechnung ausführbar wäre? Die Frage ist zu bejahen, ihre Beantwortung setzt ebenfalls nur fünf gemessene Winkel voraus und ist mit sphärischer Trigonometrie, wie am Schluss gezeigt werden soll, möglich.* —

Wir wollen bei den nunmehr aufzustellenden allgemeinen Relationen vor der Hand annehmen, die Neigungen der Axenebenen: A, B, C seien bekannt.

b. Allgemeine Relationen.

α. **Die Axenwinkel α, β, γ als Functionen der Neigungen der Axenebenen: A, B, C.**

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\,.\,\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin C\,.\,\sin B}}\,.$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\,.\,\cos\frac{1}{2}(B+A-C)}{\sin A\,.\,\sin C}}\,.$$

* Eine Lösung der Aufgabe mit sechs gemessenen Winkeln hat mit Hülfe grösserer mathematischer Kenntnisse der Schulrath Dr. J. H. Müller zu Wiesbaden in seiner Abhandlung: „Allgemeine Ableitung der krystallometrischen Grundgleichungen" gezeigt. Vergl. Abh. d. Wiener Academie. Math. Naturw.-Classe B. XII. p. 515.

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2\,(C+B-A)\,.\,\cos{}^1\!/_2\,(C+A-B)}{\sin A\,.\,\sin B}}.$$

Kommt, im Verlaufe der Rechnung, eine Combination von Winkeln A, B, C mit α, β, γ vor, so sind, drei bekannte Stücke vorausgesetzt, die fehlenden nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie zu finden.

β. Die Axenwinkel: α, β, γ als Functionen zugehöriger Hauptschnittswinkel.

Die Kenntniss dieser letzteren folgt nur aus Rechnung. Sie können nicht mehr, wie dies noch im klinorhombischen Systeme zum Theil der Fall war, durch Messung der Neigungen coordinirter Hemidomen gegen denselben Hauptschnitt ermittelt werden.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\varrho\,.\,\sin\varrho'}{\sin(\varrho-\varrho')} = \frac{2\sin\pi\,.\,\sin\pi'}{\sin(\pi-\pi')}.$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sin\mu\,.\,\sin\mu'}{\sin(\mu-\mu')} = \frac{2\sin\nu\,.\,\sin\nu'}{\sin(\nu-\nu')}.$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin\tau\,.\,\sin\tau'}{\sin(\tau-\tau')} = \frac{2\sin\sigma\,.\,\sin\sigma'}{\sin(\sigma-\sigma')}.$$

Unter Berücksichtigung, dass:

$$\alpha + \pi + \varrho = 180^0\ ;\ \beta + \mu + \nu = 180^0\ ;\ \gamma + \sigma + \tau = 180^0$$

braucht man, wenn ein zugehöriges Hauptschnittswinkelpaar, z. B. τ und τ' bekannt sind, nur γ zu rechnen und findet dann σ und σ'.

γ. Die Hauptschnittswinkel als Functionen der Neigungen der Axenebenen und der Neigungswinkel einer Fläche zu den Hauptschnitten (Kantenwinkel).

Man hat in den betreffenden sphärischen Dreiecken, deren Lage und Elemente aus Fig. 155 deutlich und ersichtlich sind:

1. $$\cos\frac{\mu}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2(Y+X-C)\,.\,\cos{}^1\!/_2(Y+C-X)}{\sin C\,.\,\sin X}}.$$

$$\cos\frac{\varrho}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2(X+Y-C)\,.\,\cos{}^1\!/_2(X+C-Y)}{\sin C\,.\,\sin Y}}.$$

2. $$\cos\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2(Z+X-A)\,.\,\cos{}^1\!/_2(Z+A-X)}{\sin A\,.\,\sin X}}.$$

$$\cos\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2(X+Z-A)\,.\,\cos{}^1\!/_2(X+A-Z)}{\sin A\,.\,\sin Z}}.$$

3. $$\cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2(Z+Y-B)\,.\,\cos{}^1\!/_2(Z+B-Y)}{\sin B\,.\,\sin Y}}.$$

$$\cos\frac{\tau}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1\!/_2(Y+Z-B)\,.\,\cos{}^1\!/_2(Y+B-Z)}{\sin B\,.\,\sin Z}}.$$

Man bedient sich dieser Formeln indessen nur zur Ermittelung je eines Hauptschnittswinkels, da ausserdem noch folgende Beziehungen bestehen:

$$\sin X : \sin Y = \sin\varrho : \sin\mu.$$
$$\sin Y : \sin Z = \sin\tau : \sin\pi.$$
$$\sin Z : \sin X = \sin\nu : \sin\sigma.$$

Man findet hiermit in den betreffenden Dreiecken die zweiten Hauptschnittswinkel, wenn die ersten gerechnet sind, also zu μ, π und σ die in denselben sphärischen Dreiecken liegenden: ϱ, τ und ν.

Aus obenstehenden Relationen folgt aber auch:

$$\sin\varrho \,.\, \sin\tau \,.\, \sin\nu = \sin\mu \,.\, \sin\pi \,.\, \sin\sigma,$$

eine Gleichung, die Verwendung zu Controlrechnungen finden kann.

δ. Die Hauptschnittswinkel als Functionen der Axen und der Axenneigungen (letztere als spitze Winkel betrachtet).

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a \,.\, \sin\beta}{c - a \,.\, \cos\beta}\;;\quad \operatorname{tg}\nu = \frac{c \,.\, \sin\beta}{a - c \,.\, \cos\beta}.$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{c - b \,.\, \cos\alpha}\;;\quad \operatorname{tg}\pi = \frac{c \,.\, \sin\alpha}{b - c \,.\, \cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{a \,.\, \sin\gamma}{b - a \,.\, \cos\gamma}\;;\quad \operatorname{tg}\sigma = \frac{b \,.\, \sin\gamma}{a - b \,.\, \cos\gamma}.$$

Diese Gleichungen wird man im gegebenen Falle in logarithmisch bequemer Weise auflösen und überdies mit Hülfe derselben nur immer einen Hauptschnittswinkel berechnen, da, unter Berücksichtigung des betreffenden Axenneigungswinkels, der andere zugehörige leicht zu finden ist.

ε. Die Kantenwinkel als Functionen der Hauptschnittswinkel und der Neigungswinkel der Axenebenen.

1. Gegeben C, ϱ und μ, gesucht X und Y.

$$\operatorname{tg}{}^1\!/_2(X + Y) = \operatorname{cotg}{}^1\!/_2 C \,.\, \frac{\cos{}^1\!/_2(\varrho - \mu)}{\cos{}^1\!/_2(\varrho + \mu)}.$$

$$\operatorname{tg}{}^1\!/_2(X - Y) = \operatorname{cotg}{}^1\!/_2 C \,.\, \frac{\sin{}^1\!/_2(\varrho - \mu)}{\sin{}^1\!/_2(\varrho + \mu)}.$$

2. Gegeben A, σ und ν, gesucht X und Z.

$$\operatorname{tg}{}^1\!/_2(X + Z) = \operatorname{cotg}{}^1\!/_2 A \,.\, \frac{\cos{}^1\!/_2(\sigma - \nu)}{\cos{}^1\!/_2(\sigma + \nu)}.$$

$$\operatorname{tg}{}^1\!/_2(X - Z) = \operatorname{cotg}{}^1\!/_2 A \,.\, \frac{\sin{}^1\!/_2(\sigma - \nu)}{\sin{}^1\!/_2(\sigma + \nu)}.$$

3. Gegeben B, τ und π, gesucht Y und Z.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(Y + Z) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B \cdot \frac{\cos \tfrac{1}{2}(\tau - \pi)}{\cos \tfrac{1}{2}(\tau + \pi)}.$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(Y - Z) = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B \cdot \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\tau - \pi)}{\sin \tfrac{1}{2}(\tau + \pi)}.$$

2. Berechnung des Axenverhältnisses und der Axenschnitte der einzelnen Flächen.

a. Berechnung des Axenverhältnisses bei pyramidaler Ausbildungsweise. Berechnung sämmtlicher Viertelpyramiden und Rückrechnung ihrer Hauptschnitts- und Kantenwinkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten.

Wir gehen von der Annahme aus A, B, C seien bekannt, entweder durch directe Messung oder durch Rechnung, ferner habe man α, β, γ ermittelt.

Alsdann sind, wenn an der betreffenden Combination sich zwei Pinakoide darbieten, zur Berechnung einer Viertelpyramide zwei sog. Kantenwinkel zu bestimmen, wobei zu bedenken ist, dass:

die Neigung von mPn : ∞P$\bar{\infty}$ = 180⁰ — X,
" " " mPn : ∞P$\breve{\infty}$ = 180⁰ — Y,
" " " mPn : oP = 180⁰ — Z ist.

Mit zwei bekannten Kantenwinkeln lassen sich aber zwei einer Axe anliegende Hauptschnittswinkel finden und damit wird, wie später gezeigt werden soll, das Axenverhältniss bestimmt, wenn die Viertelpyramide der Stammform angehörte; oder es werden die Axenschnitte ermittelt, wenn sie eine beliebige war.

Nicht immer sind indessen zwei Pinakoide vorhanden. Nehmen wir an, es sei nur ein Pinakoid, z. B. ∞P$\breve{\infty}$ gegeben, so wird aus der Messung der Neigung der Pyramidenfläche zu ∞P$\breve{\infty}$ Y folgen, und man wird bemüht sein müssen, zu diesem Kantenwinkel noch einen Hauptschnittswinkel durch Rechnung zu gewinnen. Zu diesem Behufe ist zuzusehen, ob man nicht an der Combination die Neigung der Combinationskante mPn : ∞P$\breve{\infty}$, entweder zu einer Kante aus der Zone der Hauptaxe, z. B. zur Combinationskante ∞P$\breve{\infty}$: ∞Pn, oder zu einer Kante aus der Zone der Makrodiagonale, z. B. zur Combinationskante ∞P$\breve{\infty}$: mP$\breve{\infty}$ berechnen kann. Die erstere Neigung würde 180⁰ — ϱ, die letztere 180⁰ — π liefern. Mit einer dieser Daten und Y wäre ein weiterer Hauptschnittswinkel in bekannter Weise zu berechnen und sodann, wie weiter unten gezeigt werden wird, zu verfahren.

Der Fall, in dem kein Pinakoid vorhanden ist, kann erst am Schluss des Systems erörtert werden. Bezüglich der Berechnung aus Combinationskanten zu anderen Flächen ist immer danach zu streben, die Neigungen der Pyramidenkanten zu Kanten aus den Zonen der Hauptaxe, Makro- und Brachydiagonale zu berechnen, da diese Neigungen die Hauptschnittswinkel in einfacher Weise finden lassen.

Welchen Weg man aber auch immer zur Berechnung eingeschlagen haben möge, stets muss das Ziel derselben die Erlangung zweier ungleichnamiger Hauptschnittswinkel sein, wodurch man unter Berücksichtigung von:

$$\alpha + \varrho + \pi = 180^0 \; ; \; \beta + \mu + \nu = 180^0 \; ; \; \gamma + \sigma + \tau = 180^0$$

die zur Berechnung des Axenverhältnisses erforderlichen Elemente erhält, vorausgesetzt, dass die berechnete Pyramide die Stammform war.

Man bestimmt alsdann das Verhältniss:

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} \; (\bar{b} = 1)$$

aus folgenden Relationen:

$$a : b = \sin\tau : \sin\sigma.$$
$$b : c = \sin\varrho : \sin\pi.$$
$$c : a = \sin\nu : \sin\mu.$$

Derselben Berechnung unterliegen alle $mP\breve{n}$ und $mP\bar{n}$; die gefundenen Axenschnitte sind aber noch mit dem Axenverhältniss der Stammform zu vergleichen, um m und n zu erhalten.

Geht man von der Stammform P aus, so liegen die mP in der Zone oP : ∞P. Mit der im Octanten v.r.o sich befindenden Viertelpyramide P′ haben alle mP in den Octanten: v.r.o; h.l.u; v.r.u und h.l.o gemeinsam die Winkel σ und τ. Für die mP in den übrigen Octanten kommen die Winkel σ' und τ' in Betracht.

Die Pyramiden $P\breve{n}$ gehören der Zone P : $P\breve{\infty}$ an. Mit P′ haben alle $P\breve{n}$ in den Octanten: v.r.o; h.l.u; h.r.o und v.l.u gemeinsam die Winkel ϱ und π. Für die $P\breve{n}$ in den übrigen Octanten kommen ϱ' und π' in Betracht.

Die Pyramiden $P\bar{n}$ gehören der Zone P : $P\bar{\infty}$ an. Mit P′ haben alle $P\bar{n}$ in den Octanten: v.r.o; h.l.u; v.l.o und h.r.u gemeinsam μ und ν; was die $P\bar{n}$ der übrigen Octanten betrifft, so kommen für sie μ' und ν' in Betracht.

Die Pyramiden $mP\breve{m}$ fallen in die Zone P : $\infty P\breve{\infty}$. Für sie gilt

das eben für die $P\bar{n}$ Erörterte. In den daselbst aufgeführten Octanten: v.r.o; h.l.u; v.l.o und h.r.u haben die $mP\breve{m}$ mit P′ die Winkel μ und ν gemeinsam; für die $mP\breve{m}$ der übrigen Octanten sind die Winkel μ' und ν' in Betracht zu ziehen.

Was schliesslich die Pyramiden $mP\bar{m}$ anlangt, so fallen sie in eine Zone von P : $\infty P\breve{\infty}$. Für sie gilt das soeben bezüglich der $P\breve{n}$ Mitgetheilte. Mit P′ haben die $mP\bar{m}$ in die Octanten v.r.o; h.l.u; h.r.o und v.l.u die Winkel ϱ und π gemeinsam. Für die in den anderen Octanten auftretenden $mP\bar{m}$ sind ϱ' und π' zu berücksichtigen.

In allen diesen Fällen ist nur ein Ableitungscoëfficient zu berechnen, was durch eine Winkelmessung, die ein zur Rechnung dienliches Element, z. B. einen Kantenwinkel ergibt, geschehen kann. Man findet dadurch einen weiteren Hauptschnittswinkel und gelangt in bekannter Weise zur Bestimmung des Axenschnitts, welcher dann noch mit dem der Stammform zu vergleichen ist, um den Ableitungscoëfficienten zu finden.

Sollen aus dem Zeichen der Pyramide deren Hauptschnitts- und Kantenwinkel gerechnet werden, so ist das Verfahren das folgende: man bestimmt zuerst aus den Axen und deren Neigungswinkeln die Hauptschnittswinkel, und ermittelt alsdann durch die Kenntniss der Hauptschnittswinkel und der Neigungswinkel der Axenebenen die Kantenwinkel. Dabei sind die Beziehungen zwischen Hauptschnittswinkeln und Neigungswinkeln der Axen zu beachten. Sind alle Hauptschnittswinkel berechnet, so findet man zwei Kantenwinkel durch die Napier'schen Analogien und den dritten durch den Sinussatz.

b. Berechnung des Axenverhältnisses bei hemiprismatischer Ausbildung. Berechnung sämmtlicher geneigter und verticaler Hemiprismen. Rückrechnung ihrer Kantenwinkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten.

Wir gehen bei diesen Berechnungen, wie bei denen der Viertelpyramiden, von der Annahme aus: A, B, C und α, β, γ seien bekannt.

α. **Berechnung der verticalen Hemiprismen.**

αα. **Die gemessene Kante sei der Axe des Hemiprisma's parallel.**

Nennt man in allen verticalen Hemiprismen, vergl. Fig. 156, die Neigung der Fläche gegen den brachydiagonalen Hauptschnitt X,
gegen den makrodiagonalen Hauptschnitt Y,
gegen den basischen Hauptschnitt Z

und bezeichnet man die Neigung von Z gegen a mit σ, gegen b mit τ, so ist vorab:

$$X + Y + C = 180^0.$$

Ferner hat man:

$$a : b = \sin Y . \sin \alpha : \sin X . \sin \beta,$$

woraus, da b = 1:

$$a = \frac{\sin Y . \sin \alpha}{\sin X . \sin \beta} \text{ folgt.}$$

Für alle $\infty\breve{P}n = na : b : \infty c$ gilt:

$$na : b = \sin Y . \sin \alpha : \sin X . \sin \beta,$$

woraus sich: $$n = \frac{\sin Y . \sin \alpha}{a . \sin X . \sin \beta} \text{ ergibt.}$$

Für alle $\infty\bar{P}n = a : nb : \infty c$ hat man:

$$a : nb = \sin Y . \sin \alpha : \sin X . \sin \beta,$$

woraus man: $$n = \frac{a . \sin X . \sin \beta}{\sin Y . \sin \alpha} \text{ findet.}$$

$\beta\beta$. Die gemessene Kante sei der Axe des Hemiprisma's nicht parallel.

1. Gegeben Z, A und β.

$$\sin \varphi = \frac{\sin A . \sin \beta}{\sin Z}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \sigma = \operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \beta) . \frac{\sin {}^1/_2 (A + Z)}{\sin {}^1/_2 (A - Z)}.$$

2. Gegeben Z, B und α.

$$\sin \varphi' = \frac{\sin B . \sin \alpha}{\sin Z}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \tau = \operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi' - \alpha) . \frac{\sin {}^1/_2 (B + Z)}{\sin {}^1/_2 (B - Z)}.$$

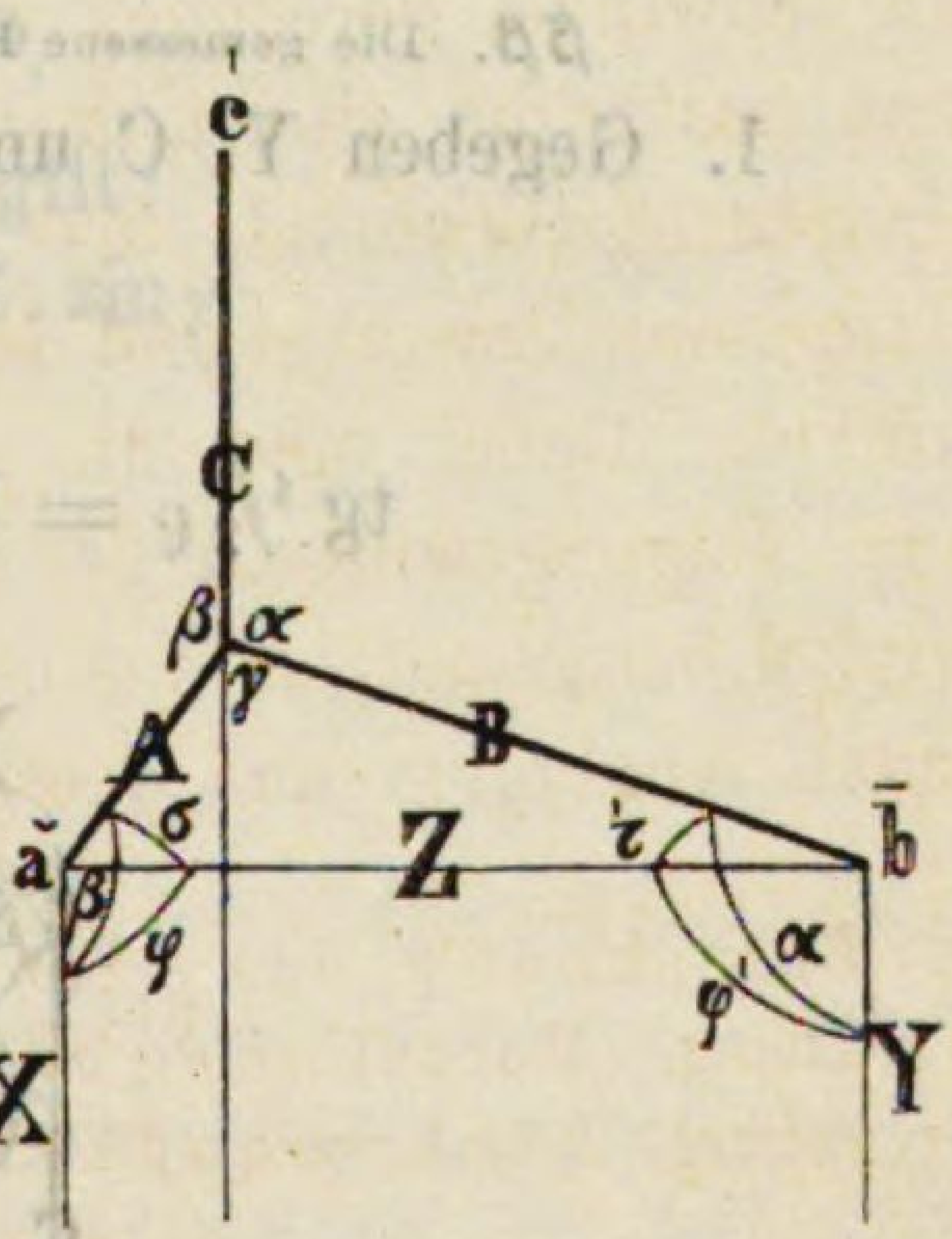


Fig. 156.

Mit der Kenntniss von σ oder τ ist, da γ bekannt, τ oder σ zu finden, und es gilt dann, zunächst für das Stammprisma:

$$a : b = \sin \tau : \sin \sigma,$$

eine Proportion, der sich leicht die nöthige Allgemeinheit geben lässt, um auch aus ihr die Ableitungscoëfficienten der Prismen $\infty\breve{P}n$ und $\infty\bar{P}n$ zu finden.

Die in Fig. 156 eingezeichneten sphärischen Dreiecke zeigen auch den Weg zur Berechnung von X, Y, Z an. Es ist zuerst aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten des betreffenden Prisma's σ oder τ zu rechnen, worauf alsdann, z. B. aus dem an $\breve{a}$ anliegenden

Dreieck, mit A, β und σ die Stücke X und Z zu ermitteln sind. Y findet man schliesslich durch: $X + Y + C = 180^0$.

β. Berechnung der brachydiagonalen Hemidomen.

$\alpha\alpha$. Die gemessene Kante sei der Axe des Hemidoma's parallel.

Man bezeichnet in allen Brachydomen, vergl. Fig. 157 die Neigung der Fläche gegen den brachydiagonalen Hauptschnitt mit X,
gegen den makrodiagonalen Hauptschnitt mit Y,
gegen den basischen Hauptschnitt mit Z.

Ferner nennt man die Neigung von Y gegen die Axe $c = \varrho$, die gegen die Axe $b = \pi$ und hat weiter:

$$X + Z + A = 180^0.$$

Zur Bestimmung des Axenverhältnisses gilt:

$$b : c = \sin X . \sin \beta : \sin Z . \sin \gamma.$$

$$c = \frac{\sin Z . \sin \gamma}{\sin X . \sin \beta}.$$

Für alle mP$\breve{\infty}$ hat man:

$$b : mc = \sin X . \sin \beta : \sin Z . \sin \gamma.$$

$$m = \frac{\sin Z . \sin \gamma}{c . \sin X . \sin \beta}.$$

$\beta\beta$. Die gemessene Kante sei der Axe des Hemidoma's nicht parallel.

1. Gegeben Y, C und β.

$$\sin \varphi = \frac{\sin C . \sin \beta}{\sin Y}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \varrho = \operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi - \beta) \frac{\sin {}^1/_2 (C + Y)}{\sin {}^1/_2 (C - Y)}.$$

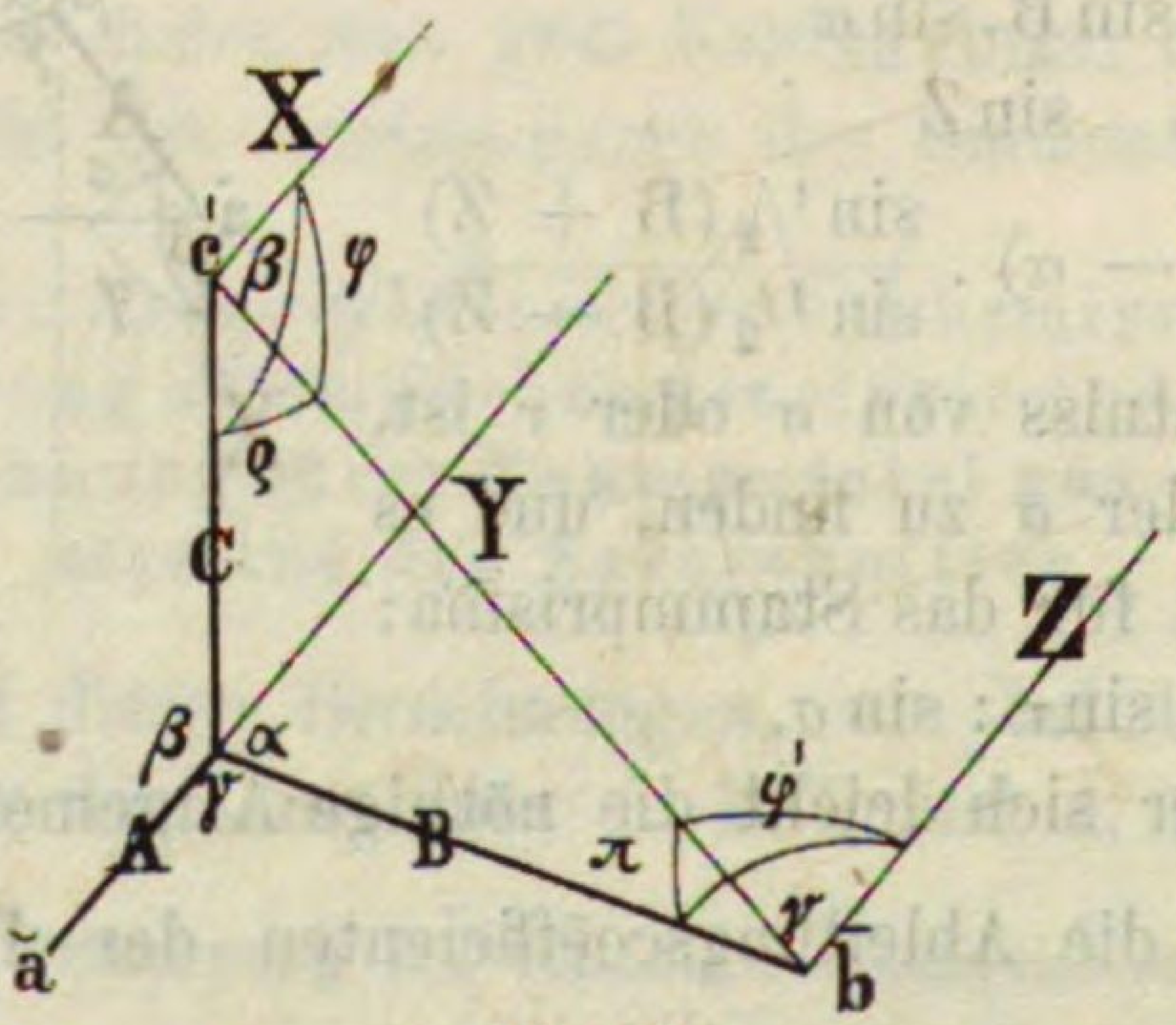


Fig. 157.

2. Gegeben Y, B und γ.

$$\sin \varphi' = \frac{\sin B . \sin \gamma}{\sin Y}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 \pi = \operatorname{tg} {}^1/_2 (\varphi' - \gamma) \frac{\sin {}^1/_2 (B + Y)}{\sin {}^1/_2 (B - Y)}.$$

Mit der Kenntniss von ϱ oder π findet man, da α gegeben ist, auch π oder ϱ und hat, zunächst für das Stammdoma:

$$b : c = \sin\varrho : \sin\pi.$$

Diese Proportion lässt sich leicht verallgemeinern und aus ihr können dann die Ableitungscoëfficienten aller mP$\bar{\infty}$ berechnet werden.

Zur Berechnung von X, Y, Z hat man erst ϱ oder π darzustellen und dann aus einem der in Fig. 157 eingezeichneten Dreiecke, z. B. aus dem an c anliegenden, zwei Winkel, hier X und Y, mit den gegebenen Stücken C, β, ϱ zu rechnen. Z findet sich schliesslich durch:

$$X + Z + A = 180^0.$$

γ. Berechnung der makrodiagonalen Hemidomen.

$\alpha\alpha$. Die gemessene Kante sei der Axe des Hemidoma's parallel.

In allen Makrodomen, vergl. Fig. 158, bezeichnet man die Neigung der Fläche gegen den brachydiagonalen Hauptschnitt mit X,
gegen den makrodiagonalen Hauptschnitt mit Y,
gegen den basischen Hauptschnitt mit Z.

Ferner nennt man die Neigung von X gegen die Axe c = μ, gegen die Axe a = ν und hat weiter:

$$Y + Z + B = 180^0.$$

Zur Berechnung des Axenverhältnisses gilt:

$$a : c = \sin Y . \sin\alpha : \sin Z . \sin\gamma.$$

$$c = \frac{a . \sin Z . \sin\gamma}{\sin Y . \sin\alpha}.$$

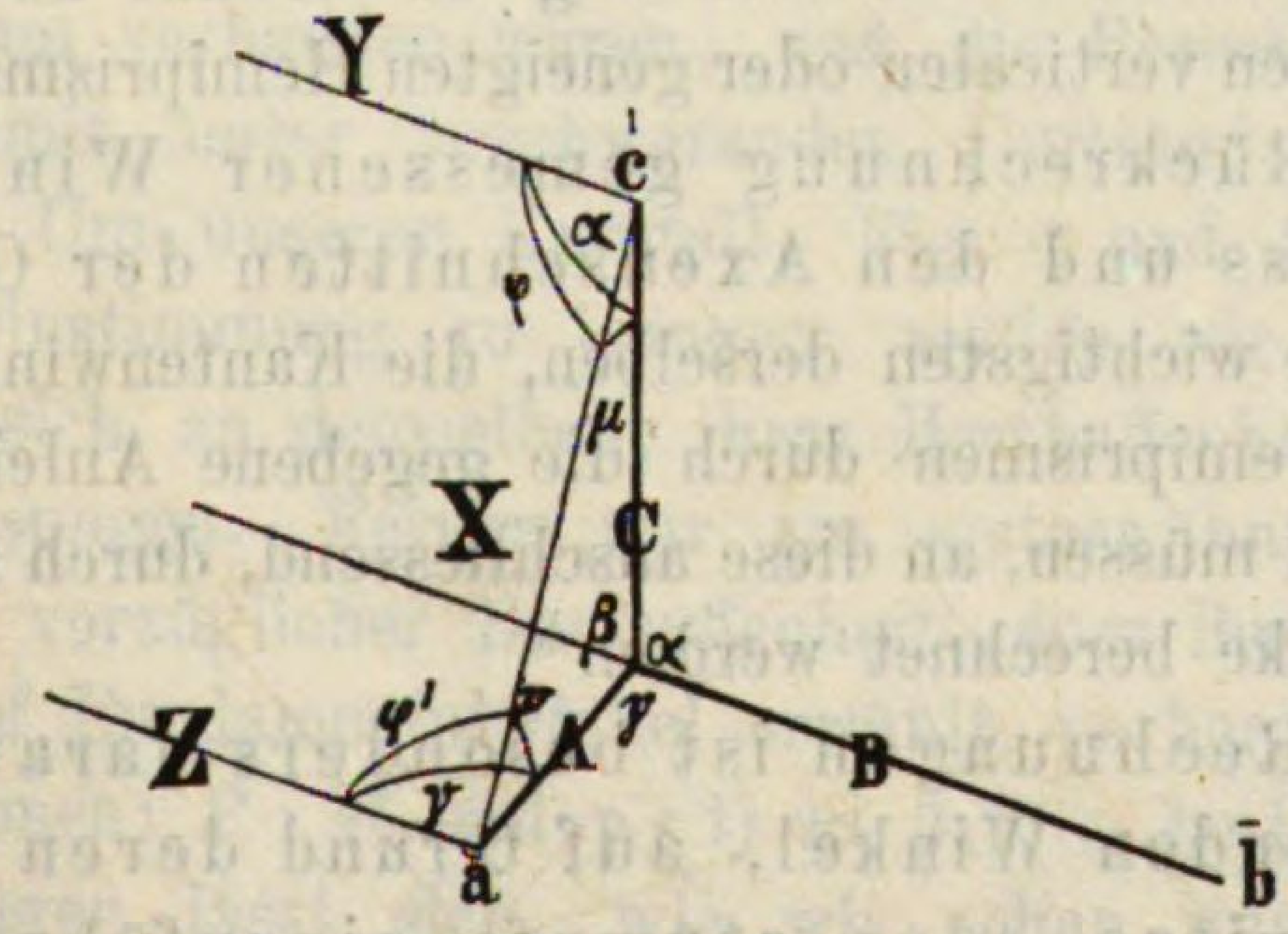


Fig. 158.

Für alle mP$\bar{\infty}$ hat man:

$$a : mc = \sin Y . \sin\alpha : \sin Z . \sin\gamma.$$

$$m = \frac{a . \sin Z . \sin\gamma}{c . \sin Y . \sin\alpha}.$$

$\beta\beta$. Die gemessene Kante sei der Axe des Hemidoma's nicht parallel.

1. Gegeben X, C und α.

$$\sin\varphi = \frac{\sin C \cdot \sin\alpha}{\sin X}.$$

$$\operatorname{tg}{}^1/_2\mu = \operatorname{tg}{}^1/_2(\varphi - \alpha) \cdot \frac{\sin{}^1/_2(C + X)}{\sin{}^1/_2(C - X)}.$$

2. Gegeben X, A und γ.

$$\sin\varphi' = \frac{\sin A \cdot \sin\gamma}{\sin X}.$$

$$\operatorname{tg}{}^1/_2\nu = \operatorname{tg}{}^1/_2(\varphi' - \gamma) \cdot \frac{\sin{}^1/_2(A + X)}{\sin{}^1/_2(A - X)}.$$

Mit der Kenntniss von μ oder ν ist, da β bekannt, auch ν oder μ gegeben; man hat alsdann:

$$a : c = \sin\mu : \sin\nu.$$

Eine Verallgemeinerung dieser Proportion gestattet die Ermittelung der Ableitungscoëfficienten aller $mP\bar{\infty}$.

Um X, Y, Z zu berechnen, ist zuerst μ oder ν darzustellen, alsdann müssen aus einem der in Fig. 158 eingezeichneten Dreiecke, z. B. aus dem an c anliegenden, zwei Winkel, hier X und Y, mit den gegebenen Elementen C, α und μ berechnet werden. Z findet sich endlich durch $Y + Z + B = 180^0$.

Ueberblickt man die vorstehenden Rechnungen, so sieht man, dass die unter $\alpha\alpha$. erwähnten die einfacheren sind, man wird also stets danach zu streben haben, bei allen verticalen oder geneigten Hemiprismen solche Kanten der Berechnung zu Grunde zu legen, die der Axe des betreffenden verticalen oder geneigten Hemiprisma's parallel sind.

Was die Rückrechnung gemessener Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten anlangt, so sind die wichtigsten derselben, die Kantenwinkel der Viertelpyramiden und Hemiprismen durch die gegebene Anleitung zu ermitteln. Die übrigen müssen, an diese anschliessend, durch schiefwinkelige, sphärische Dreiecke berechnet werden.*

Bei allen Rechnungen ist besonders darauf zu achten, ob die betreffenden Winkel, auf Grund deren jene geführt werden, als spitze oder stumpfe einzuführen sind. Es hängen davon in bekannter Weise die Vorzeichen der Functionen und damit das Gesammtresultat ab.

* Den Gang der Rechnung kann man dabei entweder am Krystall, oder in einer Projection verfolgen. Man wolle wegen letzterer Rechnungsweise das Beispiel am Schluss vergleichen.

3. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

a. Anorthit vom Vesuv.*

Ueber die Stellung des auf Tafel VIII. in Fig. 4 und 4[a] abgebildeten Krystalls kann kein Zweifel sein, dieselbe muss der des monoklinen Feldspaths entsprechend angenommen werden. Man lässt dabei hier, wie auch bei den übrigen triklinen Feldspathen, die doppelt schief aufgesetzte Basis, P, nicht nur nach vorn, sondern auch nach rechts abfallen.

Nehmen wir P = oP, M = ∞P∞̆, h = ∞P∞̄, T = ∞′P, l = ∞P′, o = P,, p = ,P an, so bestimmen sich die übrigen Gestalten, wie folgt:

,P,∞̄ ,	n,P,∞̄ (n < 1) ,	m,P,∞̄ (m > 1) ,	m′P′∞̄ ,	zwei m,P′∞̆ ,	
x ,	q ,	y ,	t ,	e und r ,	
drei m′P,∞̆ ,	mP, (m > 1) ,	m,P (m > 1) ,	m′P ,	mP′ ,	
k, n und c ,	u ,	g ,	a ,	m ,	
zwei mP,n̆ ,	mP,n̄ ,	m,Pn̆ ,	zwei m,Pn̄ ,	m′Pn̆ ,	mP′n̆ .
π und v ,	i ,	w ,	s und μ ,	b ,	β .

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses schreitend, gehen wir von folgenden fünf Fundamentalmessungen aus, die der Verfasser an einem vorzüglichen Krystall vom Vesuv anzustellen in der Lage war. Der betreffende Krystall entbehrte der Flächen h, so dass nur zwei Pinakoide an ihm vorhanden waren, und die Berechnung des Axenverhältnisses somit unter erschwerenden Umständen vorgenommen werden musste. Um unseren Krystall, Fig. 4 und 4[a], der h zeigt, damit in Uebereinstimmung zu bringen, wollen wir annehmen, die Fläche h eigne sich an demselben, ihrer Beschaffenheit wegen, nicht zu genauen Messungen. Ferner war am ersterwähnten Krystall die Fläche e von so vorzüglicher Beschaffenheit, dass ihre Neigung zu P als einer der fünf Fundamentalwinkel erwählt, vorher aber e aus dem Zonenverband (Zonen: P : M und p : l) zu 2,P′∞̆ bestimmt wurde. — Aus den Messungen lässt sich, wie wir sehen werden, ein Axenverhältniss berechnen, das mit dem, welches Kokscharow** aus den Daten Marignac's hergeleitet hat, auf das Beste übereinstimmt.

* Vergleiche G. vom Rath. Pogg. Annalen B. CXLVII, Tafel II, Figur 7 und 23.

** Materialien z. Min. Russl. B. IV. p. 200 u. f.

Die fünf Fundamentalwerthe sind:

1. $oP : \infty P'\breve{\infty}$	$= 94^0\ 10'$	; ergibt A i. Octanten v.r.o		$= 94^0\ 10'$.
2. $\infty P' : \infty P'\breve{\infty}$	$= 121^0\ 56'$	; „ X von $\infty P'$		$= 58^0\ 4'$.
3. $\infty P' : \infty' P$	$= 120^0\ 31'$	; „ X von $\infty' P$		$= 62^0\ 27'$.
4. $oP : \infty P'$	$= 114^0\ 7'$	; „ Z von $\infty P'$		$= 65^0\ 53'$.
5. $oP : 2{,}P'\breve{\infty}$	$= 137^0\ 21^1/_2'$	; „ Z von $2{,}P'\breve{\infty}$		$= 42^0\ 38^1/_2'$.

In dem von oP, $\infty P'$ und $\infty' P$ gebildeten Dreikant kann man nun unter Berücksichtigung des brachydiagonalen Hauptschnitts ein Dreieck, Fig. 159, legen, das folgende Stücke enthält:

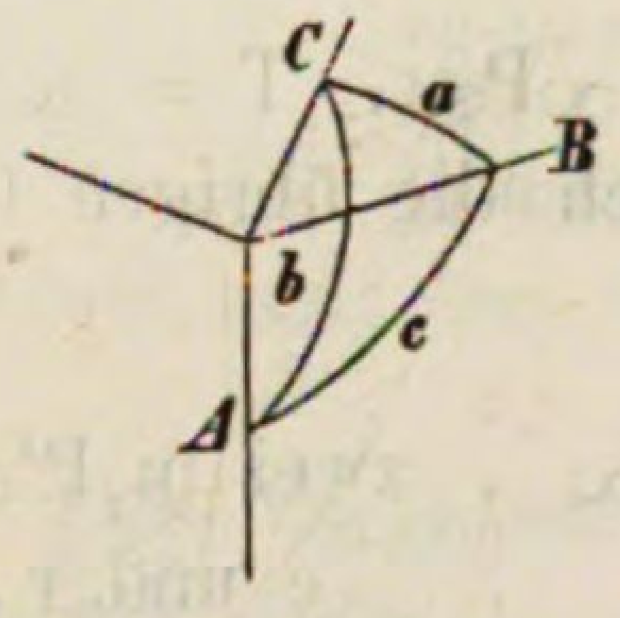


Fig. 159.

$A = 58^0\ 4' =$ X von $\infty P'$.
$B = 114^0\ 7' =$ Neig. von $oP : \infty P'$.
$C = 85^0\ 50' =$ Neig. von oP zur Axenebene a c über d. Oct. v.r.o.

Wir suchen in diesem Dreieck zuerst b, d. h. die Neigung der Kante $\infty' P : \infty P'$, welche die Parallele der Hauptaxe darstellt, zur, durch den brachydiagonalen Hauptschnitt hervorgerufenen Projection der Brachydiagonale auf oP, mit anderen Worten: die Neigung der Hauptaxe zur Brachydiagonale, den Axenwinkel β.

Man hat: $\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2 (B + C - A) \cdot \cos {}^1/_2 (B + A - C)}{\sin A \cdot \sin C}}$.

$\frac{B + C - A}{2} = 43^0\ 10'\ 30''$; $\frac{B + A - C}{2} = 70^0\ 56'\ 30''$.

$$\begin{aligned} \log. \cos \tfrac{b}{2} &= \log. \cos 43^0\ 10'\ 30'' = 9{,}8628867 - 10 \\ &\quad + \log. \cos 70^0\ 56'\ 30'' = 9{,}5139239 - 10 \\ &\qquad\qquad 9{,}3768106 - 10 \\ &\qquad\qquad 9{,}9275864 - 10 \\ &\qquad\qquad 19{,}4492242 - 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log. \sin 58^0\ 4' &= 9{,}9287358 - 10 \\ + \log. \sin 85^0\ 50' &= 9{,}9988506 - 10 \\ &\quad 9{,}9275864 - 10 \end{aligned}$$

Daraus $\sqrt{\ } = 9{,}7246121 - 10$

$b = 115^0\ 56'$.

Dieser Winkel behält für den Octanten v.r.o seine Grösse bei; β ist also $= 115^0\ 56'$ im Octanten v.r.o.

In demselben Dreieck rechnen wir ferner die Neigung der Kante Z von $\infty P'$ gegen die Projection der Axe a, d. h. die Seite a = dem Hauptschnittswinkel σ.

Man hat: $\sin a = \frac{\sin A \cdot \sin b}{\sin B}$ und es ist, da $\sin B > \sin A$, a mit A gleichartig zu nehmen.

$$\begin{array}{rl}
\log.\ \sin a = \log.\ \sin 58^0\,4' = & 9{,}9287358 - 10 \\
+ \log.\ \sin 64^0\,4' = & 9{,}9539063 - 10 \\ \hline
 & 9{,}8826421 - 10 \\
- \log.\ \sin 65^0\,53' = & 9{,}9603354 - 10 \\ \hline
 & 9{,}9223067 - 10 \\
 & a = \sigma = 56^0\,44'\,25''.
\end{array}$$

Um zu diesem Hauptschnittswinkel σ noch σ' zu finden, aus deren beider Kenntniss dann γ folgen würde, gehen wir in ein anderes Dreieck ein, Fig. 160, welches in Fig. 159 auf der linken Seite des brachydiagonalen Hauptschnitts anzulegen wäre. In demselben sind bekannt:

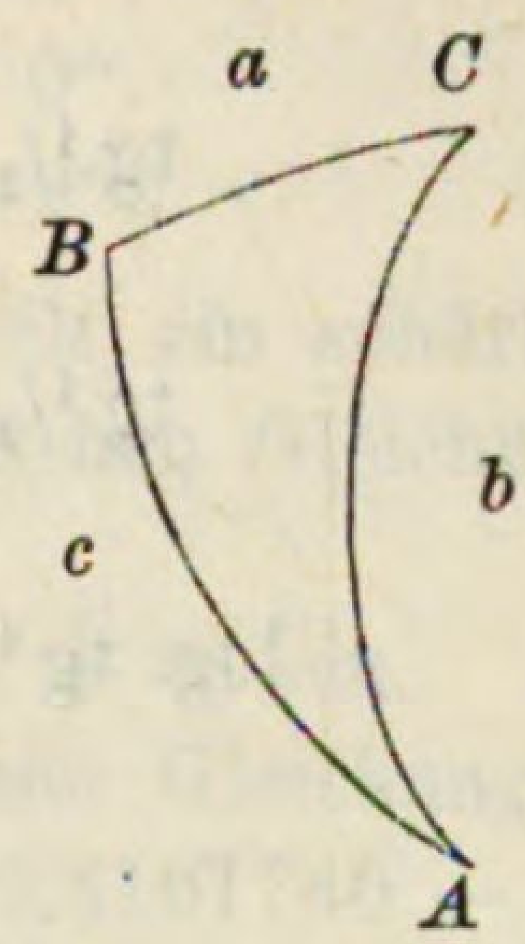


Fig. 160.

$A = \ 62^0\,27' =$ X von ∞'P.

$b = 115^0\,56' = \beta$. in d. Oct. v.r.o ; v.l.o.

$C = \ 94^0\,10' =$ Neig. von oP zur Axenebene ac über dem Octanten v.l.o.

Man hat: $\operatorname{cotg} a = \dfrac{\operatorname{cotg} b . \sin(C + \varphi)}{\sin\varphi}$

mit $\operatorname{tg}\varphi = \cos b . \operatorname{tg} A$.

$$\begin{array}{rl}
\log.\ \operatorname{tg}\varphi = \log.\ \cos 64^0\,4' = & N.\ 9{,}6408044 - 10 \\
+ \log.\ \operatorname{tg} 62^0\,27' = & 0{,}2825986 \\ \hline
 & N.\ 9{,}9234030 - 10 \\
 & \varphi = 140^0\,1'\,36''. \\
\log.\ \operatorname{cotg} a = \log.\ \operatorname{cotg} 64^0\,4' = & N.\ 9{,}6868981 - 10 \\
+ \log.\ \sin(-54^0\,11'\,36'') = & N.\ 9{,}9090186 - 10 \\ \hline
 & P.\ 9{,}5959167 - 10 \\
- \log.\ \sin 39^0\,58'\,24'' = & 9{,}8078265 - 10 \\ \hline
 & 9{,}7880902 - 10 \\
 & a = \sigma' = 58^0\,27'\,17''.
\end{array}$$

Hiermit berechnet man nach:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin\sigma . \sin\sigma'}{\sin(\sigma - \sigma')}$$

den Winkel der Axen a und b im Octanten v.r.o.

$$\begin{array}{rl}
\log.\ \operatorname{tg}\gamma = \log.\ \text{num.}\ 2 = & 0{,}3010300 \\
+ \log.\ \sin 56^0\,44'\,25'' = & 9{,}9223067 - 10 \\
+ \log.\ \sin 58^0\,27'\,17'' = & 9{,}9305553 - 10 \\ \hline
 & 0{,}1538920 \\
- \log.\ \sin(-1^0\,42'\,52'') = & N.\ 8{,}4759359 - 10 \\ \hline
 & N.\ 1{,}6779561 \\
 & \gamma = 91^0\,12'\,9''.
\end{array}$$

Nunmehr sind die übrigen Stücke des Grunddreiecks: B, C und α leicht zu finden. Man hat in demselben, Fig. 161, für den Octanten v.r.o:

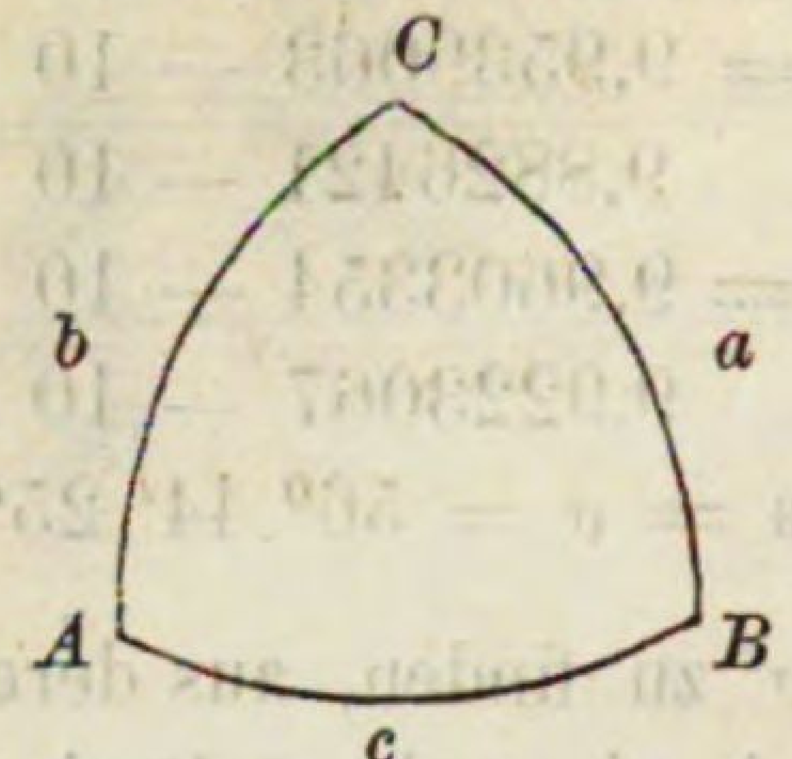


Fig. 161.

$$A = 94^0\,10' = A.$$
$$b = 115^0\,56' = \beta.$$
$$c = 91^0\,12'\,9'' = \gamma.$$

Somit ergeben sich B und C zugleich durch:

$$\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(B + C) = \mathrm{cotg}\,{}^1\!/_2 A \, . \, \frac{\cos {}^1\!/_2(b - c)}{\cos {}^1\!/_2(b + c)} \, .$$

$$\mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(B - C) = \mathrm{cotg}\,{}^1\!/_2 A \, . \, \frac{\sin {}^1\!/_2(b - c)}{\sin {}^1\!/_2(b + c)} \, .$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(B + C) = \log.\ \mathrm{cotg}\ 47^0\,5' &= 9{,}9683893 - 10\\
+ \log.\ \cos 12^0\,21'\,55{}^1\!/_2'' &= 9{,}9898064 - 10\\
&\ 9{,}9581957 - 10\\
- \log.\ \cos 76^0\,25'\,55{}^1\!/_2'' &= \mathrm{N.}\ 9{,}3703239 - 10\\
&\ \mathrm{N.}\ 0{,}5878718\\
{}^1\!/_2(B + C) &= 104^0\,28'\,59''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg}\,{}^1\!/_2(B - C) = \log.\ \mathrm{cotg}\ 47^0\,5' &= 9{,}9683893 - 10\\
+ \log.\ \sin 12^0\,21'\,55{}^1\!/_2'' &= 9{,}3307095 - 10\\
&\ 9{,}2990988 - 10\\
- \log.\ \sin 76^0\,25'\,55{}^1\!/_2'' &= 9{,}9877076 - 10\\
&\ 9{,}3113912 - 10\\
{}^1\!/_2(B - C) &= 11^0\,34'\,33''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^1\!/_2(B + C) &= 104^0\,28'\,59''\\
{}^1\!/_2(B - C) &= 11^0\,34'\,33''\\
B &= 116^0\,3'\,32''\\
C &= 92^0\,54'\,26''
\end{aligned}\Bigg\}\ \text{im Octanten v.r.o.}$$

Das letzte Stück $a = \alpha$ findet sich schliesslich durch:

$$\sin a = \frac{\sin A \, . \, \sin c}{\sin C},$$

und es besteht bei Anwendung dieses Satzes keine Zweideutigkeit bezüglich der Wahl von a, da $\sin C > \sin A$ und somit a mit A gleichartig zu nehmen ist. Ueberdies fordert auch die Bedingung, nach der $a + c$ mit $A + C$ gleichartig sein muss, a als stumpfen Winkel zu betrachten.

$$\begin{array}{rl} \log.\sin a = \log.\sin 85^0\,50' = & 9{,}9988506 - 10 \\ + \log.\sin 88^0\,47'\,51'' = & 9{,}9999043 - 10 \\ \hline & 9{,}9987549 - 10 \\ - \log.\sin 87^0\,5'\,34'' = & 9{,}9994407 - 10 \\ \hline & 9{,}9993142 - 10 \\ & a = \alpha = 93^0\,13'\,8''. \end{array}$$

Der Anorthit ist also im Octanten v.r.o durch folgende Grundangulardimensionen charakterisirt:

$$\begin{array}{ll} A = 94^0\,10'\,0'' & ;\ \alpha = 93^0\,13'\,8''. \\ B = 116^0\,3'\,32'' & ;\ \beta = 115^0\,56'\,0''. \\ C = 92^0\,54'\,26'' & ;\ \gamma = 91^0\,12'\,9''. \end{array}$$

Um zu prüfen, ob diese sechs Winkel wirklich ein sphärisches Dreieck bilden, setzen wir sie in eine der GAUSS'schen Gleichungen, z. B. in:

$$\cos {}^1/_2 (A + B) . \cos {}^1/_2 c = \sin {}^1/_2 C . \cos {}^1/_2 (a + b) \text{ ein.}$$

Wir erhalten alsdann für den linken Theil dieser Gleichung:

$$\begin{array}{rl} \log.\cos 105^0\,6'\,46'' = & N.\ 9{,}4161740 - 10 \\ + \log.\cos 45^0\,36'\,4^1/_2{}'' = & 9{,}8448794 - 10 \\ \hline & N.\ 9{,}2610534 - 10 \end{array}$$

und für den rechten Theil:

$$\begin{array}{rl} \log.\sin 46^0\,27'\,13'' = & 9{,}8602283 - 10 \\ + \log.\cos 104^0\,34'\,34'' = & N.\ 9{,}4008243 - 10 \\ \hline & N.\ 9{,}2610526 - 10 \end{array}$$

Das Erforderniss ist also fast absolut erfüllt.

Zur Berechnung des Axenverhältnisses haben wir zunächst zu berücksichtigen, dass wir im Octanten v.r.o kennen: $\sigma = 56^0\,44'\,25''$; $\gamma = 91^0\,12'\,9''$, also auch $\tau = 32^0\,3'\,26''$. Wir können somit setzen:

$$a : b = \sin\tau : \sin\sigma.$$

$$\begin{array}{rl} \log.\text{num}.\,a = \log.\sin 32^0\,3'\,26'' = & 9{,}7249031 - 10 \\ - \log.\sin 56^0\,44'\,25'' = & 9{,}9223067 - 10 \\ \hline & 9{,}8025964 - 10 \\ & \text{num}.\,\check{a} = 0{,}634741. \end{array}$$

Um c zu berechnen, müssen wir die Messung oP : 2,P'$\bar{\infty}$ = 137° 21′ 30″, woraus Z von 2,P'$\bar{\infty}$ = 42° 38′ 30″ folgt, heranziehen. Da für den Octanten v.r.o A = 94° 10′ ist, so bleibt für X von 2,P'$\bar{\infty}$ der Werth 43° 11′ 30″ übrig.

Zur Berechnung dient:

$$c = \frac{\sin Z . \sin\gamma}{2 . \sin X . \sin\beta}.$$

log. num. c = log. sin 42° 38′ 30″ = 9,8308523 — 10
+ log. sin 88° 47′ 51″ = 9,9999043 — 10
9,8307566 — 10
0,0902724
9,7404842 — 10
num. $\acute{c}$ = 0,550154.

log. num. 2 = 0,3010300
+ log. sin 43° 11′ 30″ = 9,8353361 — 10
+ log. sin 64° 4′ = 9,9539063 — 10
0,0902724

Das Axenverhältniss lautet demnach:

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}634741 : 1 : 0{,}550154.$$

Vergleicht man dasselbe und die Grundangulardimensionen mit den Angaben Kokscharow's (l. c. p. 200), in denen übrigens die Brachydiagonale = 1 gesetzt ist, so ergibt sich eine sehr befriedigende Uebereinstimmung. Indem wir unserem Axenverhältniss selbstverständlich keinen grösseren Werth beilegen, als dem dort gegebenen, dies letztere vielmehr als allen thatsächlichen Verhältnissen vollkommen gerecht werdend anerkennen und für den Anorthit annehmen, wollten wir nur durch die von uns gemessenen Winkel und daraus berechneten Dimensionen einen weiteren Beitrag zur Erkenntniss des Grades der Genauigkeit liefern, mit der einzelne Krystalle gebildet sein können. —

2. Was die Ableitung der Axenschnitte der übrigen Gestalten anlangt, so kann sowohl Rechnung, als Zonenverband für die meisten derselben benutzt werden. Da wir indessen jedenfalls zwei Pinakoide an der Combination annehmen können, so werden die Rechnungen nur langwierig, nicht schwierig ausfallen und wir benützen in Folge dessen, so weit es geht, die Ableitung aus dem Zonenverband. Dabei ist es selbstverständlich nicht einerlei, wie man eine Fläche der anderen folgen lässt. In nachstehender Ordnung aber lassen sich sämmtliche, aufgeführte der Reihe nach deduciren. Wir legen dabei die Abbildung des Krystalls, Tafel VIII., Fig. 4 und die Projection, Fig. 5, zu Grunde, in welch' letzterer: h, M, T, l, o, p, e und x auf P = oP eingetragen sein mögen. Die Sectionslinien von M und h geben die unter dem Winkel γ im Quadranten v.r. geneigten Axen a und b ab, von denen b in den Fig. 4ª und 5 horizontal liegt. Der Quadrant h.r. sei, unserer früheren Annahme nach, der positive.

Unter Bezugnahme auf diese Projection folgen nunmehr die Buchstaben der einzelnen Flächen, für eine jede derselben hierauf zwei zur Ableitung erforderliche Zonenverbände und zuletzt ihre Axenschnitte. Eine ausführliche Berechnung der Coordinaten der Zonenpunkte und der Axenschnitte der Sectionslinien, welche sich zumeist ohne Rechnung aus der Projection ergeben, ist nicht mitgetheilt und möge eine Uebungsaufgabe für den Anfänger sein.

y	(Zonen: h : P ; o : T) =	$\frac{1}{2}$a :	∞b :	c =	2,P,$\bar{\infty}$.
w	(„ M : y ; e : T) =	$\frac{1}{2}$a :	$\frac{1}{4}$b :	c =	4,P$\breve{2}$.
g	(„ P : T ; w : y) =	$\frac{1}{2}$a :	$\frac{1}{2}$b :	c =	2,P.
q	(„ h : P ; p : w) =	$\frac{3}{2}$a :	∞b :	c =	$\frac{2}{3}$,P,$\bar{\infty}$.
s	(„ y : p ; x : g) =	$\frac{3}{4}$a :	$\frac{3}{2}$b :	c =	$\frac{4}{3}$,P$\bar{2}$.
z	(„ M : T ; p : w) =	3a :	b :	∞c =	∞'P$\breve{3}$.
μ	(„ y : T ; h : g) =	$\frac{1}{4}$a :	$\frac{1}{2}$b :	c =	4,P$\bar{2}$.
u	(„ P : l ; M : y) =	$\frac{1}{2}$a :	— $\frac{1}{2}$b :	c =	2P,.
i	(„ o : y ; u : x) =	$\frac{3}{4}$a :	— $\frac{3}{2}$b :	c =	$\frac{4}{3}$P,$\bar{2}$.
f	(„ M : l ; o : q) =	3a :	— b :	∞c =	∞P'$\breve{3}$.
v	(„ f : o ; u : y) =	$\frac{1}{2}$a :	— $\frac{1}{4}$b :	c =	4P,$\breve{2}$.
π	(„ o : x ; l : v) =	a :	— $\frac{1}{3}$b :	c =	3P,$\breve{3}$.
n	(„ M : P ; o : y) =	∞a :	— $\frac{1}{2}$b :	c =	2'P,$\breve{\infty}$.
c	(„ M : P ; z : π) =	∞a :	— $\frac{1}{6}$b :	c =	6'P,$\breve{\infty}$.
t	(„ h : P ; e : T) =	— $\frac{1}{2}$a :	∞b :	c =	2'P'$\bar{\infty}$.
a	(„ P : T ; t : l) =	— a :	— b :	c =	'P.
b	(„ T : n ; a : z) =	— $\frac{1}{2}$a :	— $\frac{1}{4}$b :	c =	4'P$\breve{2}$.
m	(„ P : l ; e : t) =	— a :	b :	c =	P'.
β	(„ e : l ; m : f) =	— $\frac{1}{2}$a :	$\frac{1}{4}$b :	c =	4P'$\breve{2}$.

Die angeführten Zonen sind am Krystall, Tafel VIII, Fig. 4 gut zu verfolgen und durch den Kantenparallelismus ihrer einzelnen Glieder sofort zu erkennen. Es machen nur die Zonen M : w : g : y und m : β : f, wegen des Fehlens der parallelen Kanten zwischen g und y für die erste, zwischen β und f für die zweite Zone, eine Controle durch das Reflexionsgoniometer nöthig.

Wäre f nicht vorhanden, so müsste β berechnet werden. Hierzu bedürfte es nur einer Winkelmessung, wenn wir die Zone e : β : l als gegeben betrachten wollen. Diese Winkelmessung könnte sich am zweckmässigsten auf die Neigung β : P, dann aber auch auf die Neigungen β : e oder β : l erstrecken. Nehmen wir an, letztere Neigung sei gegeben, so hätten wir ein sphärisches Dreieck, Fig. 162, mit folg. Stücken:

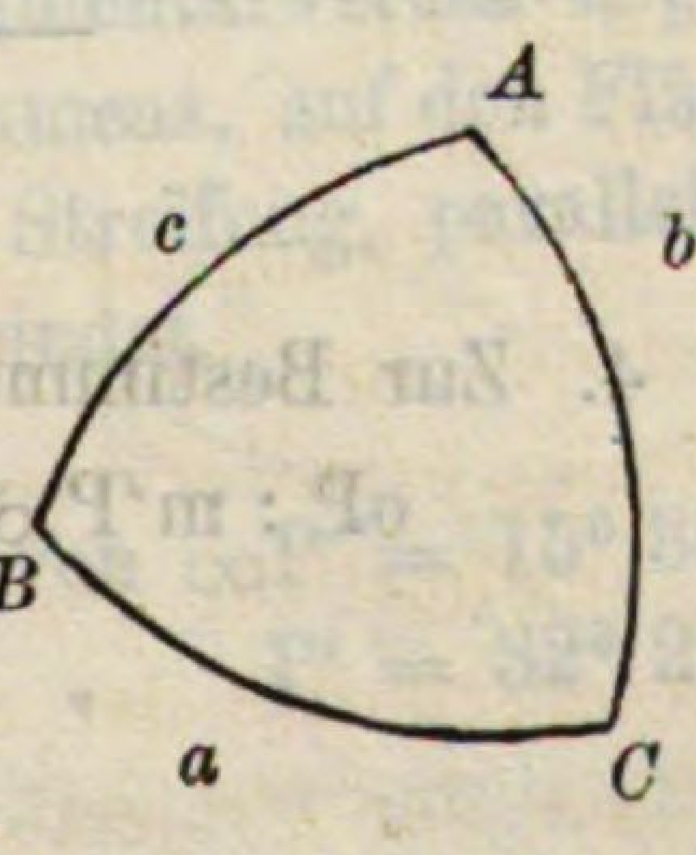


Fig. 162.

B = Combk. P : l.
C = Combk. β : l.
a = Neig. d. Combk. P : l zur Combk. e : l.

Dieser letztere ebene Winkel ist aus dem Zonenverband entnommen und jedenfalls unabhängig von diesem Dreieck darzustellen, da P, l und e nach ihren Axenschnitten und wichtigsten Neigungswinkeln bekannt sind.

Man berechnet in dem obigen Dreieck:

A = Combk. β : P = 180⁰ — Z von β.
c = Neig. d. Combk. P : l zur Combk. P : β.

Da man nun aber die Neigung der Combinationskante P : l zur Axe $\check{a} = \sigma$ von P′ kennt = 56⁰ 44′ 25″, so ist σ der Pyramide β leicht darzustellen und beträgt = 56⁰ 44′ 25″ — (180⁰ — c). Mit Z und σ vollendet man die Berechnung der Pyramide β in bekannter Weise.

3. Die nach Ermittelung der Axenschnitte der genannten Gestalten noch übrig bleibenden Domen r = m,P′$\breve{\infty}$ (m > 2) und k = = m′P,$\breve{\infty}$ (m < 2) bieten, ausser der Hauptzone, keine ersichtlichen anderen Zonen dar, wir müssen daher entweder solche am Reflexionsgoniometer aufsuchen, oder uns der Rechnung zur Ableitung ihrer Axenschnitte bedienen.

Wählen wir letzteren Weg, so sei zur Bestimmung von r gemessen:

oP : m,P′$\breve{\infty}$ = 112⁰ 19′ ; daraus Z = 67⁰ 41′.
Da nun A = 94⁰ 10′;
so folgt für X = 18⁰ 9′.
180⁰.

$$m = \frac{\sin Z \,.\, \sin \gamma}{c \,.\, \sin X \,.\, \sin \beta}.$$

log. num m = log. sin 67⁰ 41′ = 9,9661884 — 10
+ log. sin 88⁰ 47′ 51″ = 9,9999043 — 10
9,9660927 — 10

log. num. c = 9,7404842 — 10
+ log. sin 18⁰ 9′ = 9,4934661 — 10
+ log. sin 64⁰ 4′ = 9,9539063 — 10
9,1878566 — 10

9,9660927 — 10
9,1878566 — 10
0,7782361
num. m = 6.

Das Doma r ist 6,P′$\breve{\infty}$.

4. Zur Bestimmung von k = m′P,$\breve{\infty}$ sei gemessen:

oP : m′P,$\breve{\infty}$ = 161⁰ 22′, daraus Z = 18⁰ 38′.
Da dies Mal A = 85⁰ 50′ ist;
so folgt für X = 75⁰ 32′.
180⁰.

log. num. m = log. sin 18° 38′ = 9,5044853 — 10
+ log. sin 88° 47′ 51″ = 9,9999043 — 10
9,5043896 — 10

log. num. c = 9,7404842 — 10
+ log. sin 75° 32′ = 9,9860069 — 10
+ log. sin 64° 4′ = 9,9539063 — 10
9,6803974 — 10

9,6803974 — 10
9,8239922 — 10
num. m = $^2/_3$.

Das Doma k ist $^2/_3$'P,$\breve{\infty}$.

Somit wäre die ganze Combination entwickelt. Trägt man in die Projectionsfigur die Sectionslinien aller Flächen ein, so offenbart sich ein reicher Zonenzusammenhang, und es treten mehrere Zonenverbände zu Tage, die am Krystalle nicht verfolgt werden konnten.

b. Axinit vom Scopi am Luckmanier. Medelser Thal. Schweiz.

Eine allgemeine Bestimmung des auf Tafel VIII. Fig. 6 abgebildeten Krystalls ergibt, wenn wir bezüglich der Stellung der älteren Annahme von NAUMANN und QUENSTEDT folgen:

∞P$\breve{\infty}$, ∞'P , ∞P′ , 'P , P′ , m'P′$\breve{\infty}$ (m > 1).
l , p , u , r , x , s.

Letztere Fläche wird aus dem Zonenverband sofort als 2'P′$\breve{\infty}$ erkannt, vergl. Tafel VIII., Fig 7.

Wenden wir uns zur Berechnung des Axenverhältnisses und der Grundangulargrössen, so ist diese Aufgabe erschwert, weil nur ein Pinakoid vorhanden ist. Wir werden uns daher auf langwierige Rechnungen gefasst machen müssen.

Was die Winkelverhältnisse der Krystalle dieses Vorkommens anlangt, so stimmen einige kleine, durchsichtige Krystalle in ihren Winkelwerthen recht befriedigend mit den von MARIGNAC und DES-CLOIZEAUX * gegebenen überein, so dass wir aus der Reihe derselben folgende fünf Fundamentalwinkel der Rechnung zu Grunde legen. Dabei ist namentlich zu erwähnen, dass, in unserem Falle, auch die Neigungen der Flächen von r zu x und l Fundamentalwerthe abgeben können, da, bei kleinen Krystallen dieses Vorkommens, auf den Flächen von r die sonst genauen Messungen hinderliche Streifung, parallel der Kante r : p, sehr zurücktritt oder ganz verschwindet.

Wir haben sonach:

1. ∞P$\breve{\infty}$(l) : ∞P′(u) = 164° 25′ ; daraus Y von ∞P′ = 15° 35′.
2. ∞P$\breve{\infty}$(l) : P′(x) = 147° 33′ ; „ Y „ P′ = 32° 27′.

* Vergl. DES-CLOIZEAUX, Minéralogie T. I. 1862. pag. 515 u. f.

3. P'(x) : ∞P'(u) = 149° 28' = Z von P' + Z von ∞P'.
4. 'P(r) : P'(x) = 139° 6' = X „ 'P + X „ P'.
5. ∞P$\breve{\infty}$(l) : 'P(r) = 124° 33' ; daraus Y von 'P = 55° 27'.

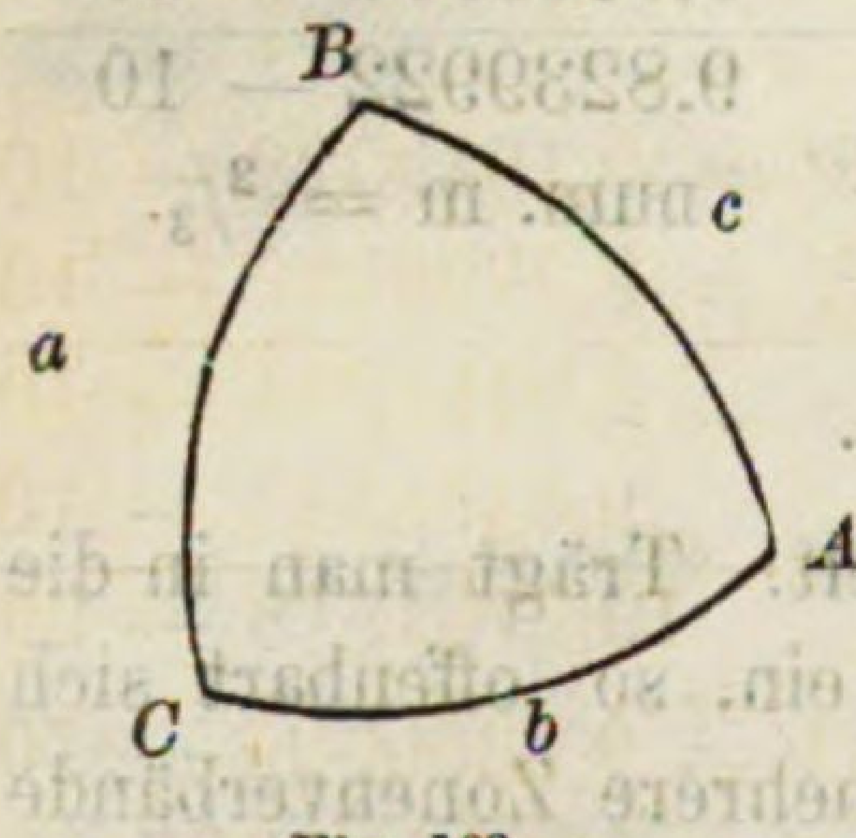


Fig. 163.

Mit diesen Daten können wir nunmehr ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 163, das folgende Stücke enthält:

A = 149° 28' = Cbk. x : u.
B = 147° 33' = Cbk. x : l.
C = 164° 25' = Cbk. u : l.

Wir suchen in diesem Dreieck a, d. h. die Neigung der Projection der Kante Y von P' zur Projection der Hauptaxe auf ∞P$\breve{\infty}$, welch' letztere durch die Combinationskante l : u dargestellt ist. Dieser ebene Winkel wird gleich sein müssen 180° — ρ von P' = π + α dieser Viertelpyramide.

$$\text{Man hat } \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos {}^1/_2 (A + B - C) \,.\, \cos {}^1/_2 (A + C - B)}{\sin B \,.\, \sin C}}.$$

$$\frac{A + B - C}{2} = 66^0\, 18' \quad ; \quad \frac{A + C - B}{2} = 83^0\, 10'.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 66^0\, 18' = 9{,}6041696 - 10$$
$$+ \log.\cos 83^0\, 10' = 9{,}0754799 - 10$$
$$8{,}6796495 - 10$$
$$9{,}1587912 - 10$$
$$19{,}5208583 - 20$$

$$\log.\sin 32^0\, 27' = 9{,}7296211 - 10$$
$$+ \log.\sin 15^0\, 35' = 9{,}4291701 - 10$$
$$9{,}1587912 - 10$$

Daraus $\sqrt{\ } = 9{,}7604291 - 10$
a = π + α von P' = 109° 39' 34''.
ρ v. P' = 70° 20' 26''.

Man bildet hierauf ein anderes Dreieck, Fig. 164, mit:

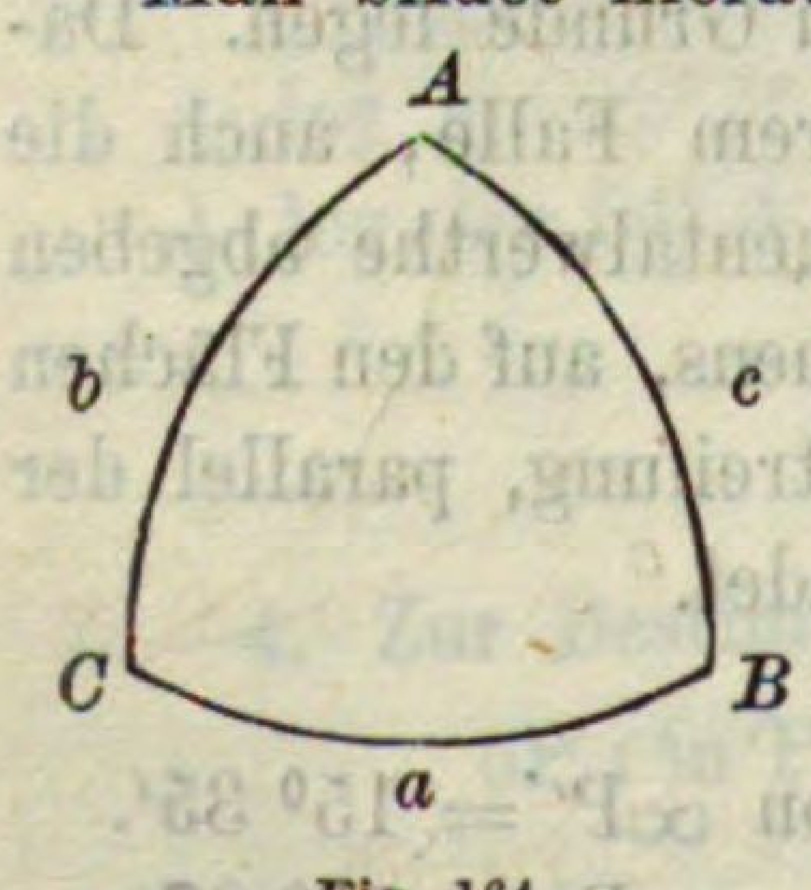


Fig. 164.

A = 139° 6' = Cbk. r : x.
B = 147° 33' = Cbk. x : l.
C = 124° 33' = Cbk. l : r,

und sucht in demselben wiederum a = der Neigung der Projection der Kante Y von P' auf ∞P$\breve{\infty}$ zur Projection der Kante Y von 'P auf demselben Pinakoid. Diese Neigung wird = (ρ + ρ') sein müssen, wenn ρ die ebenerwähnte Bedeutung hat, ρ' dagegen den entsprechenden Hauptschnittswinkel von 'P vorstellt.

Die Auflösung des sphärischen Dreiecks erfolgt nach der im vorigen Falle angewandten Formel und man hat:

$$\frac{A + B - C}{2} = 81^0\ 3' \quad ; \quad \frac{A + C - B}{2} = 58^0\ 3'.$$

$$\begin{aligned} \log.\cos\frac{a}{2} &= \log.\cos 81^0\ 3' = 9{,}1919328 - 10 \\ &+ \log.\cos 58^0\ 3' = 9{,}7236026 - 10 \\ &\qquad 8{,}9155354 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\sin 32^0\ 27' &= 9{,}7296211 - 10 \qquad 9{,}6453541 - 10 \\ + \log.\sin 55^0\ 27' &= 9{,}9157330 - 10 \qquad 19{,}2701813 - 20 \\ &\ \ 9{,}6453541 - 10 \quad \text{Daraus } \sqrt{\ } = 9{,}6350906 - 10 \end{aligned}$$

$$a = \varrho + \varrho' = 128^0\ 51'\ 38''.$$
$$\text{und } \varrho' = 58^0\ 31'\ 12''.$$

Hiermit können wir nach der Formel:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\varrho\ .\ \sin\varrho'}{\sin(\varrho - \varrho')}$$

den Winkel α im Octanten v.r.o ermitteln.

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{tg}\alpha &= \log.\text{num. } 2 = 0{,}3010300 \\ &+ \log.\sin 70^0\ 20'\ 26'' = 9{,}9739167 - 10 \\ &+ \log.\sin 58^0\ 31'\ 12'' = 9{,}9308587 - 10 \\ &\qquad 0{,}2058054 \\ &- \log.\sin 11^0\ 49'\ 14'' = 9{,}3114300 - 10 \\ &\qquad 0{,}8943754 \end{aligned}$$

$$\alpha = 82^0\ 43'\ 56'' \text{ im Oct. v.r.o.}$$

Nachdem α bekannt ist, folgen $\pi = 26^0\ 55'\ 38''$ und der coordinirte Hauptschnittswinkel π' von 'P $= 24^0\ 12'\ 44''$.

Um nun einen weiteren Fortschritt zu bewirken, hat man in ein sphärisches Dreieck einzugehen, das, an der rechten Seite des Krystalls anliegend, die Neigungen der Flächen x, u und des makrodiagonalen Hauptschnitts in sich schliesst. In dem genannten Dreieck, Fig. 165, sind bekannt:

A = $32^0\ 27'$ = Y von P'.
B = $15^0\ 35'$ = Y von ∞P'.
C = $149^0\ 28'$ = Combk. x : u.
c = $109^0\ 39'\ 34''$ = $180^0 - \varrho$ von P'.

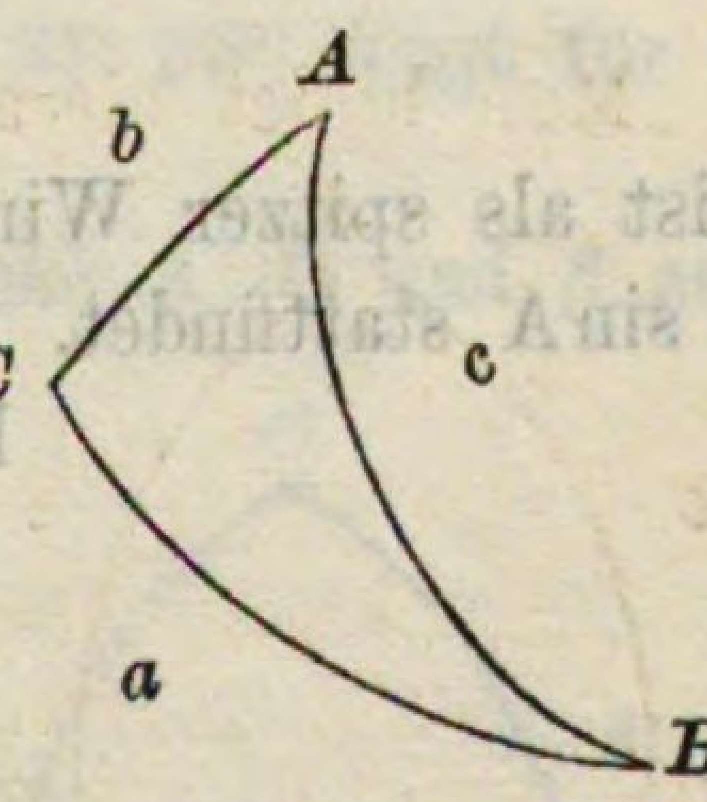


Fig. 165.

Man findet b durch $\sin b = \dfrac{\sin B\ .\ \sin c}{\sin C}$

und hat, da $\sin C > \sin B$ ist, b als spitzen Winkel, d. h. entsprechend B zu wählen, was überdies auch schon die Natur der Aufgabe fordert.

$$\log.\ \sin b = \log.\ \sin 15^0\ 35' = 9{,}4291701 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 70^0\ 20'\ 26'' = 9{,}9739167 - 10$$
$$9{,}4030868 - 10$$
$$- \log.\ \sin 30^0\ 32' = 9{,}7058975 - 10$$
$$9{,}6971893 - 10$$
$$b = 29^0\ 51'\ 53''.$$

Hiermit kann man in ein anderes Dreieck eingehen, Fig. 166, in welchem gegeben sind:

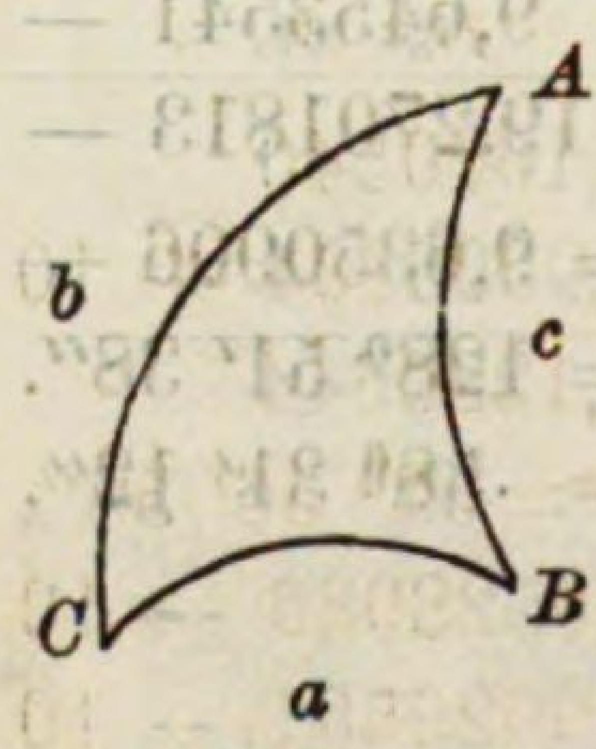


Fig. 166.

$A = 32^0\ 27' = Y$ von P'.
$b = 29^0\ 51'\ 53''$.
$c = 26^0\ 55'\ 38'' = \pi$ von P'.

Gesucht sind B = Axenebenenwinkel B und $a = \tau$ von P'.

$$\operatorname{cotg} B = -\frac{\operatorname{cotg} A \,.\, \cos(c + \varphi)}{\cos\varphi}$$

mit $\operatorname{cotg}\varphi = \operatorname{tg} b \,.\, \cos A$.

$$\log.\ \operatorname{cotg}\varphi = \log.\ \operatorname{tg} 29^0\ 51'\ 53'' = 9{,}7590681 - 10$$
$$+ \log.\ \cos 32^0\ 27' = 9{,}9262704 - 10$$
$$9{,}6853385 - 10$$
$$\varphi = 64^0\ 8'\ 51''.$$

$$\log.\ \operatorname{cotg} B = \text{N. } \log.\ \operatorname{cotg} 32^0\ 27' = 0{,}1966494$$
$$+ \log.\ \cos 88^0\ 55'\ 31'' = \text{N. } 8{,}2731581 - 10$$
$$\text{P. } 8{,}4698075 - 10$$
$$- \log.\ \cos 64^0\ 8'\ 51'' = 9{,}6395421 - 10$$
$$8{,}8302654 - 10$$
$$B = 86^0\ 7'\ 47'' \text{ im Oct. v.r.o.}$$

Zur Bestimmung von $a = \tau$ von P' kann man den Sinussatz anwenden und hat:

$$\sin a = \frac{\sin A \,.\, \sin b}{\sin B}$$

a ist als spitzer Winkel, d. h. entsprechend A zu wählen, da $\sin B > \sin A$ stattfindet.

$$\log.\ \sin a = \log.\ \sin 32^0\ 27' = 9{,}7296211 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 29^0\ 51'\ 53'' = 9{,}6971893 - 10$$
$$9{,}4268104 - 10$$
$$- \log.\ \sin 86^0\ 7'\ 47'' = 9{,}9990085 - 10$$
$$9{,}4278019 - 10$$
$$a = \tau = 15^0\ 31'\ 59''.*$$

* Bei späteren Rechnungen verwendet man immer den ein Mal gerechneten log. sin τ.

Um zu ${,}\tau$ von P′ den coordinirten Hauptschnittswinkel τ' von ′P zu finden, gehe man in ein sphärisches Dreieck ein, Fig. 167, das folgende Stücke enthält:

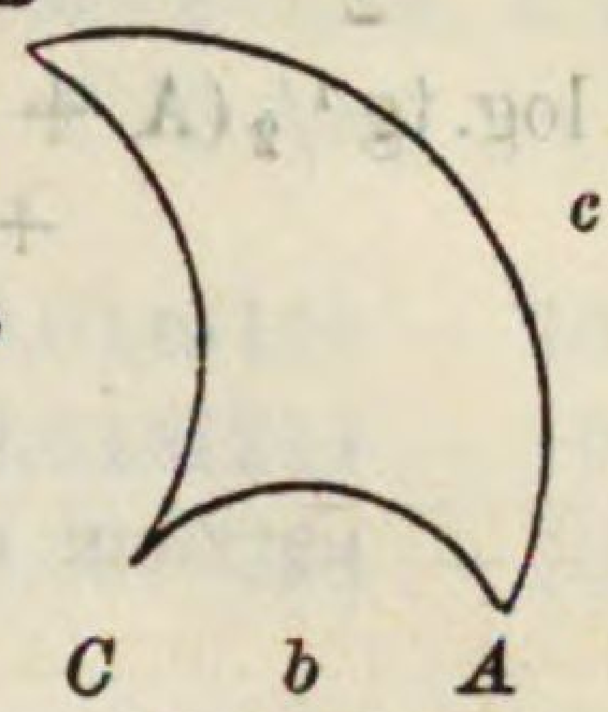


Fig. 167.

$$B = 55^0\ 27' = Y \text{ von } {}'P.$$
$$C = 86^0\ \ 7'\ 47''.$$
$$a = 24^0\ 12'\ 44''.$$
$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a \, . \, \sin\varphi}{\sin(C+\varphi)}$$
mit $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} B \, . \cos a$.

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{tg}\varphi &= \log.\operatorname{tg} 55^0\ 27' = 0{,}1620540 \\ &+ \log.\cos 24^0\ 12'\ 44'' = 9{,}9600104 - 10 \\ &\qquad 0{,}1220644 \\ &\qquad \varphi = 52^0\ 56'\ 52''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{tg} b &= \log.\operatorname{tg} 24^0\ 12'\ 44'' = 9{,}6528980 - 10 \\ &+ \log.\sin 52^0\ 56'\ 52'' = 9{,}9020501 - 10 \\ &\qquad 9{,}5549481 - 10 \\ &- \log.\sin 40^0\ 55'\ 21'' = 9{,}8162662 - 10 \\ &\qquad 9{,}7386819 - 10 \\ &\qquad b = \tau' = 28^0\ 43'\ 2''. \end{aligned}$$

Mit τ und τ' erhält man γ nach der Formel:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin\tau \, . \sin\tau'}{\sin(\tau - \tau')}.$$

$$\begin{aligned} \log.\operatorname{tg}\gamma &= \log.\text{num}.\ 2 = 0{,}3010300 \\ &+ \log.\sin 15^0\ 31'\ 59'' = 9{,}4278019 - 10 \\ &+ \log.\sin 28^0\ 43'\ \ 2'' = 9{,}6816818 - 10 \\ &\qquad 9{,}4105137 - 10 \\ &- \log.\sin(-13^0\ 11'\ 3'') = \text{N. } 9{,}3580907 - 10 \\ &\qquad 0{,}0524230 \\ &\qquad \gamma = 131^0\ 33'\ 1'' \text{ im Oct. v.r.o.} \end{aligned}$$

Aus diesem Werthe und dem von $\tau = 15^0\ 31'\ 59''$ folgt für σ von $P' = 32^0\ 55'$.

Schliesslich rechnen sich die fehlenden Stücke A, C und β auf einfache Weise, da B, α und γ bekannt sind. Man hat, Fig. 168:

$$B = \ \ 86^0\ \ 7'\ 47'' = B.$$
$$a = \ \ 82^0\ 43'\ 56'' = \alpha.$$
$$c = 131^0\ 33'\ \ 1'' = \gamma.$$

$$\operatorname{tg}{}^1/_2(A + C) = \operatorname{cotg}{}^1/_2 B \, . \frac{\cos{}^1/_2(a - c)}{\cos{}^1/_2(a + c)}.$$

$$\operatorname{tg}{}^1/_2(A - C) = \operatorname{cotg}{}^1/_2 B \, . \frac{\sin{}^1/_2(a - c)}{\sin{}^1/_2(a + c)}.$$

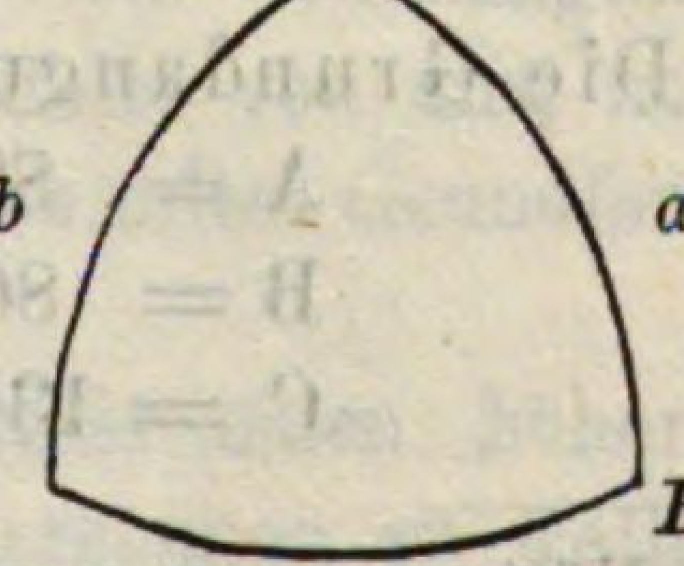


Fig. 168.

$$\frac{a - c}{2} = -24^0\,24'\,32^1/_2'' \; ; \; \frac{a + c}{2} = 107^0\,8'\,28^1/_2''.$$

$\log.\,tg\,^1/_2(A + C) = \log.\,cotg\,43^0\,3'\,53^1/_2'' = 0{,}0293585$
$+ \log.\cos(-24^0\,24'\,32^1/_2'') = 9{,}9593365 - 10$
$9{,}9886950 - 10$
$- \log.\cos 72^0\,51'\,31^1/_2'' = N.\,9{,}4694220 - 10$
$N.\,0{,}5192730$
$^1/_2(A + C) = 106^0\,49'\,50''.$

$\log.\,tg\,^1/_2(A - C) = \log.\,cotg\,43^0\,3'\,53^1/_2'' = 0{,}0293585$
$+ \log.\sin(-24^0\,24'\,32^1/_2'') = N.\,9{,}6162107 - 10$
$N.\,9{,}6455692 - 10$
$- \log.\sin 72^0\,51'\,31^1/_2'' = 9{,}9802676 - 10$
$N.\,9{,}6653016 - 10$

$^1/_2(A - C) = 155^0\,10'\,12''$ $\quad ^1/_2(A - C) = 155^0\,10'\,12''.$
$^1/_2(A + C) = 106^0\,49'\,50''$
$A = 262^0\;0'\;2'' = 82^0\;0'\;2''$ für A im Oct. v.r.o.*
$- C = 48^0\,20'\,22'' = 131^0\,39'\,38''$ für C im Oct. v.r.o.

Zur Berechnung des letzten Stücks $b = \beta$ kann der Sinussatz nicht herangezogen werden, da bei seiner Anwendung nicht entschieden werden kann, ob b als spitzer oder stumpfer Winkel zu nehmen ist. Wir benützen desshalb:

$$\cos b = \frac{\cos a \,.\, \sin(c + \varphi)}{\sin\varphi}$$

mit $cotg\,\varphi = tg\,a \,.\, \cos B.$

$\log.\,cotg\,\varphi = \log.\,tg\,82^0\,43'\,56'' = 0{,}8943829$
$+ \log.\cos 86^0\;7'\,47'' = 8{,}8292892 - 10$
$9{,}7236721 - 10$
$\varphi = 62^0\,6'\,34''.$

$\log.\cos b = \log.\cos 82^0\,43'\,56'' = 9{,}1021138 - 10$
$+ \log.\sin(-13^0\,39'\,35'') = N.\,9{,}3731974 - 10$
$N.\,8{,}4753112 - 10$
$- \log.\sin 62^0\,6'\,34'' = 9{,}9463750 - 10$
$N.\,8{,}5289362 - 10$
$b = \beta = 91^0\,56'\,13''.$

Die Grundangulargrössen sind im Octanten v.r.o.

$A = 82^0\;0'\;2''\;;\; \alpha = 82^0\,43'\,56''.$
$B = 86^0\;7'\,47''\;;\; \beta = 91^0\,56'\,13''.$
$C = 131^0\,39'\,38''\;;\; \gamma = 131^0\,33'\;1''.$

* Hätte man, um negative Winkel zu vermeiden, a und c vertauscht, so würde das Endresultat dasselbe geblieben sein: $^1/_2(C + A)$ wäre $= 106^0\,49'\,50''$, $^1/_2(C - A) = 24^0\,49'\,48''$ geworden.

Wendet man zur Prüfung, ob diese sechs Winkel in der That ein sphärisches Dreieck bilden, eine der GAUSS'schen Gleichungen, z. B.:

$$\cos {}^1/_2 (A + B) . \cos {}^1/_2 c = \sin {}^1/_2 C . \cos {}^1/_2 (a + b) \text{ an,}$$

so erhält man für den linken Theil der Gleichung:

$$\begin{aligned} \log. \cos 84^0\ 3'\ 54^1/_2{}'' &= 9{,}0145110 - 10 \\ + \log. \cos 65^0\ 46'\ 30^1/_2{}'' &= 9{,}6131214 - 10 \\ \hline & 8{,}6276324 - 10 \end{aligned}$$

und der rechte Theil wird zu:

$$\begin{aligned} \log. \sin 65^0\ 49'\ 49'' &= 9{,}9601551 - 10 \\ + \log. \cos 87^0\ 20'\ 4^1/_2{}'' &= 8{,}6674858 - 10 \\ \hline & 8{,}6276409 - 10 \end{aligned}$$

Das Erforderniss ist also fast vollständig erfüllt.

Das Axenverhältniss rechnet sich aus den bereits dargestellten Hauptschnittswinkeln. Man hat:

$$\dot{a} = \frac{\sin \tau}{\sin \sigma}.$$

$$\begin{aligned} \log. \text{num. } a = \log. \sin 15^0\ 31'\ 59'' &= 9{,}4278019 - 10 \\ - \log. \sin 32^0\ 55' &= 9{,}7351345 - 10 \\ \hline & 9{,}6926674 - 10 \end{aligned}$$

$$\text{num. } \breve{a} = 0{,}492796.$$

Ferner ist $c = \frac{\sin \pi}{\sin \varrho}$.

$$\begin{aligned} \log. \text{num. } c = \log. \sin 26^0\ 55'\ 38'' &= 9{,}6559624 - 10 \\ - \log. \sin 70^0\ 20'\ 26'' &= 9{,}9739167 - 10 \\ \hline & 9{,}6820457 - 10 \end{aligned}$$

$$\text{num. } \acute{c} = 0{,}480890.$$

Das Axenverhältniss lautet: $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}492796 : 1 : 0{,}480890$.

Vergleicht man die vorstehenden Daten mit denen, welche G. VOM RATH in seiner schönen und umfassenden Arbeit über den Axinit in POGG. Annalen B. CXXVIII. p. 20 u. f. niedergelegt hat, so ergibt sich, obwohl wir von etwas anderen Fundamentalwerthen ausgingen, doch eine recht befriedigende Uebereinstimmung; nur ist bei der dort auf p. 30 gemachten Zusammenstellung der Grundangulardimensionen und des Axenverhältnisses, bezogen auf die von uns, nach dem Vorgange von NAUMANN und QUENSTEDT, gewählte Grundform, der Winkel β ebenfalls als stumpfer zu nehmen.

Ohne dem von uns berechneten Axenverhältniss einen höheren Werth als dem von G. VOM RATH aufgestellten zuerkennen zu wollen, glauben wir nur, es für die uns zu Gebote gestandenen Krystalle des erwähnten Vorkommens als entsprechend erachten zu dürfen. Mit

Rücksicht auf die von G. vom Rath gewählte Aufstellung des Axinits,*
erhalten schliesslich die am Krystall, Tafel VIII, Fig. 6, auftretenden Flächen folgende Ausdrücke:

s = ∞P$\breve{\infty}$; x = 4'P'$\breve{\infty}$.
u = ∞P' ; p = 2,P,$\bar{\infty}$.
r = ∞'P ; l = 5P,$^5/_3$.

c. Berechnung der Grundangulardimensionen und des Axenverhältnisses aus fünf gemessenen Kantenwinkeln der triklinen Pyramide ;P;.

Als Beispiel wählen wir die, durch die Combination der vier Viertelpyramiden erzeugte, vollständige Pyramide ;P; des Anorthits und nehmen nach den von Kokscharow gegebenen Daten, aber unter Beibehaltung der Stellung der Grundform, wie im ersten Beispiel, folgende fünf Fundamentalwinkel an:

1. 'P : P' = 145° 22′ 38″.
2. 'P : P, = 103° 45′ 27″.
3. P, : ,P = 127° 6′ 8″.
4. ,P : P' = 107° 21′ 26″.
5. 'P : ,P über oP = 91° 33′ 10″.

Um die Rechnungen übersichtlich zu machen und ihren Gang in einem Bilde verfolgen zu können, fertigen wir uns, Tafel IX, Fig. 1, eine Projection eines beliebigen Oktaids, nebst zugehörigem Hexaid, auf eine beliebige Ebene an und bezeichnen die sechs Oktaidkantenzonenpunkte mit a, a′, b, b′, c und c′, die drei Hexaidkantenzonenpunkte mit A, B, C. Ferner tragen wir in die Figur die Zahlen 1. 2. 3. 4. 5 ein, die bedeuten sollen, dass an den betreffenden Stellen die körperlichen Winkel sich befinden, die wir der Rechnung zu Grunde legen und die durch die Schnitte der den betreffenden Sectionslinien entsprechenden Flächen gebildet werden. Diese Figur schliesst alsdann die ganze Rechnung in sich, wenn wir nur, der Lage nach, die Winkel und Seiten ihrer ebenen Dreiecke als Repräsentanten der Winkel und Seiten der entsprechenden sphärischen Dreiecke ansehen. Wenn wir also in der Folge die Winkel der ebenen Dreiecke und deren Seiten anführen, so sind darunter die Winkel und Seiten der entsprechenden sphärischen Dreiecke verstanden. Das Bestreben ist darauf gerichtet, aus den fünf gemessenen Winkeln der Pyramide zunächst A, B, C zu finden, oder überhaupt drei der Grössen: A, B, C ; α, β, γ zu ermitteln.

* Wegen einer anderen Aufstellung, die, wenn man die alte Stellung verlassen wollte, wohl die zweckmässigste ist, vergl. Hessenberg. Min. Not. 1873. p. 30 u. f.

1. Wir berücksichtigen zunächst das Dreieck a′ b′ c, in dem gegeben sind:

$$A = 103^0\ 45'\ \ 7'' = \text{Winkel a}'\ \text{b}'\ \text{c}.$$
$$B = 127^0\ \ 6'\ \ 8'' = \text{Winkel b}'\ \text{a}'\ \text{c}.$$
$$C = \ 91^0\ 33'\ 10'' = \text{Winkel a}'\ \text{c b}'.$$

Gesucht ist a = Seite a′c und man findet dies Stück durch:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos{}^1/_2\,(A + B - C)\,.\,\cos{}^1/_2\,(A + C - B)}{\sin B\,.\,\sin C}}.$$

$$\frac{A + B - C}{2} = 69^0\ 39'\ 2^1/_2''\ ;\quad \frac{A + C - B}{2} = 34^0\ 6'\ 4^1/_2''.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos 69^0\ 39'\ 2^1/_2'' = 9{,}5412579 - 10$$
$$+ \log.\cos 34^0\ \ 6'\ 4^1/_2'' = 9{,}9180556 - 10$$
$$9{,}4593135 - 10$$

$$\log.\sin 52^0\ 53'\ 52'' = 9{,}9017637 - 10 \qquad 9{,}9016042 - 10$$
$$+ \log.\sin 88^0\ 26'\ 50'' = 9{,}9998405 - 10 \qquad 19{,}5577093 - 20$$
$$9{,}9016042 - 10$$

$$\text{Daraus } \sqrt{\ } = 9{,}7788546 - 10$$
$$a = a'c = 106^0\ 7'\ 14''.$$

Ferner ermittelt man b = b′c und c = a′b′ durch die Napierschen Analogien:

$$\operatorname{tg}{}^1/_2\,(b + c) = \operatorname{tg}{}^1/_2 a\,.\,\frac{\cos{}^1/_2\,(B - C)}{\cos{}^1/_2\,(B + C)}.$$

$$\operatorname{tg}{}^1/_2\,(b - c) = \operatorname{tg}{}^1/_2 a\,.\,\frac{\sin{}^1/_2\,(B - C)}{\sin{}^1/_2\,(B + C)}.$$

$$\frac{B - C}{2} = 17^0\ 46'\ 29''\ ;\quad \frac{B + C}{2} = 109^0\ 19'\ 39''.$$

$$\log.\operatorname{tg}{}^1/_2\,(b + c) = \log.\operatorname{tg} 53^0\ \ 3'\ 37'' = 0{,}1238365$$
$$+ \log.\cos 17^0\ 46'\ 29'' = 9{,}9787575 - 10$$
$$0{,}1025940$$
$$- \log.\cos 70^0\ 40'\ 21'' = \text{N. } 9{,}5197852 - 10$$
$$\text{N. } 0{,}5828088$$
$${}^1/_2\,(b + c) = 104^0\ 38'\ 44''.$$

$$\log.\operatorname{tg}{}^1/_2\,(b - c) = \log.\operatorname{tg} 53^0\ 3'\ 37'' = 0{,}1238365$$
$$+ \log.\sin 17^0\ 46'\ 29'' = 9{,}4846915 - 10$$
$$9{,}6085280 - 10$$
$$- \log.\sin 70^0\ 40'\ 21'' = 9{,}9748073 - 10$$
$$9{,}6337207 - 10$$
$${}^1/_2\,(b - c) = 23^0\ 16'\ 47''.$$

$${}^1/_2\,(b + c) = 104^0\ 38'\ 44''$$
$${}^1/_2\,(b - c) = \ \ 23^0\ 16'\ 47''$$
$$b = b'c = 127^0\ 55'\ 31''.$$
$$c = a'b' = \ \ 81^0\ 21'\ 57''.$$

2. Nach dieser Berechnung wenden wir uns zum Dreieck abc, in dem wir auf dieselbe Weise die drei Seiten ermitteln. Es sind in diesem Dreieck gegeben:

A = 180° — 145° 22′ 38″ = 34° 37′ 22″ = Winkel bac.
C = 180° — 107° 21′ 26″ = 72° 38′ 34″ = Winkel abc.
B = 91° 33′ 10″ = Winkel acb.

Wir suchen zuerst a = bc und haben:

$$\frac{A + B - C}{2} = 7^0\, 51'\, 23'' \quad ; \quad \frac{A + C - B}{2} = 26^0\, 45'\, 59''.$$

$$\log.\cos\frac{a}{2} = \log.\cos\ 7^0\, 51'\, 23'' = 9{,}9959043 - 10$$
$$+ \log.\cos 26^0\, 45'\, 59'' = 9{,}9507786 - 10$$

log. sin 88° 26′ 50″ = 9,9998405 — 10	9,9466829 — 10
+ log. sin 72° 38′ 34″ = 9,9797592 — 10	9,9795997 — 10
9,9795997 — 10	19,9670832 — 20

Daraus $\sqrt{\ } =$ 9,9835416 — 10
a = bc = 31° 20′ 56″.

Da aber a′c = 106° 7′ 14″ ist, so erhält man durch Subtraction von bc die Grösse der Seite a′b = 74° 46′ 18″.

Zur Ermittelung von b = ab und c = ac dienen, wie im vorigen Falle, die NAPIER'schen Analogien:

Man hat: $\frac{B - C}{2} = 9^0\, 27'\, 18''$; $\frac{B + C}{2} = 82^0\, 5'\, 52''$.

log. tg ½(b + c) = log. tg 15° 40′28″ = 9,4480971 — 10
+ log. cos 9° 27′ 18″ = 9,9940596 — 10
9,4421567 — 10
— log. cos 82° 5′ 52″ = 9,1382489 — 10
0,3039078
½(b + c) = 63° 35′ 11″.

log. tg ½(b — c) = log. tg 15° 40′ 28″ = 9,4480971 — 10
+ log. sin 9° 27′ 18″ = 9,2155660 — 10
8,6636631 — 10
— log. sin 82° 5′ 52″ = 9,9958563 — 10
8,6678068 — 10
½(b — c) = 2° 39′ 52″.

½(b + c) = 63° 35′ 11″
½(b — c) = 2° 39′ 52″
b = ab = 66° 15′ 3″.
c = ac = 60° 55′ 19″.

Da b′c = 127° 55′ 31″ und ac = 60° 55′ 19″, so erhält man für ab′ = 67° 0′ 12″.

3. Das nächstfolgende Dreieck ist abb′. In demselben sind bekannt:

$$A = 145^0\ 22'\ 38'' = \text{Winkel } b'ab.$$
$$b = 67^0\ 0'\ 12'' = \text{Seite } ab'.$$
$$c = 66^0\ 15'\ 3'' = \text{Seite } ab.$$

Wir berechnen den Winkel $b'ba = B = Y$ von P', ferner den Winkel $bb'a = C = Y$ von $'P$ durch die NAPIER'schen Analogien.

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (B + C) = \operatorname{cotg} {}^1/_2 A \,.\, \frac{\cos {}^1/_2 (b - c)}{\cos {}^1/_2 (b + c)}.$$

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 (B - C) = \operatorname{cotg} {}^1/_2 A \,.\, \frac{\sin {}^1/_2 (b - c)}{\sin {}^1/_2 (b + c)}.$$

$$\frac{b - c}{2} = 0^0\ 22'\ 34^1/_2'' \quad ; \quad \frac{b + c}{2} = 66^0\ 37'\ 37^1/_2''.$$

$$\begin{aligned}
\log. \operatorname{tg} {}^1/_2 (B + C) = \log. \operatorname{cotg} 72^0\ 41'\ 19'' &= 9{,}4937136 - 10 \\
+ \log. \cos 0^0\ 22'\ 34^1/_2'' &= 9{,}9999907 - 10 \\
\hline
& 9{,}4937043 - 10 \\
- \log. \cos 66^0\ 37'\ 37^1/_2'' &= 9{,}5984776 - 10 \\
\hline
& 9{,}8952267 - 10 \\
{}^1/_2 (B + C) &= 38^0\ 9'\ 17''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} {}^1/_2 (B - C) = \log. \operatorname{cotg} 72^0\ 41'\ 19'' &= 9{,}4937136 - 10 \\
+ \log. \sin 0^0\ 22'\ 34^1/_2'' &= 7{,}8173478 - 10 \\
\hline
& 7{,}3110614 - 10 \\
- \log. \sin 66^0\ 37'\ 37^1/_2'' &= 9{,}9628153 - 10 \\
\hline
& 7{,}3482461 - 10 \\
{}^1/_2 (B - C) &= 0^0\ 7'\ 40''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^1/_2 (B + C) &= 38^0\ 9'\ 17'' \\
{}^1/_2 (B - C) &= 0^0\ 7'\ 40'' \\
\hline
b'ba = B &= 38^0\ 16'\ 57'' = Y \text{ von } P'. \\
bb'a = C &= 38^0\ 1'\ 37'' = Y \text{ von } 'P.
\end{aligned}$$

Da Winkel $a'b'a = 103^0\ 45'\ 7''$ und Y von $'P = 38^0\ 1'\ 37''$, so ist Winkel $a'b'b = Y$ von $P_, = 65^0\ 43'\ 30''$; ferner erhält man, da Winkel $a'ba = 107^0\ 21'\ 26''$ ist, Y von P' den Werth $38^0\ 16'\ 57''$ hat, für den Winkel $a'bb' = Y$ von $,P$ den Werth $69^0\ 4'\ 29''$.

4. Nunmehr gehen wir in das Dreieck $a'ba$ ein und haben:

$$A = 107^0\ 21'\ 26'' = \text{Winkel } a'ba.$$
$$b = 74^0\ 46'\ 18'' = \text{Seite } a'b.$$
$$c = 66^0\ 15'\ 3'' = \text{Seite } ab.$$

Wir berechnen $B = a'ab = X$ von P' und $C = aa'b = X$ von $,P$.

$$\frac{b - c}{2} = 4^0\ 15'\ 37^1/_2'' \quad ; \quad \frac{b + c}{2} = 70^0\ 30'\ 40^1/_2''.$$

$$\log.\ tg\ {}^1/_2(B + C) = \log.\ cotg\ 53^0\ 40'\ 43'' = 9{,}8663748 - 10$$
$$+ \log.\ \cos 4^0\ 15'\ 37^1/_2'' = 9{,}9987983 - 10$$
$$9{,}8651731 - 10$$
$$- \log.\ \cos 70^0\ 30'\ 40^1/_2'' = 9{,}5232544 - 10$$
$$0{,}3419187$$
$${}^1/_2(B + C) = 65^0\ 31'\ 52''.$$

$$\log.\ tg\ {}^1/_2(B - C) = \log.\ cotg\ 53^0\ 40'\ 43'' = 9{,}8663748 - 10$$
$$+ \log.\ \sin 4^0\ 15'\ 37^1/_2'' = 8{,}8709291 - 10$$
$$8{,}7373039 - 10$$
$$- \log.\ \sin 70^0\ 30'\ 40^1/_2'' = 9{,}9743768 - 10$$
$$8{,}7629271 - 10$$
$${}^1/_2(B - C) = 3^0\ 18'\ 56''.$$

$${}^1/_2(B + C) = 65^0\ 31'\ 52''$$
$${}^1/_2(B - C) = 3^0\ 18'\ 56''$$
$$a'ab = B = 68^0\ 50'\ 48'' = X \text{ von } P'.$$
$$aa'b = C = 62^0\ 12'\ 56'' = X \text{ von } 'P.$$

Da Winkel b'ab = 145⁰ 22′ 38″ und X von P′ = 68⁰ 50′ 48″, so ist a′ab′ = X von ′P = 76⁰ 31′ 50″; ebenso hat man, da b′a′b = = 127⁰ 6′ 8″ und X von ,P = 62⁰ 12′ 56″ ist, aa′b′ = X von P, = = 64⁰ 53′ 12″.

5. In dem darauf folgenden Dreieck Cab sind gegeben:

B = 68⁰ 50′ 48″ = Winkel Cab = Winkel a′ab.
C = 38⁰ 16′ 57″ = Winkel Cba = Winkel b′ba.
a = 66⁰ 15′ 3″ = Seite ab.

Wir suchen A = Axenebenenwinkel C, ferner die Seiten c = Ca = μ und b = Cb = ϱ von P′.

Zur Berechnung von A hat man:

$$\cos A = \frac{\cos B\ .\ \sin(C - \varphi)}{\sin\varphi}$$
$$\text{mit } cotg\,\varphi = tg B\ .\ \cos a.$$

$$\log.\ cotg\,\varphi = \log.\ tg\ 68^0\ 50'\ 48'' = 0{,}4123590$$
$$+ \log\ \cos 66^0\ 15'\ 3'' = 9{,}6050176 - 10$$
$$0{,}0173766$$
$$\varphi = 43^0\ 51'\ 15''.$$

$$\log.\ \cos A = \log.\ \cos 68^0\ 50'\ 48'' = 9{,}5573449 - 10$$
$$+ \log.\ \sin(-5^0\ 34'\ 18'') = N.\ 8{,}9871779 - 10$$
$$N.\ 8{,}5445228 - 10$$
$$- \log.\ \sin 43^0\ 51'\ 15'' = 9{,}8406237 - 10$$
$$N.\ 8{,}7038991 - 10$$
$$A = \text{Axenebenenwinkel } C = 92^0\ 53'\ 55''.$$

Zur Bestimmung der zwei Seiten benützen wir die NAPIER'schen Analogien und haben:

$$\frac{B - C}{2} = 15^0\ 16'\ 55^1/_2'' \quad ; \quad \frac{B + C}{2} = 53^0\ 33'\ 52^1/_2''.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg}\ ^1/_2(b + c) = \log.\ \mathrm{tg}\ 33^0\ \ 7'\ 31^1/_2'' &= 9{,}8145966 - 10 \\
+ \log.\ \cos 15^0\ 16'\ 55^1/_2'' &= 9{,}9843652 - 10 \\
&\ 9{,}7989618 - 10 \\
- \log.\ \cos 53^0\ 33'\ 52^1/_2'' &= 9{,}7737253 - 10 \\
&\ 0{,}0252365 \\
^1/_2(b + c) &= 46^0\ 39'\ 49''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg}\ ^1/_2(b - c) = \log.\ \mathrm{tg}\ 33^0\ \ 7'\ 31^1/_2'' &= 9{,}8145966 - 10 \\
+ \log.\ \sin 15^0\ 16'\ 55^1/_2'' &= 9{,}4208983 - 10 \\
&\ 9{,}2354949 - 10 \\
- \log.\ \sin 53^0\ 33'\ 52^1/_2'' &= 9{,}9055404 - 10 \\
&\ 9{,}3299545 - 10 \\
^1/_2(b - c) &= 12^0\ 4'\ 0''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
^1/_2(b + c) &= 46^0\ 39'\ 49'' \\
^1/_2(b - c) &= 12^0\ \ 4'\ \ 0'' \\
\hline
b = \varrho &= 58^0\ 43'\ 49''. \\
c = \mu &= 34^0\ 35'\ 49''.
\end{aligned}$$

6. Es erfolgt schliesslich die Berechnung des Dreiecks a'b'C, worin bekannt sind:

B = 65° 43′ 30″ = Winkel a'b'C = Winkel a'b'b.

C = 64° 53′ 12″ = Winkel b'a'C = Winkel b'a'a.

a = 81° 21′ 57″ = Seite a'b'.

Gesucht sind b = a'C = μ' und c = b'C = ϱ' von $P_{,}$. Wir wenden wieder die NAPIER'schen Analogien an und haben:

$$\frac{B - C}{2} = 0^0\ 25'\ 9'' \quad ; \quad \frac{B + C}{2} = 65^0\ 18'\ 21''.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg}\ ^1/_2(b + c) = \log.\ \mathrm{tg}\ 40^0\ 40'\ 58^1/_2'' &= 9{,}9343050 - 10 \\
+ \log.\ \cos 0^0\ 25'\ 9'' &= 9{,}9999884 - 10 \\
&\ 9{,}9342934 - 10 \\
- \log.\ \cos 65^0\ 18'\ 21'' &= 9{,}6209420 - 10 \\
&\ 0{,}3133514 \\
^1/_2(b + c) &= 64^0\ 4'\ 47''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \mathrm{tg}\ ^1/_2(b - c) = \log.\ \mathrm{tg}\ 40^0\ 40'\ 58^1/_2'' &= 9{,}9343050 - 10 \\
+ \log.\ \sin 0^0\ 25'\ 9'' &= 7{,}8642593 - 10 \\
&\ 7{,}7985643 - 10 \\
- \log.\ \sin 65^0\ 18'\ 21'' &= 9{,}9583492 - 10 \\
&\ 7{,}8402151 - 10 \\
^1/_2(b - c) &= 0^0\ 23'\ 48''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
^1/_2(b + c) &= 64^0\ \ 4'\ 47'' \\
^1/_2(b - c) &= \ \ 0^0\ 23'\ 48'' \\
\hline
b = \mu' &= 64^0\ 28'\ 35''. \\
c = \varrho' &= 63^0\ 40'\ 59''.
\end{aligned}$$

Mit der Kenntniss von μ und μ', sowie von ϱ und ϱ' können die Axenwinkel β und α für den Octanten v.r.o, wie folgt, berechnet werden.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2\sin\mu \,.\, \sin\mu'}{\sin(\mu - \mu')}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \operatorname{tg}\beta = \log.\ \text{num.}\ 2 &= 0{,}3010300 \\
+ \log.\ \sin 34^0\,35'\,49'' &= 9{,}7541953 - 10 \\
+ \log.\ \sin 64^0\,28'\,35'' &= 9{,}9554130 - 10 \\
\hline
&\ 0{,}0106383 \\
- \log.\ \sin(- 29^0\,52'\,46'') &= \text{N}.\ 9{,}6973834 - 10 \\
\hline
&\ \text{N}.\ 0{,}3132549 \\
\beta &= 115^0\,55'\,31''.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sin\varrho \,.\, \sin\varrho'}{\sin(\varrho - \varrho')}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \operatorname{tg}\alpha = \log.\ \text{num.}\ 2 &= 0{,}3010300 \\
+ \log.\ \sin 58^0\,43'\,49'' &= 9{,}9318306 - 10 \\
+ \log.\ \sin 63^0\,40'\,59'' &= 9{,}9524802 - 10 \\
\hline
&\ 0{,}1853408 \\
- \log.\ \sin(- 4^0\,57'\,19'') &= \text{N}.\ 8{,}9364038 - 10 \\
\hline
&\ \text{N}.\ 1{,}2489370 \\
\alpha &= 93^0\,13'\,35''.
\end{aligned}$$

Mit der erlangten Kenntniss von C, β und α, sowie von μ, μ', ϱ, ϱ' ist die Aufgabe als gelöst, d. h. als auf das erste Beispiel zurückgeführt, zu betrachten. Man wird nunmehr ohne Mühe A, B und γ darstellen und das Axenverhältniss berechnen können. Ebenso leicht wird dem aufmerksam gefolgten Leser eine Deutung der bis jetzt noch nicht ausdrücklich benannten Axen- und Axenebenenwinkel, sowie der Kantenwinkel und der Hauptschnittswinkel in Fig. 1 auf Tafel IX. gelingen.

VI. Hexagonales System.

1. Feststellung des Krystallsystems. Axenverhältnisse.

Die Krystalle des hexagonalen Systems besitzen sieben Hauptschnitte, von denen einer der Reductionsebene des basischen Endflächenpaares entspricht, während die sechs anderen durch die Reductionsebenen der ersten und der zweiten sechsseitigen Säule dargestellt werden. Diese letzteren sechs Hauptschnitte sind tautozonal und schneiden sich unter Winkeln von 30°, der erstere steht auf ihnen senkrecht.

Wir betrachten als Axenebenen vorab stets den einen Hauptschnitt, welcher der Reductionsebene des basischen Endflächenpaares entspricht und von den sechs übrig bleibenden ziehen wir, nach unserer Wahl, drei fernere heran, die jedoch der Bedingung, dass ein jeder zum anliegenden unter 60° neige, unterworfen sind.

Lassen wir die so erhaltenen Axenebenen zum Schnitt kommen, so entstehen vier Axen, von denen drei in einer Ebene liegen und sich unter 60° schneiden, während die vierte auf ihnen senkrecht steht. Diese letztere Axe bezeichnen wir mit c und nennen sie die Hauptaxe, die ersteren heissen die Nebenaxen und erhalten die Buchstaben a, a′, a″.

Wie im quadratischen Systeme, entspricht auch im hexagonalen der Hauptaxe die optische Axe, so dass in jedem dieser beiden Systeme eine eminente Richtung gegeben ist, die für den Verlauf der Hauptaxe bestimmend wird; man nennt daher diese beiden Systeme auch solche mit absoluter Hauptaxe. Während in der eben erwähnten Weise quadratisches und hexagonales System eng verknüpft sind, fordert andererseits die Symmetrie des letzteren dazu auf, ihm seinen Platz direct nach dem regulären anzuweisen. Wir haben die Gründe, die uns bewogen, das hexagonale System zum Schluss abzuhandeln, auf pag. 187 auseinandergesetzt.

Kehren wir zu der Betrachtung des Axensystems zurück, so können wir uns zwischen je zwei Nebenaxen, in der Ebene der Basis, noch Axen b oder Zwischenaxen gelegt denken, welche die Winkel von 60°, die erstere mit einander bilden, halbiren. Man kann sich diese Zwischenaxen vorstellig machen als Schnittlinien der vorhin nicht in erster Linie zu Axenebenen erwählten drei, unter 60° zu einander geneigten Hauptschnitte mit der Basis. Das in dieser Weise vervollständigte Axensystem stellt sich als ein siebenzähliges dar; es haben alle sieben Hauptschnitte Verwendung zu Axenebenen gefunden. Man nennt die drei Schnitte, welche durch die Axe c und je eine der Axen a gelegt werden können, die normalen Hauptschnitte, bezeichnet als diagonale Hauptschnitte diejenigen drei, welche durch c und je eine Axe b gehen und erhält in dem alle Axen a und b in sich schliessenden Schnitt, den basischen Hauptschnitt.

Bringen wir das Axensystem in die gewöhnlich angenommene Stellung, so ist die Hauptaxe in der Richtung von oben nach unten verlaufen, und eine der Nebenaxen von rechts nach links ziehen zu lassen. Die beiden anderen Nebenaxen liegen dann gleichmässig zur rechten und linken Hand des Beobachters, und die Zwischenaxen halbiren die von den Nebenaxen gebildeten Winkel von 60°, so dass einer der Zwischenaxen die Richtung von vorn nach hinten zufällt. Selbstverständlich können Neben- und Zwischenaxen ihre Rollen vertauschen; hat man aber ein Mal drei, unter 60° zu einander geneigte Richtungen, die senkrecht auf der Hauptaxe stehen und denen eine gleiche Ausbildungsweise an den Krystallen entspricht, zu Neben- oder Zwischenaxen erkoren, so werden die übrig bleibenden drei, ebenfalls unter 60° zu einander geneigten Richtungen, die Zwischen- oder Nebenaxen abgeben müssen.

Alle vollflächigen Gestalten des Systems genügen der Symmetrieforderung, gebildet zu sein:

„Oben, wie unten und davon verschieden, aber unter sich gleich, in den Richtungen der Nebenaxen, sowie von dieser und der erstgenannten Ausbildungsweise abweichend, aber unter sich wieder gleich, in den Richtungen der Zwischenaxen.“

Gehen wir zu einer näheren Betrachtung des soeben abgeleiteten Axensystems, zunächst des vierzähligen, über, so erweisen sich in demselben die Axen a als gleich gross und unter 60° zu einander geneigt; die Axe c steht auf der Ebene der Axen a senkrecht und ist in ihrer Grösse von der der Nebenaxen verschieden. Die Neigungen sämmtlicher Axen zu einander sind bedingt durch die Neigungen der sie er-

zeugenden Axenebenen, und die gleiche Grösse der Nebenaxen, sowie die davon verschiedene Grösse der Hauptaxe, entspricht, holoëdrische Gestalten bei der Ableitung vorausgesetzt, der Symmetrieforderung des Systems.

Wenn wir diese Betrachtung auf den Grundkörper des Systems, die hexagonale Pyramide der ersten Art übertragen wollen, so machen wir die Bemerkung, dass, abweichend von dem, was wir in den vorhergegangenen Systemen kennen lernten, jetzt die Axenschnitte der Grundform nicht mehr mit denen ihrer Einzelflächen gleichbedeutend sind. Es folgt dies aus der Unmöglichkeit, dass eine Fläche der Grundform alle drei Nebenaxen in der Einheit schneide, und, wenn somit in einer Gestalt mP die Nebenaxen einander gleich sind, und die Hauptaxe einen davon verschiedenen Werth erlangt, so gehen die Flächen derselben von $\infty a : a' : a'' : mc$, also stets einer Nebenaxe parallel.

Das Zeichen der Axenschnitte einer Fläche der Grundform ist ein specieller Fall des allgemeinen Zeichens:

$$pa : a' : na'' : mc = mPn;$$

worin n stets > 1 und < 2; $p > 2$ und $< \infty$ ist. Die Grösse von m schwankt zwischen o und ∞; p lässt sich, wie wir später sehen werden, immer durch den Bruch $\frac{n}{n-1}$ darstellen und ist desshalb im Naumann'schen Zeichen fortgelassen.

Das Zeichen der Grundform $\infty a : a' : a'' : c = P$ bedeutet daher in diesem Systeme streng genommen nur Axenschnitte von Flächen derselben und stellt die Gestalt selbst nicht unmittelbar dar. Diese letztere Bedeutung erlangt es erst, wenn man annimmt, eine durch die Symmetrie des Systems und die Art der Axenschnitte bedingte Anzahl von Flächen sei zu einem höheren Complexe, einer Gestalt, vereinigt.

In allen Axenverhältnissen kommt indessen eine Axe a in der Einheit vor, d. h. man kann jedes Axenverhältniss so schreiben, dass dieser Bedingung genügt wird. Auf diese Axe $a = 1$ beziehen wir die Länge der Axe c, und es stellt somit $a : c$ $(a = 1)$ das für jeden, im hexagonalen Systeme krystallisirenden Körper zu ermittelnde Verhältniss dar. Da nur eine Unbekannte vorhanden ist, so genügt zu ihrer Bestimmung eine Winkelmessung.

Gehen wir zum Zwecke einer solchen Bestimmung von der hexagonalen Pyramide der ersten Art aus, so wendet dieselbe in richtiger Stellung dem Beobachter eine Randkante nebst einem daran anliegenden Flächenpaare zu. Der Symmetrie des Systems entsprechend weist die Pyramide sechs einander gleiche Randkantenwinkel und zwölf davon

in der Grösse verschiedene, aber unter sich gleiche Polkantenwinkel auf. Werden durch die Rand- und Polkanten, die Winkel derselben halbirend, Ebenen gelegt, so entstehen vier Axenebenen, von denen drei in einer Zone liegen und unter 60^0 zu einander geneigt sind, während die vierte auf diesen dreien senkrecht steht. Die Schnitte dieser Axenebenen geben die Hauptaxe und die Nebenaxen ab; die Hauptaxe verbindet in der Pyramide erster Art die Polecken, die Nebenaxen die Randecken.

Liegt die Stammform irgend eines hexagonalen Körpers vor, so kann entweder aus der Kenntniss des Randkanten- oder des Polkantenwinkels derselben, die Neigung der Polkante zur Nebenaxe in der Basis berechnet werden, und man hat in der Tangente dieser Neigung die relative Grösse der Hauptaxe.

Am Apatit sei der Randkantenwinkel von P durch sorgfältige Messungen zu $80^0\ 26'\ 49''$ bestimmt worden; man hat alsdann ein sphärisches Dreieck, Fig. 169, mit:

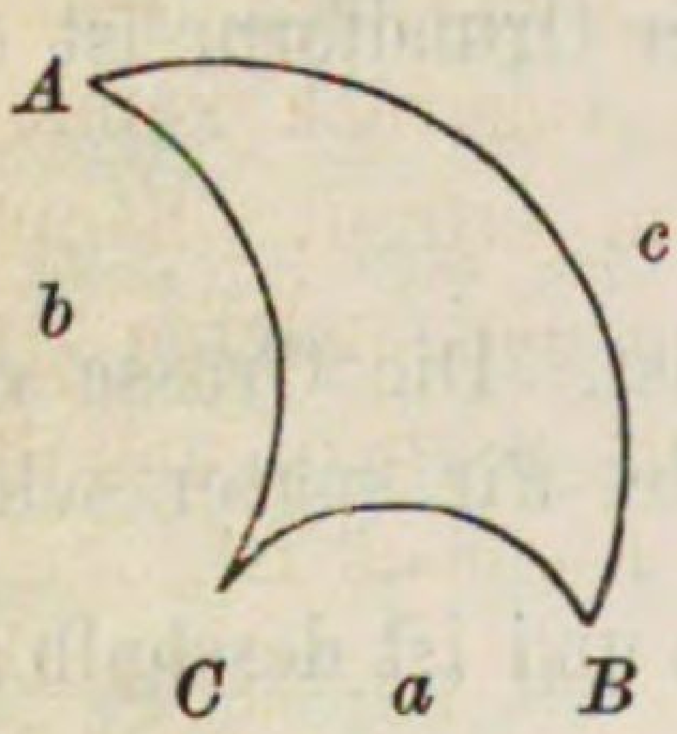


Fig. 169.

$$B = 40^0\ 13'\ 24\tfrac{1}{2}''.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 60^0.$$

Es findet statt: $\mathrm{tg}\,b = \sin a \,.\, \mathrm{tg}\,B = c.$

$$\log.\ \mathrm{num.}\ c = \log.\ \sin 60^0 = 9{,}9375306 - 10$$
$$+ \log.\ \mathrm{tg}\ 40^0\ 13'\ 24\tfrac{1}{2}'' = 9{,}9272512 - 10$$
$$9{,}8647818 - 10$$
$$\mathrm{num.}\ c = 0{,}732456.$$

— Was die Zwischenaxen anlangt, die im hexagonalen Systeme von erheblicher Bedeutung sind, so wurde ihre allgemeine Lage bereits angeführt. Während die Nebenaxen bei mP in den Randecken, bei mP2 in der Mitte der Randkanten, bei mPn in den im basischen Schnitte liegenden Endpunkten der Polkanten X münden, treffen wir die Zwischenaxen bei mP in der Mitte der Randkanten, bei mP2 in den Randecken und bei mPn in den im basischen Schnitte liegenden Endpunkten der Polkanten Y an.

Für mPn ist ihre Länge, wie bei der Zonenbetrachtung der Pyramiden mPn bewiesen werden wird, vergl. pag. 322:

$$R = \frac{n\sqrt{3}}{n+1}.$$

Dieser Werth geht für $n = 1$, also für die Pyramiden mP, in $R = \sqrt{3/4}$ über; bei den Pyramiden mP2 ist $n = 2$; man erhält daher $R = \sqrt{4/3}$.

Bezeichnet man $R = \sqrt{3/4}$ als den Grundwerth der Zwischenaxen, so erhält der Coëfficient r, mit dem dieser Grundwerth multiplicirt werden muss, um auf die Grösse der Zwischenaxe irgend einer Gestalt mPn zu kommen, den Werth:

$$r = \frac{2n}{n+1}.$$

Anmerkung. Für die regelmässig zwölfseitige Pyramide würde $R = 1$ sein, daher $n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ werden. Derartige Pyramiden sind jedoch, in Folge des irrationalen Werthes von n, in der Krystallwelt nicht möglich.

— Dies vorstehend nach dem Vorgange von WEISS, NAUMANN und ihren Nachfolgern angenommene vierzählige (und, vervollständigt, siebenzählige) Axensystem hat, obwohl durch es allein das Naturgemässe in der Bildung hexagonaler Krystalle zum Ausdruck kommt, sich doch nicht des Beifalls aller Krystallographen erfreut, hauptsächlich wohl desshalb nicht, weil, abweichend von den anderen Systemen, die Gestalten nunmehr auf vier Axen bezogen werden, und die vierte Axe ein für Rechnungszwecke unbrauchbares Element ist.

So hat die MILLER'sche Schule es vorgezogen, den Gestalten des hexagonalen Systems drei gleich grosse, unter gleichen Winkeln zu einander geneigte Axen unterzulegen, die, in der hemiëdrischen Abtheilung, direct den Polkanten des betreffenden Stammrhomboëders entsprechen. Es ist hierbei die Angabe der Grösse des Winkels, unter dem diese Axen zu einander geneigt sind, ein der relativen Länge unserer Hauptaxe entsprechendes Bestimmungsmoment.

Ferner hat SCHRAUF,* wohl einsehend, dass durch diese Darstellungsweise den physikalischen Verhältnissen nicht genügend Rechnung getragen werde und namentlich die optische Axe ihren krystallographischen Repräsentanten nicht finde, das System auf drei senkrechte Axen $a : a\sqrt{3} : c$ bezogen. Es entspricht hierbei c unserer Hauptaxe und a einer unserer Nebenaxen, während der Werth der dritten SHRAUF'schen Axe $= a\sqrt{3}$ in einfacher Weise sich aus unseren beiden anderen Axen a ableitet. Derselbe stellt nämlich den Werth der längeren Diagonale des Parallelogramms dar, welches man mit den beiden, unter 60° zu einander geneigten Axen a construiren kann.

Die Vortheile dieser beiden Darstellungsarten bestehen, gegenüber der von uns angenommenen, darin, ein Axensystem zu besitzen, welches

* POGG. Annalen 1860; Lehrb. d. phys. Min. B. I. 1866 p. 134 u. f.

direct zu Rechnungszwecken verwendbar ist, während wir mit unserem vierzähligen Axensystem nicht unmittelbar rechnen können, dasselbe vielmehr erst einer, wenngleich sehr leicht zu bewerkstelligenden Transformation unterziehen müssen. Zu Gunsten der SCHRAUF'schen Ansicht ist dann ferner noch hervorzuheben, dass durch sie das hexagonale System mit dem Axenverhältniss a : a $\sqrt{3}$: c passend dem quadratischen a : a : c angereiht werden kann, mit dem es durch so viele Beziehungen verknüpft ist. — Sonach wird es durch den SCHRAUF'schen Vorschlag möglich, das hexagonale System in die Gesammtreihe der übrigen einzufügen, so dass diese alsdann von Gestaltencomplexen gebildet wird, deren eines Endglied die höchste Symmetrie darstellt, während das andere in völlige Unsymmetrie verläuft.

Den Vortheilen, welche die dreizähligen Axensysteme für die Betrachtung einiger Verhältnisse der hexagonalen Krystalle gewähren, stehen indessen, für die erste Darstellung namentlich, nicht minder empfindliche Mängel gegenüber.

So ist MILLER genöthigt, gewisse holoëdrische Gestalten, z. B. die Pyramiden mP als aus zwei Rhomboëdern mit verschiedenen Symbolen bestehend anzusehen. Es würde in seiner, die inversen Werthe der Axenschnitte berücksichtigenden Schreibweise, die Pyramide $^5/_3$P sich demnach zusammensetzen aus:

$$13.\bar{2}.\bar{2}, \text{ entsprechend } + {}^5/_3 R$$
$$\text{und } 8.8.\bar{7}, \text{ entsprechend } - {}^5/_3 R.$$

Um die zwölfseitigen Pyramiden auszudrücken, müssen die Zeichen zweier Skalenoëder angeschrieben werden, die wieder von Grund aus verschieden sind. Die Pyramide 3P$^3/_2$ würde, bezogen auf das MILLER'sche Axensystem und in seiner Schreibweise, liefern:

$$2.0.\bar{1}, \text{ entsprechend } + R3$$
$$\text{und } 5.2.\bar{4}, \text{ entsprechend } - R3.$$

SCHRAUF kann ebenfalls die Holoëder nicht als solche ausdrücken, sondern muss sie als Combinationen darstellen, so zerfällt z. B. die hexagonale Pyramide P bezüglich ihrer Axenschnitte in:

$$1.1.1, \text{ entsprechend } P$$
$$\text{und } 2.0.1, \text{ entsprechend } 2P\breve{\infty}.$$

Wir sehen sonach, dass keine dieser beiden Bezeichnungsweisen, das Naturgemässe der Krystallausbildung so hervortreten zu lassen vermag, wie es WEISS durch sein drei- und eingliedriges System zum Ausdruck brachte.

Mit Rücksicht darauf ist es gewiss freudig zu begrüssen, dass GROTH* kürzlich wieder darauf aufmerksam gemacht hat, in welch' einfacher Weise die inversen Werthe der auf vier Axen bezogenen Ausdrücke des WEISS'schen Flächenzeichens im hexagonalen System in die MILLER'sche Notation aufgenommen und damit die Rechnungen geführt werden können. Es ist zu wünschen, dass dadurch eine Bezeichnungsweise, die schon früher FRANKENHEIM**, unter Beschränkung auf die holoëdrische Abtheilung des Hexagonalsystems, vorschlug, nunmehr durchdringen und Anklang finden möge.

2. Einsicht in den Zonenzusammenhang des Systems durch die Projection. Allgemeine Betrachtungen. Einführung des Schrauf'schen orthohexagonalen Axenverhältnisses a : a $\sqrt{3}$: c und Reduction der Axenschnitte der Gestalten auf dasselbe zum Zwecke der Winkelberechnung mit der nur für rechtwinkelige Axen abgeleiteten Winkelformel.

Nirgends mehr als in dem hexagonalen Systeme erlangt die Projectionsmethode eine so beträchtliche Wichtigkeit; wir wenden ihr daher unsere volle Aufmerksamkeit zu.

1. Herleitung des WEISS'schen vollständigen Flächenzeichens und Anwendung desselben. Rechnung mit der Projection.

Es seien zwei ungleich grosse, schiefwinkelige Axen a und b gegeben, Fig. 170; für die Quadranten vorn rechts und vorn links seien die mit den Einheiten der Axen zu construirenden Parallelogramme hergestellt und deren Diagonalen od und od′ gezogen. Schneidet nun eine beliebige Linie $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu}$ die Axen, so ist der Schnitt auf od = $= \frac{d}{\mu + \nu}$, der auf od′ $= \frac{d'}{\mu - \nu}$.

Um dies zu beweisen, setzen wir die Längen od und od′ kurzweg gleich d und d′, bezeichnen die gesuchten Axenschnitte mit x und x′ und machen geltend, dass den Schnittpunkten auf d und d′ die Coor-

* Min. Mitth., gesammelt von TSCHERMAK 1874. III. p. 223—226.

** System der Krystalle 1842, p. 49 (517) u. f.; schärfer präcisirt ist FRANKENHEIM's Vorschlag im ersten Band seines nicht vollendeten Werkes: „Zur Krystallkunde“ 1869 p. 77 u. 78.

dinaten $\frac{a}{\mu+\nu} : \frac{b}{\mu+\nu}$ und $\frac{a}{\mu-\nu} : -\frac{b}{\mu-\nu}$ zukommen müssen, da d und d′ die Kantenzonenlinien (Sectionslinien der Säule a : b : ∞c) sind.

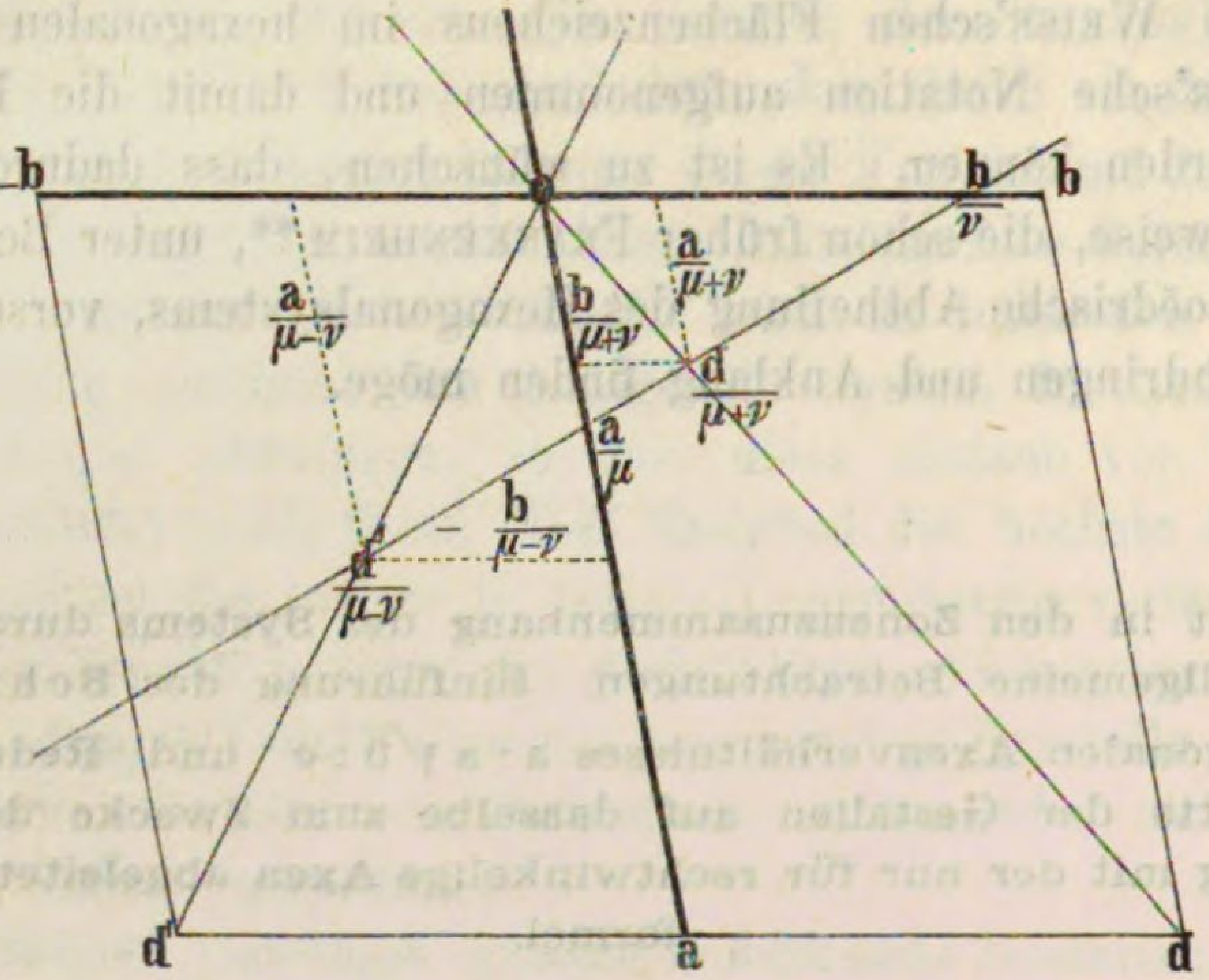


Fig. 170.

Man hat aber alsdann sofort:

1) $d : b = x : \frac{b}{\mu+\nu}$; daraus $x = \frac{d}{\mu+\nu}$.

2) $d' : -b = x' : -\frac{b}{\mu-\nu}$; daraus $x' = \frac{d'}{\mu-\nu}$.

Diese Betrachtung vorausgeschickt, können wir zur Herleitung des Weiss'schen vollständigen Flächenzeichens schreiten (vergl. Abh. d. Berl. Academie a. d. Jahren 1816—17, pag. 321).

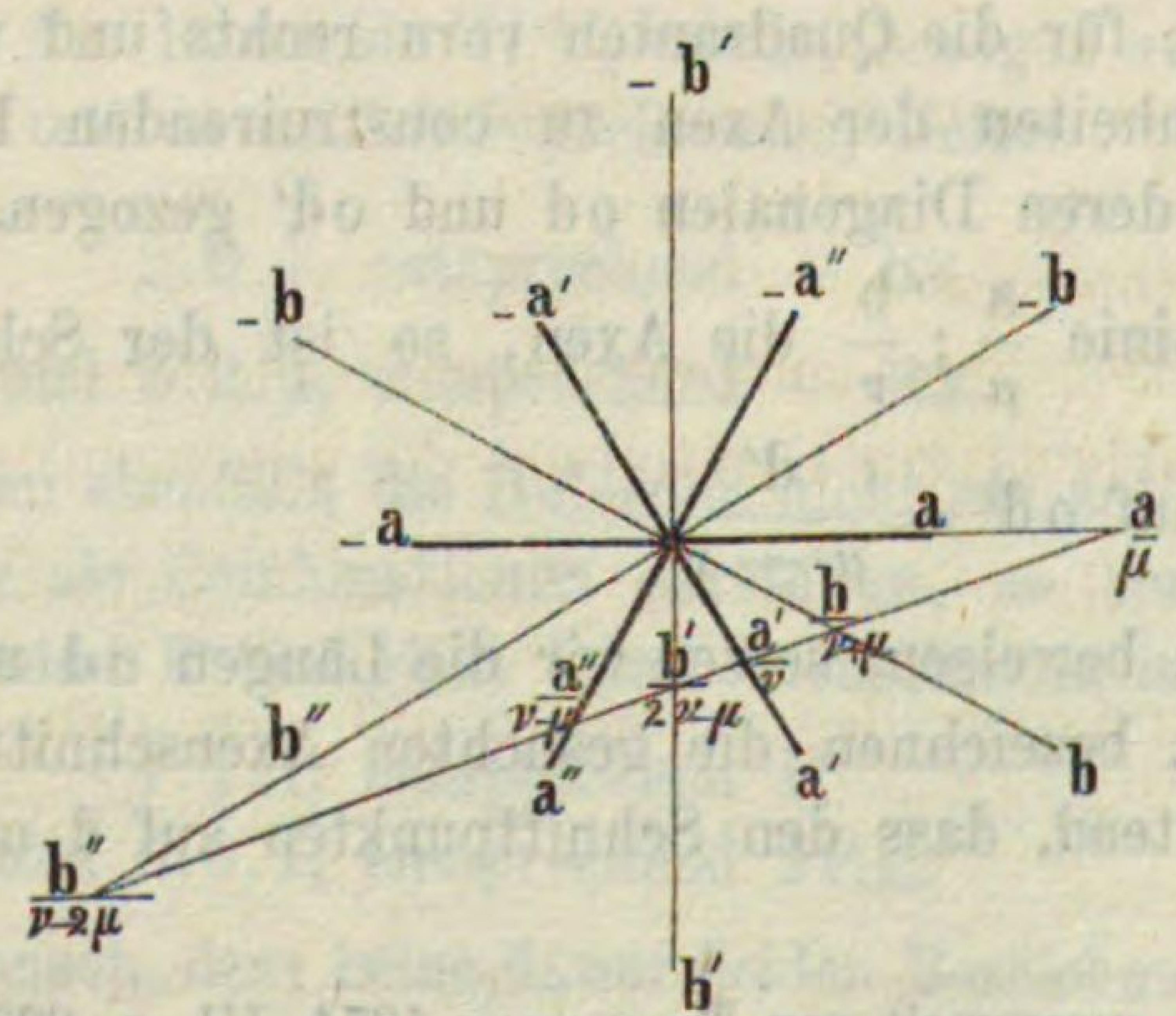


Fig. 171.

Es stelle Fig. 171 die drei gleich grossen, unter 60° zu einander geneigten Nebenaxen a, a′, a″ des Systems dar. Greifen wir zwei

heraus, z. B. a und a′, so ist a″ die den stumpfen Winkel dieser ersteren halbirende Kantenzonenlinie. Eine beliebige Linie $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu}$ $\left(\text{mit } \frac{a}{\mu} > \frac{a'}{\nu}\right)$ muss daher a″ in $\frac{a''}{\nu - \mu}$ schneiden und es wird: $\frac{a}{\mu} > \frac{a''}{\nu - \mu}$ und $\frac{a'}{\nu} < \frac{a''}{\nu - \mu}$ sein müssen, d. h. es werden sich im Zeichen grösster, kleinster und mittlerer Axenschnitt folgen. Legen wir zwischen je zwei Axen a eine Zwischenaxe b, so wird die beliebige Linie $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu}$ mit den Zwischenaxen: b, b′, b″ gleichfalls zum Schnitt kommen. Jede Zwischenaxe kann aber aufgefasst werden als die im spitzen Winkel zweier Nebenaxen liegende Kantenzonenlinie, welche, da die Nebenaxen gleiche Grösse haben, nothwendig den Winkel derselben halbiren muss. Die Schnitte der beliebigen Linie auf b, b′, b″ werden in Folge dessen nach dem ersten Kantenzonengesetz erfolgen und man wird erhalten:

Für den Schnitt auf b $= \frac{b}{\nu + \mu}$, weil zwischen $\frac{a}{\mu}$ und $\frac{a'}{\nu}$ gelegen,

„ „ b′ $= \frac{b'}{2\nu - \mu}$, „ „ $\frac{a'}{\nu}$ und $\frac{a''}{\nu - \mu}$ gelegen,

„ „ b″ $= \frac{b''}{\nu - 2\mu}$, „ „ $\frac{a''}{\nu - \mu}$ und $-\frac{a}{\mu}$ gelegen.

Das vollständige Zeichen der Sectionslinie ist also gegeben durch:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu}$$

und stellt in dieser Form den allgemeinsten Fall dar, in welchem die Linie alle Neben- und Zwischenaxen schneidet und zwar in unter sich verschiedenen Verhältnissen.

Die der Sectionslinie entsprechende Reductionsebene geht dabei durch c in der Einheit; zur Darstellung des allgemeinsten Falls könnte man sie auch die Hauptaxe in dem Abstand $\frac{c}{\pi}$ schneiden lassen.

Durch Hinzufügung des Schnittes auf der Hauptaxe wird das vollständige Weiss'sche Flächenzeichen dargestellt, in dem das Gesetz herrscht:

„Jeder Nenner von b ist gleich der Summe der Nenner der rechts und links davon liegenden Axen a.“

Hierdurch ist das Zeichen leicht dem Gedächtniss einzuprägen; übrigens gilt auch noch bezüglich der Axen a:

„Jeder Nenner von a ist $= \frac{1}{3}$ der Summe der Nenner der dieser Axe a anliegenden Axen b.

Man hat nämlich:

$$\mu = \tfrac{1}{3}([\ \nu + \mu] + [-\nu + 2\mu]).$$
$$\nu = \tfrac{1}{3}([\ \nu + \mu] + [\ 2\nu - \mu]).$$
$$\nu - \mu = \tfrac{1}{3}([2\nu - \mu] + [\ \nu - 2\mu]).$$

Die Länge der Axen b kann in einfacher Weise auf die der Axen a bezogen werden, wenn man die Einheiten der Axen b sich gegeben denkt als längere Diagonalen der Parallelogramme, die mit je zwei, unter 60^0 zu einander geneigten Axen a zu construiren sind. Man erhält alsdann für die halbe Länge der so bestimmten Axe b den Werth a . cos 30^0, folglich für die ganze Axe b $= 2$a . cos $30^0 =$ a$\sqrt{3}$.

Um zu erweisen, wie einfach sich viele Bestimmungen mit Hülfe des Weiss'schen Flächenzeichens vornehmen lassen, wenden wir uns der Lösung einiger Aufgaben zu.

Gegeben sei die Stammpyramide P $= \infty$a : a' : a'' : c, gesucht seien:

a. Die erste stumpfere Pyramide mP2, welche die Polkanten von P gerade abstumpft.

b. Die erste spitzere Pyramide mP2, deren Polkanten durch die Flächen von P gerade abgestumpft werden.

c. Die in den Polkanten von P verhüllt liegende Pyramide mP2. Es ist dies diejenige, deren Combinationskanten zu P den Polkanten von P parallel gehen.

Da die Pyramiden sämmtlich vom Zeichen mP2 sind, so werden, in einer Projection auf oP, Tafel IX, Fig. 2, ihre Sectionslinien den Zwischenaxen (Projectionen von ∞P2) parallel gehen müssen, während die Sectionslinien von P den Nebenaxen (Projectionen von ∞P) parallel gerichtet sind.

Fassen wir, zur Vereinfachung der Sache, vorzugsweise nur die Sectionslinie der mP2 in's Auge, welche auf der vorderen (positiven) Seite der Axe b'' parallel geht, so tritt zu dem allgemeinen Zeichen:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu}$$

die Bedingungsgleichung $\nu - 2\mu = 0$, wodurch dasselbe für alle mP2 übergeht in:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{3\mu} : \frac{a'}{2\mu} : \frac{b'}{3\mu} : \frac{a''}{\mu} : \frac{b''}{o}.$$

a. mP2, welches die Polkanten von P gerade abstumpft, liegt mit den Flächen, durch welche jene Polkanten von P gebildet werden, in

einer Zone. In der Projection ist dies für die drei entsprechenden Sectionslinien und für die oben geforderte Lage der Sectionslinie von mP2 der Zonenpunkt a′. Der Schnitt auf dieser Axe ist = 1. Daher $2\mu = 1$; $\mu = {}^1/_2$. Dies gibt in das specielle Zeichen eingesetzt:
$\frac{a}{{}^1/_2} : \frac{b}{{}^3/_2} : \frac{a'}{1} : \frac{b'}{{}^3/_2} : \frac{a''}{{}^1/_2} : \frac{b''}{0} = 2a : a' : 2a'' : c$, welcher Ausdruck dem NAUMANN'schen Zeichen P2 entspricht.

b. mP2, dessen Polkanten durch die Flächen von P gerade abgestumpft werden, liegt in b′ mit dem Schnitt ${}^1/_2$, daher ist $3\mu = 2$; $\mu = {}^2/_3$. Somit erhält man:
$\frac{a}{{}^2/_3} : \frac{b}{2} : \frac{a'}{{}^4/_3} : \frac{b'}{2} : \frac{a''}{{}^2/_3} : \frac{b''}{0} = {}^3/_2a : {}^3/_4a' : {}^3/_2a'' = 2a : a' : 2a'' : {}^4/_3c =$
$= {}^4/_3P2$.

c. mP2, welches in den Polkanten von P verhüllt liegt, hat den Schnitt a = 1, also ist $\mu = 1$, daher folgt:
$\frac{a}{1} : \frac{b}{3} : \frac{a'}{2} : \frac{b'}{3} : \frac{a''}{1} : \frac{b''}{0} = a : {}^1/_2a' : a'' = 2a : a' : 2a'' : 2c = 2P2$.

Wir sehen aus diesen Beispielen, wie einfach die Rechnungen werden, wenn zu denselben das WEISS'sche Flächenzeichen verwendet wird. Man wird fast alle vorkommenden Fälle durch Anwendung desselben lösen können, da nur selten Schnittpunkte in der Projection zu berücksichtigen sind, die nicht auf einer der sechs Axen liegen.

Wenn es sich in solchen Fällen um die Rechnungen mit der Projection, wie Darstellung der Coordinaten der Zonenpunkte, der Axenschnitte der Sectionslinien, der Zonencontrole u. s. w. handelt, so ist das in der Ebene der Projection befindliche dreizählige Axensystem nicht direct zu verwenden. Man schafft sich aber in allereinfachster Weise ein zu den Rechnungen taugliches zweizähliges Axensystem in der Ebene der Projection, wenn man die eine Axe, z. B. a″, in Gedanken weglässt, alle Rechnungen mit den zwei anderen a und a′, die unter 60° und 120° zu einander geneigt sind, führt und am Schlusse der Rechnung das Resultat, wenn es nöthig wird, noch auf die dritte Axe a″ nach dem Kantenzonengesetz bezieht.

Als Beispiel dafür, dass man, bei richtigem Gebrauch des WEISS'schen Flächenzeichens und des in eben erwähnter Weise herzustellenden zweizähligen Axensystems, scheinbar recht verwickelte Combinationen ohne alle Rechnung entwickeln könne, diene nachstehende Deduction eines Krystalls von:

Apatit aus dem Untersulzbachthal im Pinzgau.*

Eine allgemeine Bestimmung des auf Tafel IX. in Fig. 3 abgebildeten Krystalls lässt folgende Gestalten erkennen, bei deren Ermittelung wir von x = P und M = ∞P ausgehen:

$$oP\ ,\ mP\,(m > 1)\ ,\ nP\,(n < 1)\ ,\ mP2\ ,\ \infty P2\ ,\ \text{drei}\ \frac{r}{l}\ \frac{mPn}{2}.$$

P , y , r , s , u , m, n, o .

Zu diesen letzteren drei Pyramiden der dritten Art, tritt ferner noch in entgegengesetzter Stellung $m' = \frac{l}{r}\ \frac{mPn}{2}$ hinzu, so dass die scheinbar holoëdrische Gestalt m hergestellt wird.

1. Wir fertigen, soweit dies für die Ableitung erforderlich ist, eine Projection von P, ∞P, ∞P2 auf oP an, Tafel IX. Fig. 4, und bestimmen zunächst s, wie im vorigen Beispiel, zu 2P2.

2. Hierauf wenden wir uns zu m, gelegen auf der Seite, auf welcher auch n und o auftreten. Eine Fläche $\underline{m}$ fällt in die Zonen:

$$\underline{x} : \underline{u}\ ;\ \text{Coord. d. Z.}\ -2a : a'$$
$$\text{und}\ \underline{M} : \underline{s}\ ;\ \text{Coord. d. Z.}\quad a : oa'.$$

Im vollständigen Zeichen:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu} : c$$

wird daher: $\frac{a}{\mu} = \frac{a}{1}$; $\frac{b''}{\nu - 2\mu} = 1$, woraus $\nu = 3$ folgt.

Man erhält also $\underline{m} = \frac{a}{1} : \frac{a'}{3} : \frac{a''}{2} = 3a : a' : {}^3/_2 a'' : 3c = \frac{r}{l}\ \frac{3P^3/_2}{2}$.

3. Zur Ableitung von $\underline{o}$ haben wir die Zonen:

$$\underline{x} : \underline{u}\ ;\ \text{Coord. d. Z.}\ -2a : a'.$$
$$\text{und}\ M : \underline{s}\ ;\ \text{Coord. d. Z.}\quad oa : {}^1/_2 a'.$$

Letztere Zone wäre am Reflexionsgoniometer zu controliren; sie sagt aus, dass $\underline{s}$ die im normalen Hauptschnitt liegenden Polkanten X der vollflächigen Pyramide o gerade abstumpfen würde.

Im vollständigen Zeichen ist daher: $\frac{a'}{\nu} = \frac{a'}{2}$; $\frac{b''}{\nu - 2\mu} = \frac{b''}{1}$,

folglich wird $\mu = {}^1/_2$, somit $o = \frac{a}{{}^1/_2} : \frac{a'}{2} : \frac{a''}{{}^3/_2} = 4a : a' : {}^4/_3 a'' : 2c = \frac{r}{l}\ \frac{2P^4/_3}{2}$.

* Vergl. die Mitth. des Verf. im N. Jahrb. f. Min. 1871. pag. 485. Daselbst ist, in Folge der irrthümlichen Angabe eines Händlers, als Fundort das Obersulzbachthal aufgeführt.

4. Die Gestalt y = mP bestimmt sich mit ihrer Fläche $\underline{y}$ sofort zu 2P, weil die Zone $\underline{y} : \underline{o} : \underline{s}$ gegeben ist.

5. Für die Gestalt n, welche mit ihrer Fläche $\underline{n}$ horizontale Combinationskanten mit $\underline{o}$ bildet, könnte man das allgemeine Zeichen $mP^4/_3$ herleiten und aus der Zone $\underline{M} : \underline{s}$ dann m = 4 ermitteln. Eben so einfach macht sich die Sache, wenn man die genannte Zone und die Zone $\underline{y} : \underline{u}$, Coord. des Zonenp. $- a : {}^1/_2 a'$ berücksichtigt.

Man erhält alsdann: $\frac{a}{\mu} = \frac{a}{1}$ und $\frac{b''}{\nu - 2\mu} = \frac{b''}{2}$, daraus folgt $\nu = 4$, folglich wird $n = \frac{a}{1} : \frac{a'}{4} : \frac{a''}{3} = 4a : a' : {}^4/_3 a'' : 4c = \frac{r}{l}\ \frac{4P^4/_3}{2}$.

6. Was die andere hemiëdrische Hälfte von m anlangt, so fällt die Fläche m′ in die Zonen:

$\underline{s}$: M′ ; Coord. d. Zonenp. — a : a′
und y′ : s′ ; Coord. d. Zonenp. $^1/_2 a : o a'$.

Im vollständigen Zeichen wird $\frac{a''}{\mu} = \frac{a''}{1}$; $\frac{a}{\nu - \mu} = \frac{a}{2}$, folglich ist $\nu = 3$; man erhält also $m' = \frac{a''}{1} : \frac{a'}{3} : \frac{a}{2} = 3a'' : a' : {}^3/_2 a : 3c = \frac{1}{r}\ \frac{3P^3/_2}{2}$.

7. Die letzte Gestalt ist r = nP (n < 1). Für sie lässt sich durch Kantenparallelismus keine zweite bestimmende Zone nachweisen, indessen ergibt eine Prüfung am Reflexionsgoniometer, dass für die Fläche r (am Krystall oben links) ein Zonenverband mit $\underline{x}$, $\underline{o}$, $\underline{m}$, $\underline{u}$ besteht. r leitet sich daraus sofort zu $^1/_2$P ab.

2. Zonenverhältnisse des Systems.

a. Uebersetzung des Weiss'schen Zeichens in das Naumann'sche und umgekehrt.

In dem Weiss'schen Flächenzeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : c$ folgen sich bezüglich der Nebenaxen: grösster, kleinster und mittlerer Axenschnitt; es haben also μ, ν, $\nu - \mu$ den kleinsten, grössten und mittleren Werth.

Im Naumann'schen Zeichen mPn bezieht sich m auf die Hauptaxe, eine der Nebenaxen ist = 1 gesetzt, ihr entspricht der kleinste Werth, eine andere erscheint im Zeichen mit dem Werthe n > 1 < 2, und es kommt derselben der mittlere Werth des Schnittes der Fläche auf den Nebenaxen zu. Die dritte Nebenaxe, der der grösste Werth entspricht,

ist im Zeichen nicht ausgedrückt, jedoch jederzeit durch die Bedingung $\frac{n}{n-1}$ aus den beiden anderen zu bilden, wie alsbald bewiesen werden soll.

Für die Zonenbetrachtung ist es von grösstem Interesse rasch von einem WEISS'schen Zeichen auf ein NAUMANN'sches übergehen zu können und umgekehrt.

Um von einem NAUMANN'schen Zeichen mPn zu einem WEISS'schen $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : c$ überzugehen, dividire man mit m in den Werth des Axenschnitts a = 1, es wird alsdann der kleinste Werth $^1/m$ resultiren, dessen inverser Werth m offenbar ν als dem grössten entspricht. Dividirt man ferner mit m in n, so folgt der mittlere Werth $^n/m$, dessen inverser Werth der mittlere bleibt und in $^m/n$ dem WEISS'schen $\nu - \mu$ entspricht.

$$\text{Wir haben also: } m = \nu$$

$$^m/n = \nu - \mu.$$

$$\text{Folglich: } \frac{m(n-1)}{n} = \mu.$$

Da aber μ der kleinste Werth ist, so entspricht ihm in dieser Eigenschaft auch $\frac{m(n-1)}{n}$.

Hiermit kann das WEISS'sche Zeichen gebildet werden und es ergibt die NAUMANN'sche Pyramide mPn in WEISS'scher inverser Schreibweise:

$$\frac{a}{\frac{m(n-1)}{n}} : \frac{a'}{m} : \frac{a''}{\frac{m}{n}} : c$$

und daraus folgt das directe Axenzeichen zu:

$$\frac{n}{n-1} a : a' : na'' : mc,$$

welches der Bildung des NAUMANN'schen Zeichens mPn zu Grunde liegt.

Um ferner von einem WEISS'schen Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - \mu}$ zu dem NAUMANN'schen mPn überzugehen ist, da: $\nu = m$, $\nu - \mu = {}^m/n$, auch $n = \frac{\nu}{\nu - \mu}$. Man hat daher ganz einfach in $\nu P \frac{\nu}{\nu - \mu}$ das gesuchte Zeichen.

b. Zonen der Hauptaxe, der Nebenaxen und der Zwischenaxen. Wichtigste Zonenverhältnisse der Pyramiden mPn.

Die Zone der Hauptaxe begreift alle Gestalten in sich, deren Schnitte auf der Hauptaxe im Abstand ∞ erfolgen, also:

$$\infty P\ ,\ \infty Pn\ ,\ \infty P2.$$

Die Zonen der Nebenaxen sind in der Zahl drei vorhanden und enthalten alle mP, in welchem Zeichen m alle rationalen Werthe von o bis ∞ annehmen kann.

Die Zonen der Zwischenaxen, deren es ebenfalls drei gibt, enthalten alle mP2. $(m > o < \infty)$.

Gehen wir zur Betrachtung der wichtigsten Zonenverhältnisse der Pyramiden mPn über, so berücksichtigen wir bei diesen selten holoëdrisch und immer sehr untergeordnet auftretenden Gestalten nur die Formen, welche als gerade Abstumpfungen ihrer Polkanten auftreten und in denselben verhüllt liegen.

Entwickeln wir in einer Projection auf oP, Tafel IX, Fig. 5, das vollständige Zeichen einer mPn, so befindet sich die betreffende normale Polkante in $\frac{a'}{\nu}$, die diagonale in $\frac{b'}{2\nu - \mu}$.

Die normale Polkante wird daher abgestumpft durch die Pyramide mP2 $(m = \nu)$, da für deren Sectionslinie die Bedingungsgleichung $\nu - 2\mu = o$ besteht; ihr Ausdruck also zu: $\frac{a}{{}^1\!/_2\nu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{{}^1\!/_2\nu} : c = \nu P2$ (mP2) wird. Verhüllt liegt in dieser Polkante die Pyramide mP $(m = \nu)$, d. h. diese Pyramide tritt so in den diagonalen Polkanten von mPn auf, dass die Combinationskanten der Pyramide der ersten Art zur Pyramide mPn den normalen Polkanten letzterer parallel gerichtet sind.

Die diagonale Polkante wird gerade abgestumpft durch eine Pyramide der ersten Art, die in $\frac{b'}{2\nu - \mu}$ einschneidet. Da für ihre Sectionslinie die Bedingungsgleichung $\mu = o$ besteht, so ist ihr Axenschnitt auf b', nämlich $\frac{b'}{2\nu - \mu} = \frac{b'}{2\nu}$, daher $2\nu = (2\nu - \mu)$ und $\nu = \frac{(2\nu - \mu)}{2}$. Setzen wir den aus dem Zeichen von mPn entnommenen Werth $(2\nu - \mu) = n'$, so wird die Pyramide zu $\frac{n'}{2}$ P. Drücken wir den Werth $(2\nu - \mu)$ in Werthen von m und n der Pyramide mPn aus, so folgt: $\frac{n'}{2} P = \frac{m(n+1)}{2n} P.$

Was die in dieser Polkante verhüllt liegende Pyramide der zweiten Art anlangt, so ist für ihre Sectionslinie, vergl. Tafel IX, Fig. 5, zunächst die Bedingungsgleichung $\nu - 2\mu = o$ gegeben, woraus $\nu = 2\mu$ folgt; ihr Axenschnitt auf b′ wird somit zu $2\nu - {}^1\!/_2\nu = {}^3\!/_2\nu$, daher ${}^3\!/_2\nu = (2\nu - \mu)$ und $\nu = \frac{2(2\nu - \mu)}{3}$. Bedeutet, wie oben, n′ den aus der Pyramide mPn stammenden Werth $(2\nu - \mu)$, so erhält die Pyramide der zweiten Art das Zeichen $\frac{2n'}{3}$P2. Wird der Werth $(2\nu - \mu)$ in Werthen von m und n der Pyramide mPn ausgedrückt, so folgt: $\frac{2m(n+1)}{3n}$P.

Anmerkung. Um den pag. 310 aufgeführten Werth der Zwischenaxen der Pyramiden mPn abzuleiten, stellen wir uns vor, in der Projection derselben, Tafel IX, Fig. 5, sei die Hauptaxe c nicht $= 1$, sondern $=$ mc gesetzt. Alsdann wird der Axenschnitt $\frac{a'}{\nu}$ zu $\frac{a'}{1}$ und $\frac{a''}{\nu - \mu}$ zu $\frac{a''}{{}^1\!/n}$, folglich wird der Schnitt auf b′ zu $\frac{b'}{1 + {}^1\!/n} = \frac{b'}{\frac{n+1}{n}}$. Da nun $b' = a'\sqrt{3}$ ist, so folgt, bezogen auf $a' = 1$, die Länge der Zwischenaxe $= \frac{n\sqrt{3}}{n+1}$, was zu beweisen war.

c. Wichtigste Zonenverhältnisse der Pyramiden mP und mP2.

Was zunächst die Zonen der Polkanten von P selbst anlangt, welche Pyramide vorzugsweise berücksichtigt werden soll, so lehrt die Projection, Tafel IX, Fig. 6, dass, wenn wir eine der sechs vorhandenen Zonen, z. B. die durch den Punkt a fixirte betrachten, in dieser Zone vorab vorkommen:

∞P , 2P2 , P , P2.

Ferner treten zwischen je zwei dieser Gestalten, als Grenzgestalten, andere von dem allgemeinen Zeichen mPn auf, und es erwächst uns die Aufgabe, dieselben näher zu untersuchen.

Was die zwischen ∞P und 2P2 gelegenen mPn anlangt, so wird deren allgemeines Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - \mu}$ in diesem speciellen Falle, da $\mu = 1$ ist, zu $\frac{a}{1} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - 1}$, folglich resultirt νP$\frac{\nu}{\nu - 1} =$

$= mP \frac{m}{m-1}$ als Zeichen dieser Gruppe. m ist stets > 2 und $< \infty$; $\frac{m}{m-1} > 1$ und < 2.

Die Pyramiden mPn, welche zwischen 2P2 und P liegen, erhalten das Zeichen $\frac{a''}{\mu} : \frac{a'}{1+\mu} : \frac{a}{1}$, da aus dem Zonenverband folgt, dass $\nu - \mu = 1$ ist. Ihr Zeichen wird daher zu $1 + \mu P\, 1 + \mu$. Der Werth des Axenschnitts $\frac{a''}{\mu}$ ist stets > 1 und $< \infty$, daher μ selbst innerhalb der Grenzen < 1 und $> o$ sich bewegt. Bezeichnet man den Ausdruck $1 + \mu$ mit m, so kann man diese Pyramiden auch mPm schreiben; ihr Werth m ist dann stets > 1 und < 2.

Die Pyramiden mPn, welche zwischen P und P2 liegen, werden zu $\frac{a''}{-\mu} : \frac{a}{1} : \frac{a'}{1+\mu}$, daher folgt ihr Zeichen $P \frac{1}{1+\mu}$. Der Werth des Axenschnitts auf a″ ist stets > -2 und $< -\infty$, daher $\mu < -\frac{1}{2}$ und $> -o$. Das Zeichen wird also factisch stets zu $P \frac{1}{1-\mu}$, und wir brauchen hier und in Zukunft die negativen Vorzeichen der Axenschnitte nicht zu berücksichtigen, da sie nur die, überdies aus der Projection auch ersichtliche Lage der Sectionslinien andeuten. Setzen wir $\frac{1}{1-\mu} = n$, so bekommen die in Rede stehenden Pyramiden das Zeichen Pn, worin $n > 1 < 2$ ist.

Die Entwickelung der Polkantenzone einer beliebigen m′P würde ergeben: ∞P ; $m'mP\frac{m}{m-1} (m > 2)$; 2m′P2; $m'mPm\,(m < 2)$; m′P ; m′Pn ; m′P2.

Gehen wir zur Entwickelung der Diagonalzonen von P über, welche durch die Höhenlinien auf den Flächen von P bestimmt und ebenfalls in der Zahl sechs vorhanden sind, so haben wir in der durch $\frac{b'}{2}$ bezeichneten, Tafel IX. Fig. 7, zuerst als Grenzgestalten zu verzeichnen: $\infty P2$, 2P, $\frac{4}{3}P2$, P.

Die Pyramiden mPn, die zwischen $\infty P2$ und 2P liegen, gehen von: $\frac{a''}{\mu} : \frac{b''}{\nu+\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{b}{2\nu-\mu} : \frac{a'}{\nu-\mu} : \frac{b'}{\nu-2\mu}$. Ihr Schnitt auf b′, nämlich $\frac{b'}{\nu-2\mu}$ ist $= \frac{b'}{2}$, daher folgt $\mu = \frac{\nu-2}{2}$. Im Zei-

chen $\nu P \frac{\nu}{\nu - \mu}$ ist also, an Stelle von μ, der Werth $\frac{\nu - 2}{2}$ zu setzen, was $\nu P \frac{2\nu}{\nu + 2} = mP \frac{2m}{m + 2}$ ergibt. m ist $> 2 < \infty$; $\frac{2m}{m + 2}$ ist $> 1 < 2$.

Die Pyramiden mPn, welche zwischen 2P und $^4/_3$P2 auftreten, gehen von $\frac{a''}{\mu} : \frac{b'}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b}{2\nu - \mu} : \frac{a}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu}$. Im Schnitt auf b' ist $\nu + \mu = 2$, daher $\mu = 2 - \nu$. Wird dies in $\nu P \frac{\nu}{\nu - \mu}$ substituirt, so folgt $\nu P \frac{\nu}{2\nu - 2} = mP \frac{m}{2m - 2}$. m ist $> ^4/_3 < 2$; $\frac{m}{2m - 2}$ ist $> 1 < 2$.

Die Pyramiden mPn, die sich zwischen $^4/_3$P2 und P befinden, erstrecken sich von $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu}$ und in ihrem Schnitt auf b' ist $2\nu - \mu = 2$, woraus $\mu = 2\nu - 2$ folgt. Man erhält daraus $\nu P \frac{\nu}{2 - \nu} = mP \frac{m}{2 - m}$. m ist $> 1 < ^4/_3$; $\frac{m}{2 - m}$ ist $> 1 < 2$.

Die Entwickelung der Diagonalzone einer m'P ergibt, indem in den respectiven Schnitten auf b' der Werth 2m', anstatt 2, gesetzt wird: ∞P2; $mP \frac{2m}{m + 2m'}$; 2m'P; $mP \frac{m}{2(m - m')}$; $^4/_3$m'P2; $mP \frac{m}{2m' - m}$; m'P. Es bewegen sich dabei die Werthe von m innerhalb der durch die Grenzgestalten vorgeschriebenen Werthe; 2m' ist durch die Pyramide m'P bekannt. — Kennt man daher von einer solchen Pyramide mPn den Schnitt auf der Hauptaxe, so kann man, da 2m' bekannt ist, n finden; kennt man n, so ist es, unter Berücksichtigung der Grenzgestalten, möglich m zu ermitteln.

Hiermit ist wiederum die Entwickelung der Polkantenzone einer m'P2 bekannt, denn da die Hauptaxe von m'P2 $^4/_3$ mal so gross ist, als die der Pyramide m''P, welche die Polkanten von m'P2 gerade abstumpft, so ist auch geltend zu machen, dass umgekehrt die Polkanten jeder m'P2 dieselbe Lage haben, wie die Höhenlinien auf den Flächen von m''P, in welchem Zeichen $m'' = ^3/_4 m'$ ist.

Um die Entwickelung der Polkantenzone einer m'P2 zu erhalten, ist daher nur in den letztgewonnenen Resultaten $^3/_4$m' an Stelle von

m' zu setzen. Von besonderem Interesse wird alsdann zunächst die Entwickelung der Grenzgestalten: $\infty P2$; $\frac{3}{2}m'P$; $m'P2$; $\frac{3}{4}m'P$ sein. Zu jeder Pyramide $m'P2$ ist $\frac{3}{4}m'P$ die die Polkanten gerade abstumpfende und $\frac{3}{2}m'P$ die in denselben verhüllt liegende Pyramide der ersten Art.

d. Zonenverhältnisse der Skalenoëder $\pm\pi mPn$.

Wir beschränken die nachfolgenden Betrachtungen auf die Skalenoëder, welche sich aus einer gegebenen Pyramide mPn dadurch ableiten, dass ein Flächenpaar, welches einer im diagonalen Hauptschnitt befindlichen Polkante anliegt, wächst und die damit in Kanten zusammenstossenden Flächenpaare verschwinden. Wir nennen die Skalenoëder positive, welche auf der oberen Seite ihre stumpferen Polkanten dem Beobachter zuwenden und gehen von ihrem primären Zeichen $\pm\pi mPn$, welches sie als Hemiëdrien der dihexagonalen Pyramiden darstellt, aus, da ihr secundäres Zeichen $\pm m'Rn'$, dessen Bedeutung wir später würdigen werden, die Axenschnitte nicht direct erkennen lässt.

Von den in Betracht kommenden Zonen der stumpferen und schärferen Polkanten, sowie der Mittelkanten, welche zu je dreien vorhanden sind, untersuchen wir immer nur eine und zwar die, welche durch einen Zonenpunkt auf der betreffenden Sectionslinie des Skalenoëders, von dessen vollständigem Zeichen wir ausgehen, repräsentirt ist.

α. Zone der stumpferen Polkante.

Geht man zum vollständigen Zeichen über, Tafel IX., Fig. 8, so liegt die stumpfere Polkante in $\frac{b'}{2\nu - \mu}$. Die Grenzgestalten sind, wenn $2\nu - \mu = n'$ gesetzt wird:

$$\infty P2 \; ; \; \mp n'R \; ; \; \frac{2n'}{3}P2 \; , \; \pm\frac{n'}{2}R.$$

Zwischen $\infty P2$ und $\mp n'R$ liegen Skalenoëder, die der Lage nach als negative erkannt werden (sie wenden ihre schärferen Polkanten auf den Beobachter zu). Ihr Zeichen ist $\frac{a''}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a'}{\nu - \mu}$ und ihr Schnitt auf b' ist $= \frac{b'}{\nu - 2\mu}$. Da dieser Schnittpunkt aber derselbe ist, als der, welcher im Grundskalenoëder den Werth $\frac{b'}{2\nu - \mu} = \frac{b'}{n'}$ hat, so ist auch $\nu - 2\mu = n'$, d. h. $\mu = \frac{\nu - n'}{2}$. Bilden wir hiermit das

Zeichen $\nu P \frac{\nu}{\nu - \mu}$, so folgt $\nu P \frac{2\nu}{\nu + n'} = \mp \pi m' P \frac{2 m'}{m' + n'}$.* — In diesem Zeichen ist $m' > n' < \infty$ und der Werth von $\frac{2 m'}{m' + n'}$, ist > 1 und < 2.

Zwischen $\mp n'R$ und $\frac{2 n'}{3} P2$ liegen gleichfalls negative Skalenoëder. Ihr Zeichen ist: $\frac{a''}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu}$. Ihr Schnitt auf b' ist $\frac{b'}{\nu + \mu}$, daher $\nu + \mu = n'$; $\mu = n' - \nu$. Es resultirt somit das Zeichen $\nu P \frac{\nu}{2\nu - n'} =$ $= \mp \pi m' P \frac{m'}{2m' - n'}$. m' ist $> \frac{2n'}{3}$ und $< n'$; der Werth von $\frac{m'}{2 m' - n'}$ ist durch die gewöhnlichen Grenzen fixirt; wir führen dieselben in der Folge nicht mehr an.

Zwischen $\frac{2n'}{3} P2$ und $\pm \frac{n'}{2} R$ liegen schliesslich positive Skalenoëder (sie wenden dem Beobachter die stumpferen Polkanten zu), einschliesslich des Grundskalenoëders $\pm \pi mPn$ selbst. Das Zeichen ist durch das letzterer Gestalt gegeben, der Schnitt auf b' ist $= 2\nu - \mu = n'$; daher $\mu = 2\nu - n'$. Es folgt $\nu P \frac{\nu}{n' - \nu} = \pm \pi m' P \frac{m'}{n' - m'}$. In diesem Zeichen ist $m' > \frac{n'}{2}$ und $< \frac{2 n'}{3}$.

Diese allgemeinen Zeichen sind, wie folgt, zu verwerthen. Befinden sich mit den stumpferen Polkanten eines Skalenoëders $\pm \pi mPn$ die Kanten einer anderen Gestalt in derselben Lage, so genügt eine Winkelmessung, um entweder den Schnitt auf der Hauptaxe m'', oder den auf der Nebenaxe n'' im Zeichen m''Pn'' zu ermitteln.

Kennt man m'', so erfährt man, ob die Gestalt ein Skalenoëder, oder die durch die Zone bestimmte Pyramide der zweiten Art ist $\left(m'' = \frac{2n'}{3}\right)$ und, im ersteren Falle, welcher Gruppe das Skalenoëder angehört. Danach findet man n'' aus dem allgemeinen Zeichen. — Kennt man n'', so kann man daraus ersehen, ob ein Skalenoëder, oder die durch die Zone gegebene Pyramide der zweiten Art vorliegt $(n'' = 2)$ und, in ersterem Falle, da aus dem allgemeinen Zeichen n' bekannt ist, unter Berücksichtigung der Grenzgestalten, m'' finden.

* In diesem und den folgenden Zeichen ist zum Zwecke der Unterscheidung m' gebraucht, weil im Grundskalenoëder m zur Verwendung kam.

β. Zone der schärferen Polkante.

Der Schnitt der schärferen Polkante erfolgt, wenn auf das vollständige Zeichen übergegangen wird, Tafel IX., Fig. 9, in $\frac{b}{\nu + \mu}$. Wir setzen für die folgenden Betrachtungen $\nu + \mu = n''$. Die Grenzgestalten sind:

$$\infty P2 \; ; \; \pm n''R \; ; \; \frac{2n''}{3} P2 \; ; \; \mp \frac{n''}{2} R.$$

Es lässt sich mit einer der vorigen entsprechenden Ueberlegung zeigen, dass zwischen:

$\infty P2$ und $\pm n''R$ die Skalenoëder $\pm \pi m'P \frac{2m'}{m' + n''}$;

$\pm n''R$ und $\frac{2n''}{3} P2$ „ „ $\pm \pi m'P \frac{m'}{2m' - n''}$;

$\frac{2n''}{3} P2$ und $\mp \frac{n''}{2} R$ „ „ $\mp \pi m'P \frac{m'}{n'' - m'}$

auftreten werden. In die zweite Zone gehört auch das Grundskalenoëder $\pm \pi mPn$ selbst. —

Die Werthe m′ dieser Gestalten bewegen sich in den verschiedenen Abtheilungen innerhalb der Werthe der Grenzgestalten. — Die Verwerthung der allgemeinen Zeichen ist der des vorigen Falls entsprechend.

γ. Zone der Mittelkante.

Der Schnitt derselben erfolgt in $\frac{b''}{\nu - 2\mu}$, Tafel X., Fig. 1, wenn auf das vollständige Zeichen übergegangen wird. Es sei $\nu - 2\mu = n'''$. Alsdann sind folgende Grenzgestalten zu verzeichnen:

$$\infty P2 \; ; \; \pm n'''R \; ; \; \frac{2n'''}{3} P2 \; ; \; \mp n'''R.$$

Es liegen zwischen:

$\infty P2$ und $\pm n'''R$ die Skalenoëder $\pm \pi m'P \frac{2m'}{m' + n'''}$;

$\pm n'''R$ und $\frac{2n'''}{3} P2$ „ „ $\pm \pi m'P \frac{m'}{2m' - n'''}$;

$\frac{2n'''}{3} P2$ und $\mp \frac{n'''}{2} R$ „ „ $\mp \pi m'P \frac{m'}{n''' - m'}$.

Der ersten Zonenabtheilung gehört auch $\pm \pi mPn$ selbst an. — Die Werthe m′ in den verschiedenen Abtheilungen bewegen sich inner-

halb der durch die Grenzgestalten bestimmten Grenzen. — Die allgemeinen Zeichen sind, wie in den vorigen Fällen, zu verwerthen.

e. Zonenverhältnisse der Rhomboëder $\pm$mR.

Von den drei Zonen der Polkanten nnd den drei Diagonalzonen eines $\pm$ mR untersuchen wir nachfolgend je eine, da darin die Entwickelungen der anderen enthalten sind.

α. Zone der Polkante von $\pm$ mR.

Die Entwickelung derselben wird erhalten, wenn in der Darlegung der Mittelkantenzone von $\pm \pi$mPn, anstatt n''', der aus dem Zeichen $\pm$ mR entnommene Werth m gesetzt wird, da ein beliebiges Skalenoëder stets ein Rhomboëder besitzt, dessen Mittelkanten mit denen des Skalenoëders zusammenfallen; vergl. Tafel X, Fig. 1.

$$\text{Der Schnitt } \frac{b''}{\nu - 2\mu} \text{ wird also } = \frac{b''}{m}.$$

Wir erhalten somit:

$$\infty P2 \; ; \; \pm \pi m'P \frac{2m'}{m' + m} \; ; \; \pm mR \; ; \; \pm \pi m'P \frac{m'}{2m' - m} \; ; \; \frac{2m}{3} P2 \; ;$$

$$\mp \pi m'P \frac{m'}{m - m'} \; ; \; \mp \frac{m}{2} R.$$

Die Werthe m' bewegen sich hier, wie früher, stets zwischen denen der respectiven Grenzgestalten.

Für $\pm$ R wird m in allen Formeln = 1 und es folgt, vergl. Tafel X., Fig. 2:

$$\infty P2 \; ; \; \pm \pi m'P \frac{2m'}{m' + 1} \; ; \; \pm R \; ; \; \pm \pi m'P \frac{m'}{2m' - 1} \; ; \; \frac{2}{3} P2 \; ;$$

$$\mp \pi m'P \frac{m'}{1 - m'} \; ; \; \mp \frac{1}{2} R.$$

β. Diagonalzone von $\pm$ mR.

Diese Zone ist schon bei der Betrachtung der Diagonalzone von m'P entwickelt. Daselbst wären also nur die Vorzeichen der Skalenoëder anzubringen und die Zeichen und Vorzeichen der Rhomboëder an Stelle der Zeichen der Pyramiden zu setzen. Ferner müssten, da wir damals von m'P ausgingen, jetzt $\pm$ mR betrachten, die m' gegen m und umgekehrt vertauscht werden. — Aus der Entwickelung der Zonenverhältnisse des Skalenoëders ist indessen die Entwickelung der Diagonalzone von $\pm$ mR auch zu folgern, wenn man in den für die stumpfere Polkante erhaltenen Resultaten an Stelle von n' den aus dem Zeichen von $\pm$ mR entnommenen Werth 2m setzt, welcher sich aus einer einfachen Betrachtung ergibt.

Es folgt alsdann:

$$\infty P2\ ;\ \mp \pi m' P \frac{2m'}{m' + 2m}\ ;\ \mp 2mR\ ;\ \mp \pi m' P \frac{m'}{2(m' - m)}\ ;$$

$$\tfrac{4}{3} mP2\ ;\ \pm \pi m' P \frac{m'}{2m - m'}\ ;\ \pm mR.$$

Für $\pm R$ wird $m = 1$, daher hat man:

$$\infty P2\ ;\ \mp \pi m' P \frac{2m'}{m' + 2}\ ;\ \mp 2R\ ;\ \mp \pi m' P \frac{m'}{2(m' - 1)}\ ;$$

$$\tfrac{4}{3} P2\ ;\ \pm \pi m' P \frac{m'}{2 - m'}\ ;\ \pm R.$$

In den vorstehenden Entwickelungen über Skalenoëder und Rhomboëder sind wir immer von dem primären Skalenoëderzeichen $\pm \pi mPn$ ausgegangen, weil nur in diesem die Axenschnitte der Gestalten direct zu lesen sind, ein Vorzug, welcher dem NAUMANN'schen secundären Skalenoëderzeichen abgeht. Um jedoch die erhaltenen Resultate auch auf dieses letztere beziehen zu können, geben wir nunmehr allgemein die Uebergangsformeln der verschiedenen Skalenoëderbezeichnungsweisen in einander.

f. Formeln zum Zwecke der Uebergänge aus der NAUMANN'schen primären Skalenoëderbezeichnung in die secundäre, sowie beider in die WEISS'sche Bezeichnungsweise und umgekehrt.

Wie von einem Zeichen mPn auf das WEISS'sche Axenschnittszeichen und umgekehrt von letzterem auf ersteres die Uebergänge gefunden werden, haben wir bereits pag. 320 erörtert.

Um von dem primären Skalenoëderzeichen $\pm \pi mPn$ zu dem secundären überzugehen, machen wir geltend, dass jedes Skalenoëder ein Rhomboëder in der Weise zugehörig besitzt, dass die Mittelkanten beider, der Lage nach zusammen fallen. Gehen wir vom Zeichen $\pm \pi mPn$ auf das WEISS'sche Axenschnittszeichen über, vergl. Tafel X., Fig. 1, so leitet sich dies Mittelkantenrhomboëder zu $\pm \nu - 2\mu R$ ab, da sein Axenschnitt $\frac{b''}{\nu - 2\mu}$ gleich dem entsprechenden des Skalenoëders ist und überdies noch für es, d. h. für seine in der Figur betrachtete Sectionslinie, die Bedingungsgleichung $\mu = o$ besteht.

Drückt man ν und μ in Werthen von m und n des Zeichens $\pm \pi mPn$ aus, so hat man $\nu = m$ und $\mu = \frac{m(n-1)}{n}$ zu setzen; dies ergibt für das Mittelkantenrhomboëder den Ausdruck: $\pm \frac{m(2-n)}{n} R$.

Zur Ableitung des secundären Zeichens $\pm$ m'Rn' stellt man sich vor, die Hauptaxe des Mittelkantenrhomboëders $\pm$ m'R sei n'-fach verlängert, bis sie in der Grösse der Hauptaxe der Gestalt $\pm \pi$mPn gleichkommt. Alsdann werden die Endpunkte der Randecken des Mittelkantenrhomboëders mit dem Endpunkt der n'-fach verlängerten Hauptaxe verbunden, Flächen durch die neuen Kanten gelegt und das Skalenoëder ist vollendet. Um jedoch diese n'-fache Verlängerung der Hauptaxe des Mittelkantenrhomhoëders zu bewirken, um also $\frac{m(2-n)}{n}$ auf die Grösse m, wie sie die ursprüngliche Gestalt besass, zu bringen, muss eine Multiplication mit $\frac{n}{2-n}$ vorgenommen werden, welche Grösse also n' entspricht.

Es entsprechen sich also: $\pm \pi$mPn und $\pm \frac{m(2-n)}{n} R \frac{n}{2-n}$.*

Da aber im Zeichen $\pm$ m'Rn' die Grösse $m' = \frac{m(2-n)}{n}$ und $n' = \frac{n}{2-n}$ ist, so folgt auch umgekehrt, dass:

$$\pm m'Rn' = \pm \pi m'n'P \frac{2n'}{n'+1} \text{ ist.}$$

Um ferner von einem Zeichen $\pm$ m'Rn' auf die Axenschnitte, also auf das Weiss'sche Zeichen überzugehen, ziehen wir die soeben erhaltene Transformationsformel in Betracht und berücksichtigen, dass wir für ersteres Zeichen auch schreiben können: $\pm \pi m'n'P \frac{2n'}{n'+1}$.

Alsdann ist, vergl. pag. 320:

$$\nu = m'n'$$
$$\nu - \mu = \frac{m'(n'+1)}{2}$$
$$\mu = \frac{m'(n'-1)}{2}.$$

Daraus folgt das Weiss'sche Zeichen:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}m'(n'-1)} : \frac{a'}{m'n'} : \frac{a''}{\frac{1}{2}m'(n'+1)} : c.$$

Bezeichnen wir dasselbe in gewohnter Weise mit $\frac{a}{\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : c$, worin, wie immer, $\nu > \nu - \mu > \mu$ ist, so erhalten wir durch:

* Die erste Ableitung dieser Formel gab Naumann, Grundriss d. Krystallographie 1826, p. 370—372. Dieselbe findet sich alsdann, nebst der anderen, in den verschiedenen krystallographischen Werken des genannten Autors wieder.

$$\frac{\begin{aligned} {}^1/_2 m'(n' + 1) &= \nu - \mu. \\ {}^1/_2 m'(n' - 1) &= \mu. \end{aligned}}{m' = \nu - 2\mu.}$$

Ferner gibt $\frac{\nu}{\nu - 2\mu} = \frac{m'n'}{m'}$ die Grösse n'; folglich ist, wenn das WEISS'sche Zeichen vorliegt, das NAUMANN'sche $\pm\, m' R n'$ gebildet durch:

$$\pm\, \nu - 2\mu R \frac{\nu}{\nu - 2\mu}.\, *$$

Dabei gibt ein negatives Skalenoëder in WEISS'scher Schreibweise (kenntlich an den gestrichelten Axen, a', gegenüber den ungestrichelten, a, eines positiven in dieser Ausdrucksweise) natürlich wieder ein negatives in der NAUMANN'schen und ein positives dort, wird zu einem positiven hier. Die Axenschnitte folgen sich stets in der Reihe $\frac{a}{\mu} : \frac{a}{\nu} : \frac{a}{\nu - \mu}$ und es ist immer $\frac{a}{\mu} > \frac{a}{\nu}$ und $\frac{a}{\nu} < \frac{a}{\nu - \mu}$, d. h. die inversen Werthe μ, ν, $\nu - \mu$ selbst verhalten sich bezüglich ihrer Grösse so, dass $\nu > \nu - \mu > \mu$ ist.

g. Ueber die durch ein Skalenoëder bedingten Rhomboëder.

Die interessanten Beziehungen eines Skalenoëders zu seinen durch es bedingten Rhomboëdern sind schon seit lange und vielfach** Gegenstand der Erörterung gewesen. Wir wollen im Nachfolgenden zu zeigen versuchen, in wie einfacher Weise sich diese Beziehungen auf ein Mal darlegen, wenn man sie an der Hand der QUENSTEDT'schen Projection und des WEISS'schen Flächenzeichens studirt.

Fertigt man sich, Tafel X, Fig. 3, die Projection eines Skalenoëders positiver Stellung an, so lassen sich sämmtliche Beziehungen desselben zu seinen Rhomboëdern direct aus dem WEISS'schen Flächenzeichen ablesen und gelten, unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, auch für die Rhomboëder eines negativen Skalenoëders. Wir

* Die zwei hier zuletzt genannten Transformationsformeln, sowie die auf pag. 320 erwähnte, finden sich bereits bei SCHRÖDER, Elemente der rechn. Kryst. 1852. pag. 107 u. 108; sind jedoch daselbst in anderer Weise als vorstehend hergeleitet. Auch QUENSTEDT gibt, Mineralogie 1863. p. 88, die Uebergangsformeln vom Zeichen mRn auf die Axenschnittsformel.

** Es haben hierüber hauptsächlich geschrieben:

MOHS, Grundriss d. Mineralogie B. I. 1822. p. 196 u. f.

NAUMANN, Grundriss der Krystallographie 1826. p. 395; Lehrb. d. rein. und angew. Kryst. B. I. 1830. p. 387 und f.; Anfangsgründe der Krystallographie 1854. p. 177; Elemente der theoret. Kryst. 1856. p. 211 und f.

WEISS, Abh. der Berl. Academie 1823, 1836, 1840.

ZIPPE, Uebersicht der Krystallgestalten des rhomboëdrischen Kalk-Haloids 1851. p. 12.

werden die Werthe der Hauptaxen der Rhomboëder in dreierlei Weise angeben, und zwar zuerst in Werthen von ν und μ, dem WEISS'schen Flächenzeichen entnommen, dann in Werthen von m und n, vom Zeichen $\pm \pi m P n$ her und schliesslich in Werthen von m' und n', dem Zeichen $\pm m' R n'$ entstammend. In Fig. 3, Tafel X. sind indessen nur die ersteren Werthe gebraucht.

Geht man zum vollständigen Flächenzeichen über, so liegt die schärfere Polkante in $\frac{b}{\nu + \mu}$, die stumpfere in $\frac{b'}{2\nu - \mu}$, die Mittelkante in $\frac{b''}{\nu - 2\mu}$.

Bei einem Skalenoëder $\pm \pi m P n = \pm m' R n'$ werden daher die schärferen Polkanten gerade abgestumpft durch:

$$\mp \frac{\nu + \mu}{2} R = \mp \frac{\frac{1}{2} m (2n - 1)}{n} R = \mp \frac{1}{4} m' (3n' - 1) R.$$

In denselben liegen verhüllt die sog. Rhomboëder der schärferen Polkanten:

$$\pm \nu + \mu R = \pm \frac{m (2n - 1)}{n} R = \pm \frac{1}{2} m' (3n' - 1) R.$$

Zur Erläuterung des Ausdrucks „verhüllt" sei bemerkt, dass ein Rhomboëder diese Bezeichnung erhält, wenn es in der einen Art der Polkanten des Skalenoëders (hier z. B. in den stumpferen) so auftritt, dass die Combinationskanten von Rhomboëder zu Skalenoëder der zweiten Art der Polkanten des Skalenoëders (hier z. B. den schärferen) parallel gehen, oder, mit anderen Worten, wenn die Polkanten des Rhomboëders, welches mit seinen Flächen in der einen Art der Polkanten des Skalenoëders auftritt, der anderen Art der Polkanten dieser Gestalt parallel gehen.

Die stumpferen Polkanten werden gerade abgestumpft durch:

$$\pm \frac{2\nu - \mu}{2} R = \pm \frac{\frac{1}{2} m (n + 1)}{n} R = \pm \frac{1}{4} m' (3n' + 1) R.$$

In denselben liegen verhüllt die sog. Rhomboëder der stumpferen Polkanten:

$$\mp 2\nu - \mu R = \mp \frac{m (n + 1)}{n} R = \mp \frac{1}{2} m' (3n' + 1) R.$$

Die Zone der Mittelkanten weist zunächst das sog. Mittelkantenrhomboëder eines jeden Skalenoëders auf, welches der secundären Bezeichnungsweise zu Grunde liegt und dessen Mittelkanten mit denen des entsprechenden Skalenoëders zusammenfallen. Für ein positives oder negatives Skalenoëder erhält man:

$$\pm \nu - 2\mu R = \pm \frac{m (2 - n)}{n} R = \pm m' R.$$

Zieht man zu diesen Rhomboëdern die in der Zone der Mittelkanten liegenden, ersten stumpferen in Betracht, so erhalten dieselben folgende Ausdrücke:

$$\mp \frac{\nu - 2\mu}{2} R = \mp \frac{\frac{1}{2}m(2 - n)}{n} R = \mp \tfrac{1}{2}m'R.$$

Man hat diesen, auf den Zwischenaxen durch die Skalenoëderkanten angedeuteten Rhomboëdern den Namen: „Axenkantenrhomboëder" gegeben und unterscheidet ausser denselben als „Combinationskantenrhomboëder" noch solche, welche durch die Combinationskanten der Skalenoëderflächen mit denen des ersten Prisma's angedeutet sind.

Berücksichtigen wir die Combination eines positiven Skalenoëders mit dem ersten Prisma, und wende das richtig gestellte Skalenoëder uns seine stumpfere Polkante zu, so wird durch die, dieser stumpferen Polkante anliegenden Combinationskanten des Skalenoëders zum ersten Prisma ein Rhomboëder entgegengesetzter Stellung derartig fixirt werden, dass eine Zone von der Säule zum Skalenoëder und dem darauf folgenden Rhomboëder besteht. Allgemein ist das Zeichen desselben, wie aus der Projection folgt:

$$\mp \mu R = \mp \frac{m(n - 1)}{n} R = \mp \tfrac{1}{2} m'(n' - 1) R.$$

Eben so wird, ausgehend von der schärferen Polkante des Skalenoëders, durch die am Krystall derselben anliegenden Combinationskanten zur ersten Säule ein Rhomboëder gleicher Stellung mit der des Skalenoëders bestimmt. Aus der Projection ergibt sich dies Rhomboëder zu:

$$\pm \nu - \mu R = \pm \frac{m}{n} R = \pm \tfrac{1}{2}m'(n' + 1) R.$$

Ausser diesen beiden Schnitten auf den Nebenaxen wird auch noch, wie ein Blick auf die Projection lehrt, der Axenschnitt $\frac{a'}{\nu}$ bestimmend für eine Gestalt und zwar eine Pyramide der ersten Art werden müssen. Dieselbe erhält die Zeichen:

$$\nu P \;=\; mP \;=\; m'n'P$$

und ist für das betreffende Skalenoëder die eingeschriebene, d. h. wird erhalten, wenn die Mittelkanten des im Gleichgewicht befindlichen Skalenoëders halbirt und mit den Polecken verbunden werden. Die Gestalt entsteht in gleicher Weise, einerlei, ob das Skalenoëder ein positives oder negatives ist. Denkt man sich die eingeschriebene Pyramide, wie es die Hemiëdrie fordert, in zwei complementäre Rhom-

boëder mit gleicher Hauptaxe zerfällt, so wird ein jedes derselben in den entsprechenden Polkanten so auftreten müssen, dass die Combinationskanten zum Skalenoëder den oben erörterten eingeschriebenen Linien parallel gehen.

Alle Beziehungen dieser Rhomboëder zu einander, von denen wir die wichtigsten hier anführen werden, ergeben sich unmittelbar aus dem Gesetze, welchem das vollständige WEISS'sche Flächenzeichen unterworfen ist.

1. Die Verticalaxe des Rhomboëders der stumpferen Polkanten ist gleich der Summe der Verticalaxen der Rhomboëder der schärferen Polkanten und der Mittelkanten:

$$(2\nu - \mu) = (\nu + \mu) + (\nu - 2\mu).$$

2. Dasselbe gilt für die gerade abstumpfenden Rhomboëder dieser eben genannten:

$$\tfrac{1}{2}(2\nu - \mu) = \tfrac{1}{2}(\nu + \mu) + \tfrac{1}{2}(\nu - 2\mu).$$

3. Die Verticalaxe eines der zwei aus der eingeschriebenen Pyramide des Skalenoëders gebildeten Rhomboëder ist gleich der Summe der Verticalaxen der zwei anderen Combinationskantenrhomboëder:

$$\nu = \mu + (\nu - \mu).$$

4. Die Summe der Verticalaxen der Rhomboëder der stumpferen und der schärferen Polkanten ist drei Mal so gross, als die Summe der Verticalaxen der beiden ersten Combinationskantenrhomboëder:

$$(2\nu - \mu) + (\nu + \mu) = 3([\nu - \mu] + \mu).$$

5. Die Differenzen der Verticalaxen besagter Rhomboëder sind einander gleich und so gross als die Verticalaxe des Rhomboëders der Mittelkanten:

$$(2\nu - \mu) - (\nu + \mu) = (\nu - \mu) - \mu = \nu - 2\mu.$$

6. Die Summen der Axen der zwei, in Bezug auf das gegebene Skalenoëder, in gleicher Stellung sich befindenden Rhomboëder der Polkanten und der Combinationskanten sind einander gleich:

$$(2\nu - \mu) + \mu = (\nu + \mu) + (\nu - \mu)$$

u. s. w.

3. Einführung des orthohexagonalen Axensystems $a : a\sqrt{3} : c$ zum Zwecke der Rechnung mit der Winkelformel. Anwendung auf die Berechnung der Winkel des Skalenoëders.

Zum Zwecke der Rechnung mit der von uns nur für rechtwinkelige Axen abgeleiteten Winkelformel kann man aus der Reihe der sechs Neben- und Zwischenaxen leicht eine der letzteren, sowie eine dazu

normale Nebenaxe erwählen und auf dies Axensystem die Schnitte der Sectionslinien in der Projection beziehen.

Wir haben alsdann, wenn wir zu diesen zwei in der Ebene der Basis befindlichen rechtwinkeligen Axen noch die unverändert gebliebene Hauptaxe heranziehen, das Axensystem, welches SCHRAUF als orthohexagonales, der Betrachtung des ganzen Systems zu Grunde legt. Selbstverständlich könnte man damit auch die Rechnungen mit der Projection, wie Darstellung der Coordinaten der Zonenpunkte, der Axenschnitte der Sectionslinien u. s. w. führen; wir haben indessen weiter oben schon Mittel und Wege kennen gelernt, hierzu in einfacherer Weise zu verfahren.

Ist die Linie in Bezug auf die alten Axen gegeben durch: $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu}$, so sind die auf einander rechtwinkeligen $\frac{b}{\nu + \mu}$ und $\frac{a''}{\nu - \mu}$ besonders zu den neuen Axen geeignet, vergl. Tafel X., Fig. 4, da die Schnitte auf diesen Axen durch Addition der Nenner 2ν, durch Subtraction 2μ geben.* Zum Zwecke der Winkelberechnung lege man sich eine gute Projectionsfigur an und beziehe die Schnitte der Sectionslinien auf dies neue Axensystem. Es ist indessen bei diesen Reductionen und namentlich auch bei Rechnungen mit der Projection, wenn solche auf Grund des rechtwinkeligen Axensystems, beliebt werden sollten, noch zu berücksichtigen, dass die zwischen a″ und b gelegene Axe a′ nunmehr die erste Kantenzonenlinie abgibt und als solche die Länge $d = 2a'$ erhält. (In der Fig. 4 auf Tafel X. ist a′ mit $\frac{d}{2}$ und $-2a$ mit $\frac{d'}{1}$ zum Zwecke der Unterscheidung bezeichnet). Die auf ihr erfolgenden Schnitte nach dem ersten Kantenzonengesetz müssen dieser Länge Rechnung tragen, und man wird allgemein für dieselben erhalten:

$$\frac{d}{(\nu - \mu) + (\nu + \mu)} = \frac{d}{2\nu}, \text{ welcher Ausdruck } = \frac{a'}{\nu} \text{ ist,}$$

da d den Werth $2a'$ besitzt.

Da im hexagonalen Systeme die Winkelberechnungen auf Grund einer Projectionsfigur geführt werden, so eignet sich die Form der Cosinusformel am besten, in welche die Flächen mit den Ausdrücken:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu} : c \text{ und } \frac{a}{\mu_{\prime}} : \frac{b}{\nu_{\prime}} : c$$

eingehen, vergl. pag. 21, Formel $XXIII^b$:

* Der Vorschlag, grade diese Axen zu wählen, ist sehr praktisch und rührt von QUENSTEDT her; vergl. Mineralogie 1863. pag. 59.

$$\cos w = -\frac{a^2b^2 + \mu\mu_, b^2 + \nu\nu_, a^2}{\sqrt{a^2b^2 + \mu^2 b^2 + \nu^2 a^2} \cdot \sqrt{a^2b^2 + \mu_,^2 b^2 + \nu_,^2 a^2}}.$$

Wird in dieser Formel $b = a\sqrt{3}$ gesetzt und mit diesem Ausdruck Zähler und Nenner dividirt, so folgt:

$$\cos w = -\frac{a^2 + \mu\mu_, + \frac{1}{3}\nu\nu_,}{\sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{1}{3}\nu^2} \cdot \sqrt{a^2 + \mu_,^2 + \frac{1}{3}\nu_,^2}}.$$

Als Uebungsbeispiel und zum Zwecke der späteren Berechnungen stellen wir mit vorstehender Formel die halben Winkel eines Skalenoëders π mPn in den stumpferen und schärferen Polkanten, sowie in den Mittelkanten dar.

Gehen wir vom vollständigen Zeichen der Gestalt aus:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu},$$

so können wir, vergl. Tafel X. Fig. 5, zum Zwecke der Rechnung die Kanten in's Auge fassen, welche auf einer und derselben Axe b liegen.

1. Die stumpfere Polkante liegt im Punkte 1. mit den Coordinaten $\frac{a''}{\infty} : -\frac{b}{2\nu - \mu}$ und es gehen von hier aus die beiden Sectionslinien der sie bildenden Flächen nach $\frac{a''}{\mu}$ und $-\frac{a''}{\mu}$. Da aber der halbe Winkel in Betracht kommt, so tritt die ihn halbirende, durch den Mittelpunkt gehende Ebene in Function, welche vom Zeichen $oa : \infty b : \infty c = \frac{a}{\infty \cdot \infty} : b : c$ ist. Wird für ∞ die Grösse $\varkappa$ eingeführt, so ist zu setzen:

$$\mu = \mu \;,\; \nu = -(2\nu - \mu) = \mu - 2\nu \;;\; \mu_, = \varkappa^2 \;,\; \nu_, = 1.$$

Dies ergibt: $$\cos \tfrac{1}{2} w = \frac{a^2 + \mu \cdot \varkappa^2 + \frac{1}{3}(\mu - 2\nu)}{\sqrt{a^2 + \mu^2 + \frac{1}{3}(\mu - 2\nu)^2} \cdot \sqrt{a^2 + \varkappa^4 + \frac{1}{3}(1)^2}}$$

Werden Zähler und Nenner mit $\varkappa^2$ dividirt, dann $\varkappa = \infty$ gesetzt, so folgt, wenn überdies noch Zähler und Nenner mit $\sqrt{3}$ multiplicirt werden:

$$\cos \tfrac{1}{2} w = \frac{\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4(\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu)}}.$$

2. Die schärfere Polkante liegt im Punkte 2., dessen Coordinaten $\frac{a''}{\infty} : \frac{b}{\nu + \mu}$ sind. Die beiden Sectionslinien der sie bildenden Flächen gehen von hier nach $\frac{a''}{\nu - \mu}$ und $-\frac{a''}{\nu - \mu}$. Die Mittelpunktsebene behält ihre Lage bei.

Daher ist: $\mu = \nu - \mu$, $\nu = \nu + \mu$; $\mu_{,} = \varkappa^2$, $\nu_{,} = 1$.

$$\cos {}^1/_2 w = \frac{a^2 + (\nu - \mu)\varkappa^2 + {}^1/_3(\nu + \mu)}{\sqrt{a^2 + (\nu - \mu)^2 + {}^1/_3(\nu + \mu)^2} . \sqrt{a^2 + \varkappa^4 + {}^1/_3(1)^2}} =$$

$$= \frac{\nu - \mu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4(\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu)}}.$$

3. Die Randkante liegt im Punkt 3.; die Coordinaten desselben sind: $\frac{a''}{\infty} : \frac{b}{\nu - 2\mu}$. Die beiden Sectionslinien der diese Kante bildenden Flächen gehen von diesem Punkte nach $\frac{a''}{\nu}$ und $-\frac{a''}{\nu}$. Die Mittelpunktsebene behält ihre Lage bei. Indem wir aber die Neigung der Skalenoëderfläche zur Mittelpunktsebene berechnen, stellen wir die Ergänzung des halben Randkantenwinkels zu 90^0 dar.

Es ist zu setzen: $\mu = \nu$, $\nu = \nu - 2\mu$; $\mu_{,} = \varkappa^2$, $\nu_{,} = 1$. Die Neigung der Skalenoëderfläche gegen die Mittelpunktsebene in der Zone der Randkante ist:

$$\cos {}^1/_2 w = \frac{a^2 + \nu . \varkappa^2 + {}^1/_3(\nu - 2\mu)}{\sqrt{a^2 + \nu^2 + {}^1/_3(\nu - 2\mu)^2} . \sqrt{a^2 + \varkappa^4 + {}^1/_3(1)^2}} =$$

$$= \frac{\nu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4(\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu)}}.$$

Daher ist die halbe Randkante selbst =

$$= \sin {}^1/_2 w = \frac{\nu\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4(\mu^2 + \nu^2 - \mu\nu)}}.$$

Bezeichnen wir die stumpfere Polkante mit Y, die schärfere mit X, die Randkante mit Z, so folgt das merkwürdige Resultat:

$$\sin {}^1/_2 Z = \cos {}^1/_2 X + \cos {}^1/_2 Y = 2 \cos \frac{X + Y}{4} . \cos \frac{X - Y}{4} .*$$

Ferner erhält man die Proportionen:

$$\cos {}^1/_2 X : \cos {}^1/_2 Y = \nu - \mu : \mu = 1 : n - 1 = n' + 1 : n' - 1.$$
$$\cos {}^1/_2 X : \sin {}^1/_2 Z = \nu - \mu : \nu = 1 : n = n' + 1 : 2n'.$$
$$\cos {}^1/_2 Y : \sin {}^1/_2 Z = \mu : \nu = n - 1 : n = n' - 1 : 2n'.$$

Hierbei ist der Werth n dem Zeichen π mPn und der Werth n' dem Zeichen m'Rn' entnommen.

* Da Y > X ist, so wird X — Y negativ. Unter Berücksichtigung von $\cos(-\alpha) = + \cos \alpha$, hat dies jedoch auf das Vorzeichen des Resultats keinen ändernden Einfluss; letzteres bleibt positiv.

4. Berechnung der Axenschnitte der verschiedenen Körper und Flächen aus eigenthümlichen Kanten oder aus Combinationskanten zu anderen Gestalten. Rückrechnung der gemessenen Winkel aus den Axenschnitten und dem Axenverhältniss.

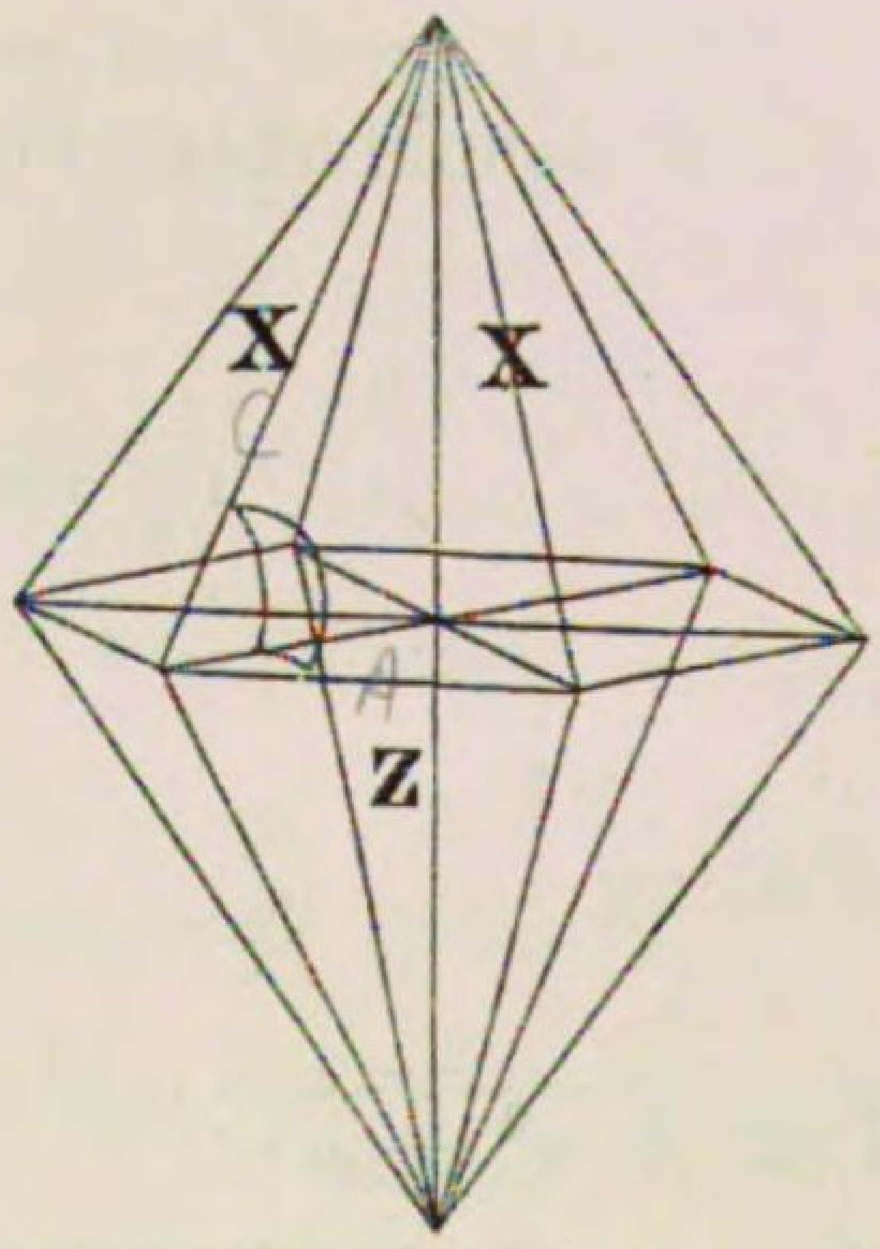
a. Die Pyramiden mP.

Man bezeichnet die Winkel der Polkanten mit X, die der Randkanten mit Z.

α. Gegeben der Winkel in den Polkanten X.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 172, das folgende Stücke enthält:

$$A = \tfrac{1}{2}X.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 60^0.$$



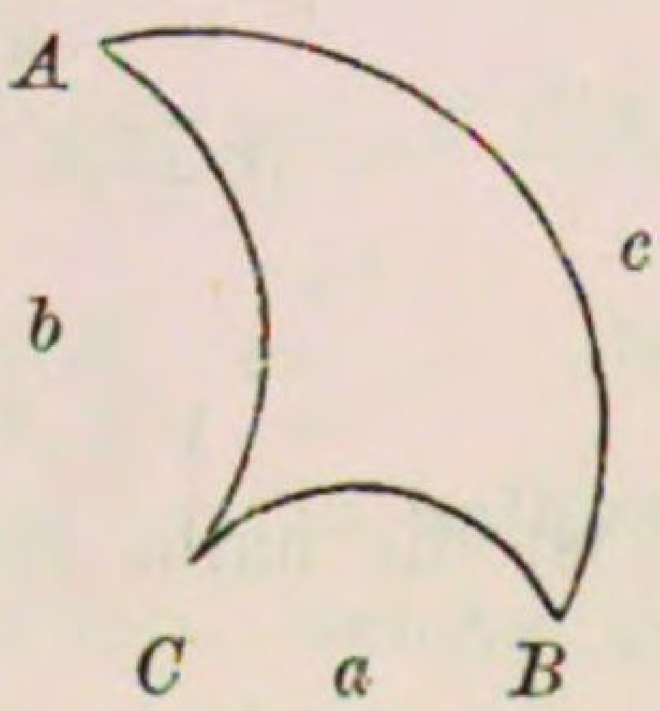


Fig. 172.

Gesucht ist b, d. h. die Neigung von X zur Nebenaxe in der Basis. Man findet: $\sin b = \operatorname{cotg} A \,.\, \operatorname{tg} a$; $\operatorname{tg} b = mc$. Liegt die Stammform vor, so ist $\operatorname{tg} b = c$.

Beispiel. Gegeben sei am Apatit (c = 0,732456) der Polkantenwinkel einer Pyramide mP mit 129° 0′. Alsdann ist in dem zu legenden sphärischen Dreieck:

$$A = 64^0\ 30'.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 60^0.$$

$$\begin{aligned} \log.\sin b = \log.\operatorname{cotg} 64^0\ 30' &= 9{,}6784961 - 10 \\ +\ \log.\operatorname{tg} 60^0 &= 0{,}2385606 \\ \hline &\ 9{,}9170567 - 10 \\ b &= 55^0\ 42'\ 17''. \end{aligned}$$

$$\log.\text{num.}\ mc = \log.\operatorname{tg} 55^0\ 42'\ 17'' = 0{,}1661946.$$
$$\text{num.}\ mc = 1{,}466205.$$

Vergleicht man dies Resultat mit c der Stammform, so folgt m = 2; die Pyramide ist daher = 2P.

β. Gegeben der Winkel in den Randkanten Z.

In dem eben erwähnten Dreieck, Fig. 172, hat man, wenn der Randkantenwinkel gegeben ist:

$$B = \frac{1}{2} Z.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 60^0.$$
$$\text{tg} b = \sin a . \text{tg} B = mc.$$

Liegt die Stammform vor, so ist tg b = c.

Beispiel. Am Apatit sei der Randkantenwinkel einer Pyramide mP zu $45^0 51'$ gemessen.

$$\log. \text{tg} b = \log. \sin 60^0 0' = 9{,}9375306 - 10$$
$$+ \log. \text{tg} 22^0 55' 30'' = 9{,}6262693 - 10$$
$$9{,}5637999 - 10$$
$$\text{num. } mc = 0{,}366269.$$

Vergleicht man dies Resultat mit c der Stammform, so folgt $m = \frac{1}{2}$; die Pyramide ist also $= \frac{1}{2}$P.

b. Die Pyramiden mP2.

Man bezeichnet die Winkel der Polkanten mit Y, die der Randkanten mit Z.

α. Gegeben der Winkel in den Polkanten Y.

Man denke sich auf einer Fläche die Höhenlinie gezogen und lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 173, mit:

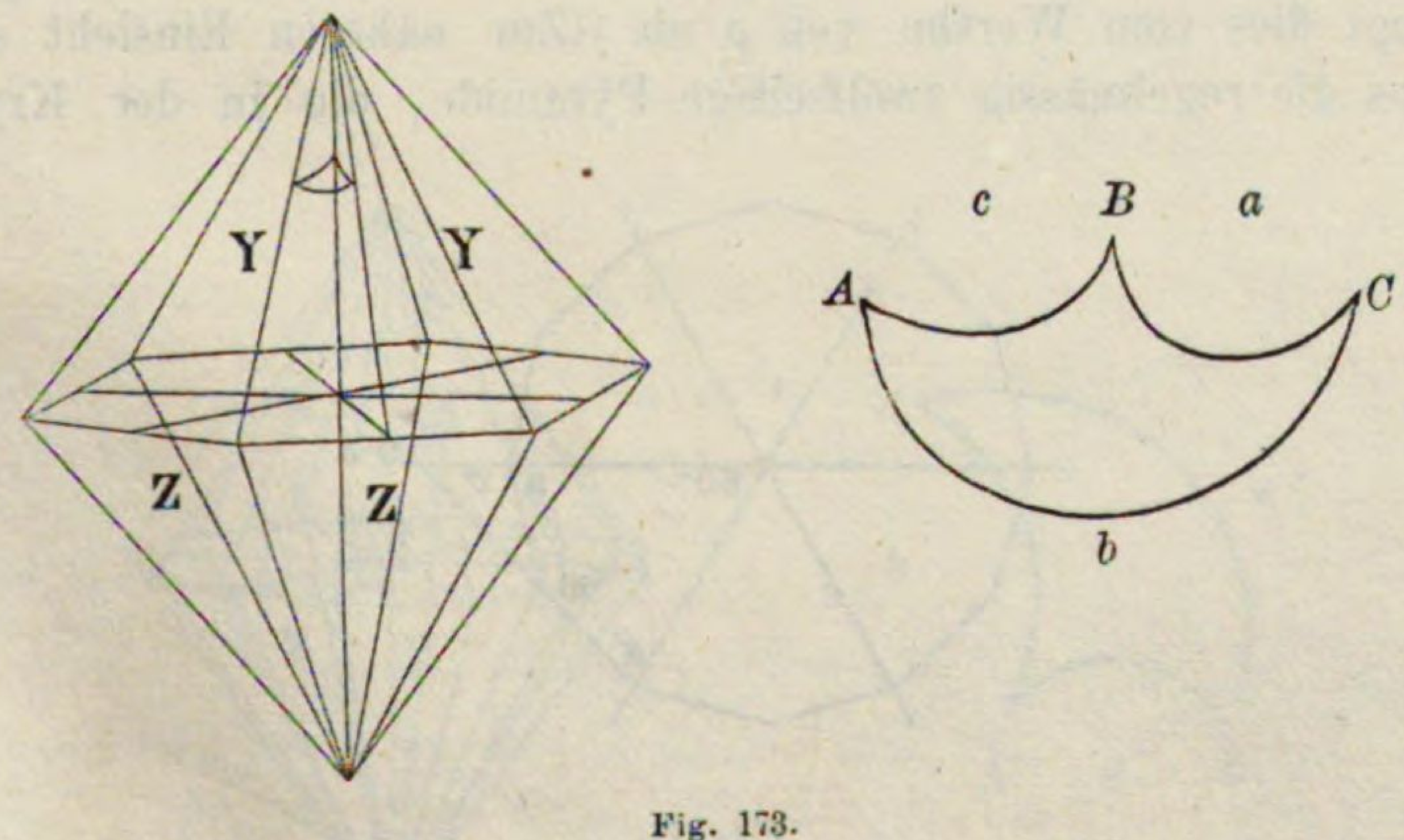


Fig. 173.

$$A = \frac{1}{2} Y.$$
$$B = 30^0.$$
$$C = 90^0.$$

Gesucht ist a, d. h. die Neigung der Höhenlinie auf der Fläche zur Hauptaxe. Man findet:

$$\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}\ ;\ \operatorname{cotg} a = mc.$$

Im Falle cotg a den Werth c selbst erlangt, liegt die erste stumpfere Pyramide der Stammform, P2, vor.

Beispiel. Apatit. Gegeben der Polkantenwinkel einer Pyramide mP2 mit 131° 13′.

$$\begin{aligned} \log.\cos a = \log.\cos 65^0\ 36'\ 30'' &= 9{,}6159206 - 10 \\ -\log.\sin 30^0 &= 9{,}6989700 - 10 \\ \hline &\ \ 9{,}9169506 - 10 \\ a &= 34^0\ 18'\ 56''. \end{aligned}$$

$$\log.\ \text{num.}\ mc = \log.\operatorname{cotg} 34^0\ 18'\ 56'' = 0{,}1658645.$$

$$\text{num.}\ mc = 1{,}46509.$$

Vergleicht man dies Resultat mit c der Stammform, so folgt m = 2. Die Pyramide ist also = 2P2.

β. Gegeben der Winkel in den Randkanten Z.

Die Berechnung ist alsdann sehr einfach, indem:

$$\operatorname{tg} {}^1/_2 Z = mc \text{ ist.}$$

c. Die Prismen ∞P und ∞P2, sowie oP, bedürfen keiner Berechnung.

d. Die Pyramiden mPn.

Man bezeichnet bei jeder Pyramide mPn die Winkel der normalen Polkanten mit X, die der diagonalen Polkanten mit Y, die der Randkanten mit Z. — Bald sind die normalen Polkanten die stumpferen und die diagonalen die schärferen, bald ist das Verhältniss umgekehrt; es hängt dies vom Werthe von n ab. Zur näheren Einsicht stellen wir uns die regelmässig zwölfseitige Pyramide, die in der Krystall-

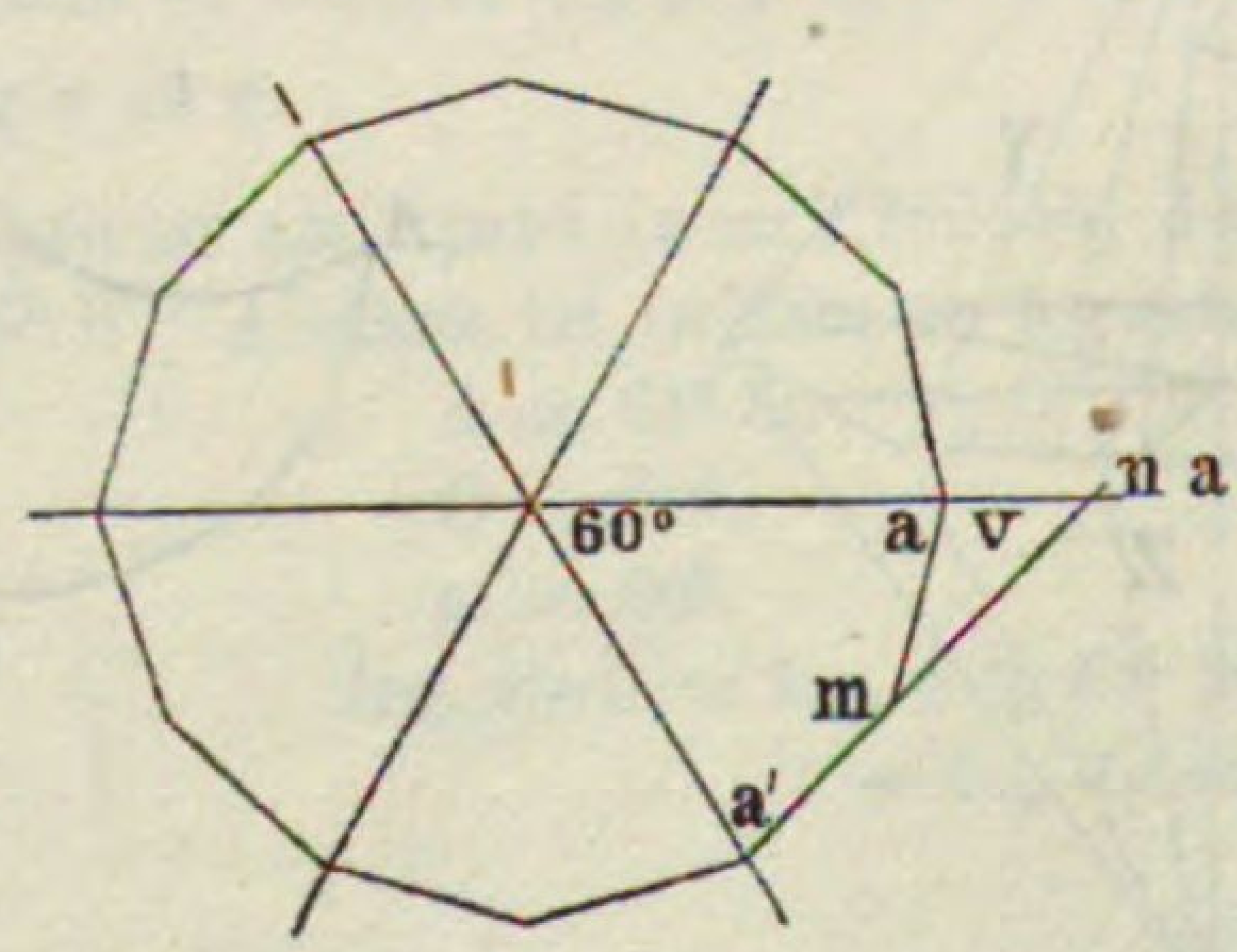


Fig. 174.

welt nicht möglich ist, vor und berücksichtigen, Fig. 174, deren basischen Schnitt, welcher ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Zwölfeck ist.

In einem Sextanten dieser Gestalt ist der von den Axen eingeschlossene Winkel = 60°, folglich die Summe der übrigen = 300°. Diese letztere Summe setzt sich aber bei der regelmässig zwölfseitigen Pyramide aus den einander gleichen Theilen m und (a + a′) zusammen, und es ist überdies a sowohl, als auch $a' = \frac{m}{2} = 75^0$. Somit erhält man für den Winkel v den Werth 45° und kann, wenn die Längen a und a′ = 1 gesetzt werden, den Werth n des Abstandes na bestimmen zu:

$$n = \frac{\sin a}{\sin v}.$$

Wird dies ausgerechnet, so folgt n = 1,36603, und es stellt dieser Werth die Grösse des irrationalen Werthes n der regelmässig zwölfseitigen Pyramide dar.

Bei allen in der Krystallwelt vorkommenden Pyramiden mPn wird n nie = 1,36603, bewegt sich aber zwischen den Grenzen > 1 und < 1,36603 sowie > 1,36603 und < 2. Bei den Pyramiden der letzteren Abtheilung liegen die stumpferen Polkanten den Nebenaxen und die schärferen den Zwischenaxen an; die Pyramiden der ersteren Abtheilung verhalten sich bezüglich der Lage ihrer Polkanten derartig, dass sie an den Nebenaxen die schärferen und an den Zwischenaxen die stumpferen Polkanten aufweisen. —

a. Gegeben die Winkel X und Z.

Man lege ein sphärisches Dreieck von der Lage des Dreiecks 1. in Fig. 175 mit:

$A = \frac{1}{2} X.$
$B = \frac{1}{2} Z.$
$C = 90^0.$

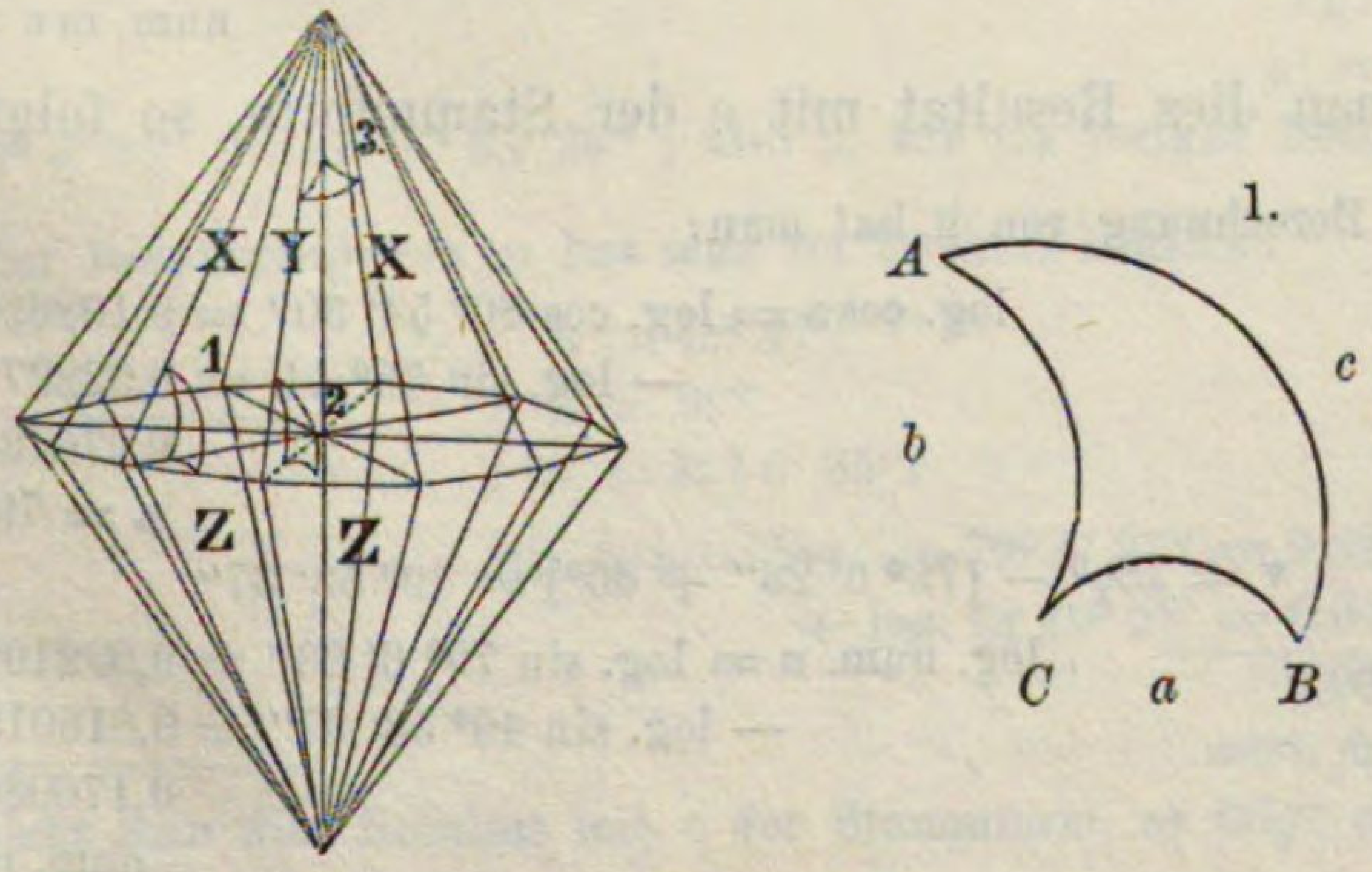


Fig. 175.

Alsdann ist: $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$; $tg\, b = mc$,

Ferner ist: $\cos a = \frac{\cos A}{\sin B}$ und man hat in a die Neigung der Kante Z zur Nebenaxe in der Basis. Bildet man nun $v = 180^0 - (a + 60^0)$, so ist $n = \frac{\sin a}{\sin v}$.

Zur Rückrechnung von a aus gegebenem n kann man setzen: $tg\, a = \frac{n . \sin 60^0}{1 - n . \cos 60^0}$. Dividirt man im rechten Theile dieser Gleichung Zähler und Nenner mit cos 60⁰ und berücksichtigt, dass $\frac{1}{\cos 60^0} = 2$ ist, so erhält man die zur Rückrechnung logarithmisch bequeme Form: $tg\, a = \frac{n . tg\, 60^0}{2 - n}$. — Aus dieser Gleichung kann man natürlich auch n berechnen, wenn a bekannt ist. Man erhält alsdann: $\frac{n}{2 - n} = \frac{tg\, a}{tg\, 60^0}$.

Beispiel. Gegeben sei am Beryll ($c = 0{,}498860$) eine Pyramide mPn, deren Polkante $X = 161^0\, 49'$ und deren Randkante $Z = 113^0\, 28'$ messen mögen. Es sollen die Axenschnitte berechnet werden.

In dem zu legenden sphärischen Dreieck, vergl. Fig. 175, Dreieck 1, sind alsdann bekannt:

$$A = 80^0\, 54'\, 30''.$$
$$B = 56^0\, 44'.$$
$$C = 90^0.$$

$$\begin{aligned} \log. \cos b = \log. \cos 56^0\, 44' &= 9{,}7392055 - 10 \\ - \log. \sin 80^0\, 54'\, 30'' &= 9{,}9945093 - 10 \\ \hline &\ 9{,}7446962 - 10 \\ b &= 56^0\, 15'\, 14''. \end{aligned}$$

$$\log. num.\ m c = \log. tg\, 56^0\, 15'\, 14'' = 0{,}1751712.$$
$$num.\ m c = 1{,}49683.$$

Vergleicht man dies Resultat mit c der Stammform, so folgt m = 3.

Zur Berechnung von n hat man:

$$\begin{aligned} \log. \cos a = \log. \cos 80^0\, 54'\, 30'' &= 9{,}1986968 - 10 \\ - \log. \sin 56^0\, 44' &= 9{,}9222721 - 10 \\ \hline &\ 9{,}2764247 - 10 \\ a &= 79^0\, 6'\, 23''. \end{aligned}$$

$$v = 180^0 - (79^0\, 6'\, 23'' + 60^0) = 40^0\, 53'\, 37''.$$

$$\begin{aligned} \log. num.\ n = \log. \sin 79^0\, 6'\, 23'' &= 9{,}9921025 - 10 \\ - \log. \sin 40^0\, 53'\, 37'' &= 9{,}8160135 - 10 \\ \hline &\ 0{,}1760890 \\ num.\ n &= {}^3/_2. \end{aligned}$$

Die Pyramide ist $3P^3/_2$.

β. Gegeben die Winkel Y und Z.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 176, vergl. auch Fig. 175, Dreieck 2., mit:

$A' = \frac{1}{2}Y.$
$B' = \frac{1}{2}Z.$
$C' = 90^0.$

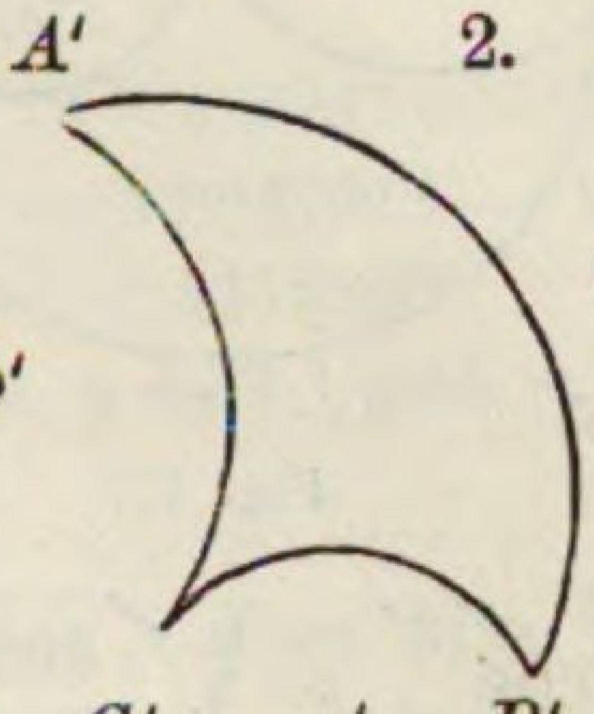


Fig. 176.

Man hat darin: $\cos a' = \frac{\cos A'}{\sin B'}$.

a' ist die Neigung von Z zur Zwischenaxe in der Basis, folglich ergibt sich die Neigung von Z zur Nebenaxe $a = 180^0 - (a' + 30^0)$, ferner findet man $v = a' - 30^0$ und hat $n = \frac{\sin a}{\sin v}$.

Zur Berechnung von m hat man in einem Dreieck, von der Lage des Dreiecks 1. in Fig. 175, nachfolgende bekannte Elemente:

$B = \frac{1}{2}Z.$
$C = 90^0.$
$a =$ soeben berechnet.

Man findet: $\operatorname{tg} b = \sin a . \operatorname{tg} B = mc.$

Beispiel. An einer Pyramide mPn des Berylls seien gemessen $Y = 153^0\ 1'$; $Z = 90^0\ 54'$.

Für das erste Dreieck ist alsdann:

$A' = 76^0\ 30'\ 30''.$
$B' = 45^0\ 27'.$
$C' = 90^0.$

$\log . \cos a' = \log . \cos 76^0\ 30'\ 30'' = 9{,}3679221 - 10$
$- \log . \sin 45^0\ 27' = 9{,}8528693 - 10$
$9{,}5150528 - 10$
$a' = 70^0\ 53'\ 25''.$

$a = 79^0\ 6'\ 35''$; $v = 40^0\ 53'\ 25''$; also n, wie im vorigen Beispiel $= \frac{3}{2}$.

Zur Berechnung von m hat man im zweiten Dreieck:

$B = 45^0\ 27'.$
$C = 90^0.$
$a = 79^0\ 6'\ 35''.$

$\log . \operatorname{tg} b = \log . \sin 79^0\ 6'\ 35'' = 9{,}9921074 - 10$
$+ \log . \operatorname{tg} 45^0\ 27' = 0{,}0068222$
$9{,}9989296 - 10$
num. $m c = 0{,}997538.$

Vergleicht man dies Resultat mit c der Stammform, so folgt $m = 2$.

Die Pyramide ist also $2P\frac{3}{2}$.

γ. Gegeben die Winkel X und Y.

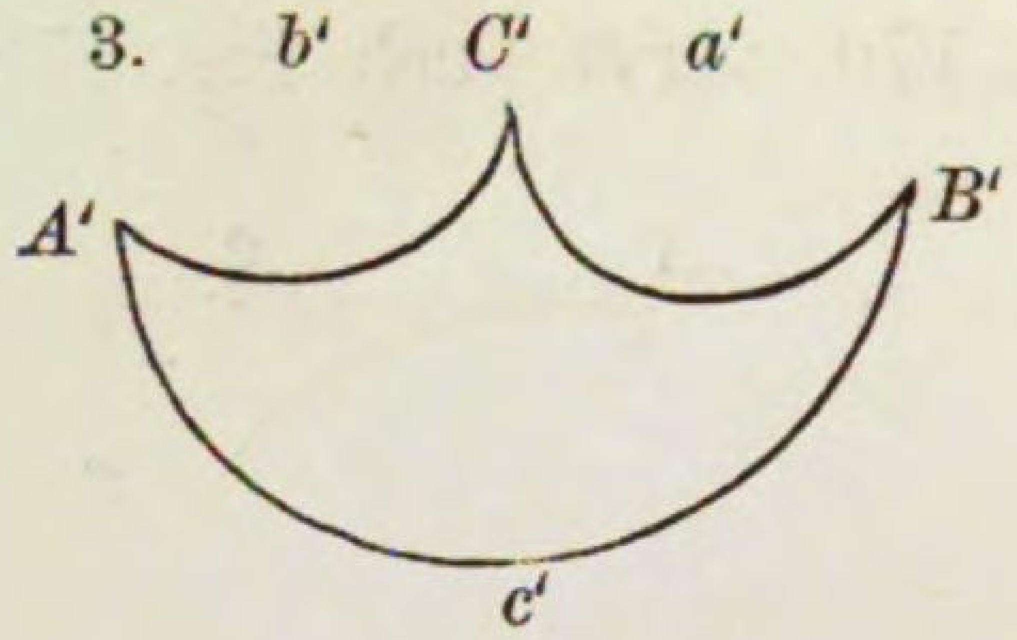


Fig. 177.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 177, vergl. auch Fig. 175, Dreieck 3., mit:

$$A' = \frac{1}{2}Y.$$
$$B' = \frac{1}{2}X.$$
$$C' = 30^0$$

und bestimme:

$$\cos\frac{a'}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A' + B' - C') \,.\, \cos\frac{1}{2}(A' + C' - B')}{\sin C' \,.\, \sin B'}}.$$

Bildet man hierauf $90^0 - a' = b$, so ist $\operatorname{tg} b = mc$.

Ferner hat man in einem zweiten Dreieck von der Lage des Dreiecks 1. in Fig. 175.

$$A = \frac{1}{2}X.$$
$$C = 90^0.$$
$$b = \text{soeben berechnet.}$$

Man findet $\operatorname{tg} a = \sin b \,.\, \operatorname{tg} A$, bildet $v = 180^0 - (a + 60^0)$ und erhält endlich $n = \frac{\sin a}{\sin v}$.

Beispiel. Gemessen seien an einer Pyramide mPn des Berylls $X = 134^0\ 26'$; $Y = 167^0\ 10'$.

Für das erste Dreieck ist alsdann:

$$A' = 83^0\ 35'.$$
$$B' = 67^0\ 13'.$$
$$C' = 30^0.$$

$$\frac{A' + B' - C'}{2} = 60^0\ 24'\ ;\ \frac{A' + C' - B'}{2} = 23^0\ 11'.$$

$$\log.\cos\frac{a'}{2} = \log.\cos 60^0\ 24' = 9{,}6936758 - 10$$
$$+ \log.\cos 23^0\ 11' = 9{,}9634336 - 10$$
$$9{,}6571094 - 10$$

$$\log.\sin 30^0\ 0' = 9{,}6989700 - 10$$
$$+ \log.\sin 67^0\ 13' = 9{,}9647195 - 10$$
$$9{,}6636895 - 10$$

$$9{,}6636895 - 10$$
$$19{,}9934199 - 10$$

Daraus $\sqrt{\ } = 9{,}9967099 - 10$

$$a' = 14^0\ 5'\ 14''.$$

$$b = 90^0 - 14^0\ 5'\ 14'' = 75^0\ 54'\ 46''.$$

$$\log.\,\text{num.}\ mc = \log.\operatorname{tg} 75^0\ 54'\ 46'' = 0{,}6004204.$$
$$\text{num.}\ mc = 3{,}98493.$$

Vergleicht man dies mit c der Stammform, so folgt $m = 8$.

Für das zweite Dreieck ist:

$$A = 67^0\ 13'.$$
$$C = 90^0.$$
$$b = 75^0\ 54'\ 46''.$$

$$\log. \text{tg}\, a = \log. \sin 75^0\, 54'\, 46'' = 9{,}9867388 - 10$$
$$+ \log. \text{tg}\, 67^0\, 13' = 0{,}3767310$$
$$0{,}3634698$$
$$a = 66^0\, 35'\, 7''.$$

$$v = 180^0 - (66^0\, 35'\, 7'' + 60^0) = 53^0\, 24'\, 53''.$$

$$\log. \text{num}.\, n = \log. \sin 66^0\, 35'\, 7'' = 9.9626874 - 10$$
$$- \log. \sin 53^0\, 24'\, 53'' = 9{,}9047012 - 10$$
$$0{,}0579862$$
$$\text{num}.\, n = 1{,}14284 = {}^8/_7.$$

Die Pyramide ist also $8P^8/_7$.

— Kann aus Zonenverhältnissen erkannt werden, dass die Pyramiden vom Zeichen Pn, mPm oder $mP\frac{m}{m-1}$ sind, so vereinfacht sich die Aufgabe, indem alsdann nur ein Ableitungscoëfficient zu berechnen ist, und dies durch Zuhülfenahme einer Winkelmessung geschehen kann.

e. Die Pyramiden Pn.

Dieselben liegen in der Zone P : P2, folglich hat ihre Polkante X dieselben Neigungen zu der Hauptaxe und der Nebenaxe, wie die Polkante X von P. Die für die Rechnung günstigst gelegenen Elemente, welche überdies am meisten in Betracht kommen, sind: die Polkanten X, die Neigungen Pn : P2 = $^1/_2$X + 90⁰ und Pn : P, aus welch' letzterem Winkel sich $^1/_2$X von Pn = $^1/_2$X von P + (180⁰ — w) ergibt. Der Winkel w stellt die Combinationskante Pn : P dar.

α. Gegeben der Winkel X.

In dem sphärischen Dreieck, Fig. 178, vergl. auch das Dreieck 1. in Fig. 175, sind bekannt: A = $^1/_2$X von Pn.
C = 90⁰.
b = bek. von P her.

Man hat: $\text{tg}\, a = \sin b \,.\, \text{tg} A$; $v = 180^0 - (a + 60^0)$

$$n = \frac{\sin a}{\sin v}.$$

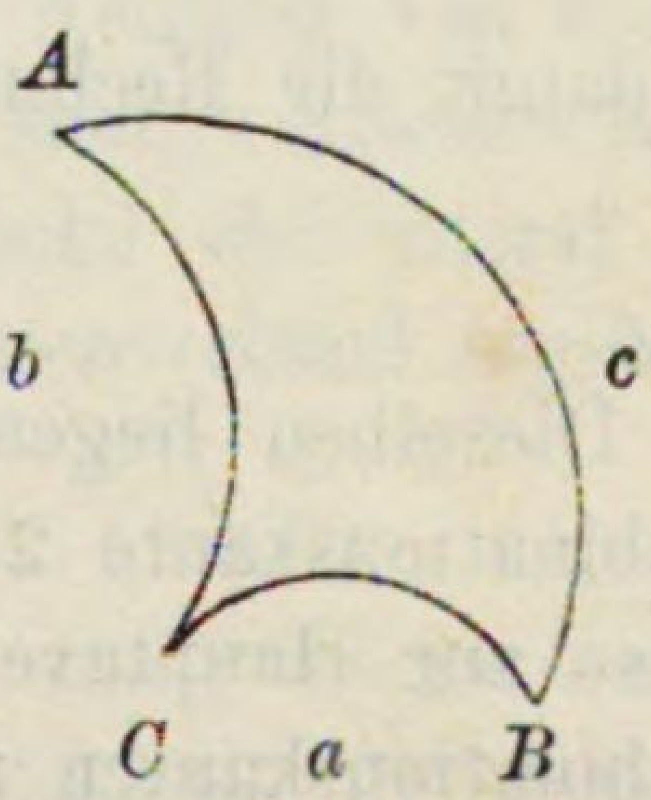


Fig. 178.

β. Gegeben der Winkel Z.

In demselben Dreieck sind nunmehr gegeben:
B = $^1/_2$Z von Pn.
C = 90⁰.
b = bek. von P her.

Man findet $\sin a = \text{cotg} B \,.\, \text{tg}\, b$; $v = 180^0 - (a + 60^0)$

$$n = \frac{\sin a}{\sin v}.$$

γ. Gegeben der Winkel Y.

Zur Berechnung ist die aus dem Zonenverhältniss sich ergebende Thatsache zu berücksichtigen, dass die Combinationskante Pn : P zur Combinationskante Pn : P unter demselben ebenen Winkel neigt, unter dem die Polkante von P zur Polkante von P am Poleck steht. Vergl., unter gehöriger Berücksichtigung des nunmehr in Betracht kommenden hexagonalen Axensystems, die Fig. 97 pag. 161.

Dieser ebene Winkel, er heisse 2b′, ist entweder schon aus der Berechnung der Grundform bekannt, oder kann, wenn dies nicht der Fall, leicht in seiner Hälfte durch die Relation: $\sin b' = \sin 30^0 . \sin c'$ gefunden werden. In dieser letzteren Gleichung, resultirend aus einem am Poleck von P unter Berücksichtigung des diagonalen Hauptschnitts angelegten sphärischen Dreieck, bedeutet c′ die Neigung der Polkante X von P zur Hauptaxe.

Nunmehr hat man in einem sphärischen Dreieck, Fig. 179:

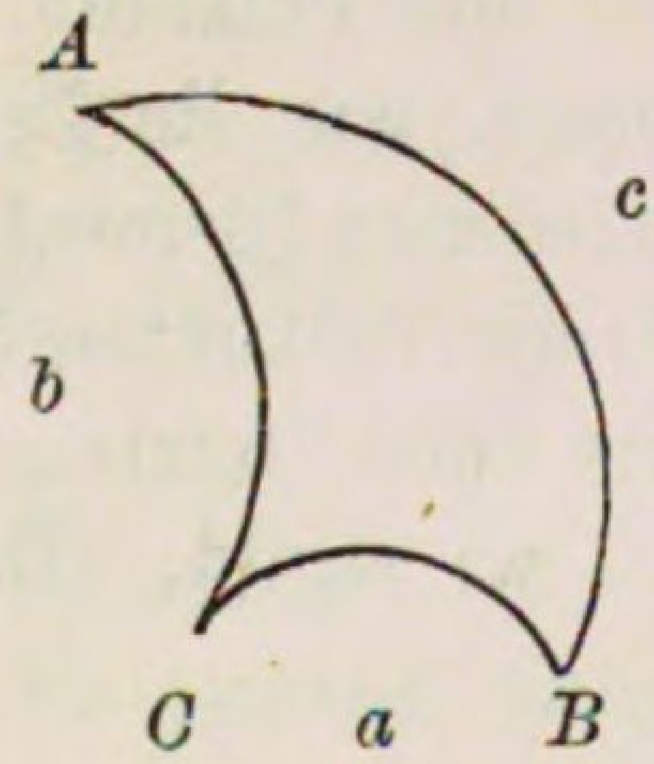


Fig. 179.

$A = {}^1/_2 Y$ von Pn.

$C = 90^0$.

$a = b'$ aus voriger Rechnung.

Man findet $\sin b = \operatorname{cotg} A . \operatorname{tg} a$ und hat in b, welches als stumpfer Winkel zu nehmen ist, die Neigung von Y zur Höhenlinie auf der Fläche von P. Folglich findet man durch $b'' = {}^1/_2$ Rdkw. von P — $(180^0 - b)$ die Neigung von Y zur Zwischenaxe in der Basis und vollendet damit die Rechnung in bekannter Weise.

f. Die Pyramiden mPm.

Dieselben liegen in der Zone P : 2P2. Daraus folgt, dass die Combinationskante 2P2 : mPm oder die Combinationskante P : mPm ebenso zur Hauptaxe neigt, wie die Polkante von P. Die genannten Combinationskanten neigen aber ferner noch zur anliegenden Polkante von P, zur Combinationskante 2P2 : ∞P und zur Combinationskante P : ∞P gerade so, wie es die Combinationskante P : 2P2 thun würde. Hieraus lassen sich zur Rechnung dienliche Elemente bilden.

Die Berechnung des einen Ableitungscoëfficienten m kann geführt werden aus der Kenntniss eines Kantenwinkels X, Y oder Z von mPm, oder auch aus der Kenntniss einer der Combinationskanten mPm zu P, 2P2 oder ∞P. Für die Zwecke der Praxis kommt vorzugsweise die Berechnung aus X, oder aus einer der Combinationskanten in Betracht. Bezüglich der letzteren ist zu bemerken, dass sich die Fälle der Com-

binationskanten auf die Neigung mPm : 2P2 zurückführen lassen. Wir werden daher nachfolgend blos den Fall behandeln, in dem X oder die Combinationskante mPm : 2P2 gegeben ist, und die Berechnung aus Y und Z nur andeuten.

Gegeben der Winkel X oder die Combinationskante mPm : 2P2.

Man lege, Fig. 180, ein sphärisches Dreieck, entweder mit:

A = $\frac{1}{2}$X.
C = 90°.
a = bek. von 2P2 her*

und bestimme sin b = cotg A . tg a; oder mit:

B = Combk. mPm : 2P2.
C = 90°.
a = bek. von 2P2 her

und berechne tg b = sin a . tg B. In beiden Fällen ist b ein stumpfer Winkel und stellt die Neigung der Kante X zur Höhenlinie auf der Fläche von 2P2 dar.

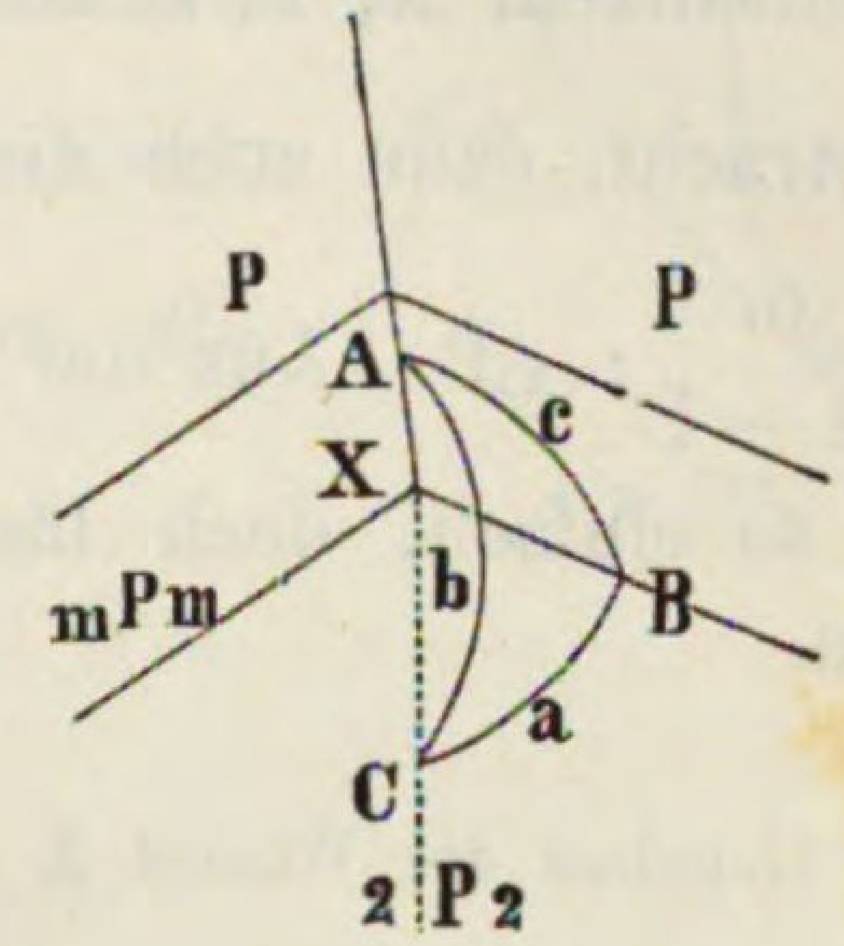


Fig. 180.

Alsdann setze man b′ = $\frac{1}{2}$ Rdkw. von 2P2 — (180° — b) und ermittele den Schnitt auf der Hauptaxe durch tg b′ = mc.

Anmerkung. Wenn Y oder Z gegeben ist, berechne man im ersteren Falle die Neigung von Y zur Höhenlinie auf der Fläche von P und stelle daraus die Neigung von Y zur Zwischenaxe in der Basis dar; im letzteren ermittele man die Neigung der Randkante Z von mPm gegen die Randkante von 2P2 und gehe zur Neigung von Z zur Nebenaxe über. — Nachdem diese Stücke gefunden sind, vollendet man die weitere Berechnung ohne Mühe. Welche Stücke der zuerst zu berechnenden sphärischen Dreiecke sich aus dem Zonenverband ergeben, lehrt eine einfache Ueberlegung.

g. Die Pyramiden $mP\frac{m}{m-1}$.

Dieselben liegen in der Zone 2P2 : ∞P. Daraus folgt, dass die Combinationskante $mP\frac{m}{m-1}$: ∞P, oder die Combinationskante $mP\frac{m}{m-1}$: 2P2 gerade so zur Kante ∞P : ∞P neigt, wie die Combinationskante 2P2 : ∞P. Ferner ergibt sich, dass eine jede dieser

* Wenn a nicht bekannt ist, so findet man es durch tg a = sin b . tg A, in welcher Gleichung A = $\frac{1}{2}$X von P ist und b die Neigung der Kante X von P zur Höhenlinie auf der Fläche von 2P2 vorstellt.

zwei ersteren Combinationskanten zur entsprechenden anliegenden gerade so neigt, wie $2P2 : \infty P$ zu $2P2 : \infty P$. Hieraus sind zur Rechnung dienliche Elemente zu bilden.

Da bei diesen Pyramiden $n = \frac{m}{m-1}$ ist, so braucht nur ein Ableitungscoëfficient, entweder m oder n, berechnet zu werden und dies kann durch Zuhülfenahme einer Winkelmessung geschehen. Von den Kantenwinkeln X, Y, Z kommen hauptsächlich der erste und der letzte in Betracht, dann auch die Combinationskanten $mP\frac{m}{m-1} : 2P2$ und $mP\frac{m}{m-1} : \infty P$. Aus der Kenntniss der letzteren ist die Berechnung nicht so einfach, doch lässt sie sich immer auf die erstere zurückführen.

a. **Gegeben der Winkel X oder die Combinationskante $mP\frac{m}{m-1} : 2P2$.**

Man lege, Fig. 181, ein sphärisches Dreieck, entweder mit:

$A = \frac{1}{2}X.$
$C = 90^0.$
$a = $ bek. von 2P2 her*

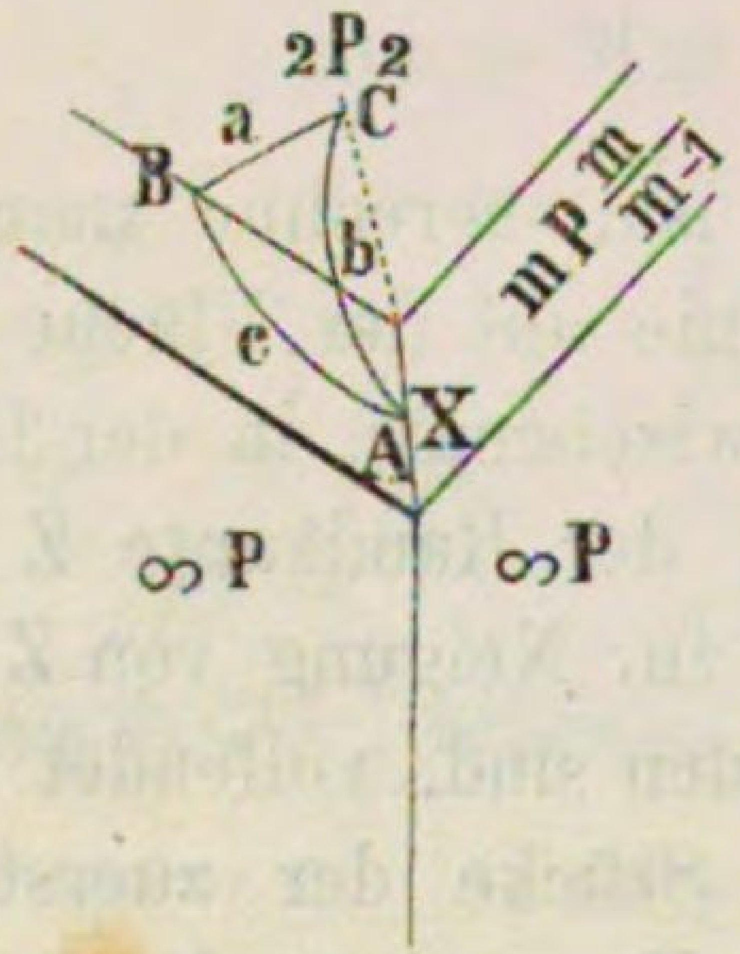


Fig. 181.

und bestimme $\sin b = \operatorname{cotg} A \,.\, \operatorname{tg} a$; oder mit:

$B = $ Combk. $mP\frac{m}{m-1} : 2P2.$
$C = 90^0.$
$a = $ bek. von 2P2 her

und berechne $\operatorname{tg} b = \sin a \,.\, \operatorname{tg} B$. In beiden Fällen stellt der stumpfe Winkel b die Neigung der Kante X von $mP\frac{m}{m-1}$ zur Höhenlinie auf der Fläche von 2P2 dar.

Setzt man alsdann $b' = \frac{1}{2}$ Rdkw. von $2P2 + (180^0 - b)$ so ist $\operatorname{tg} b' = mc$; n findet sich aus $n = \frac{m}{m-1}$.

Anmerkung. Wenn man die Neigung $mP\frac{m}{m-1} : \infty P$ kennt, zur Neigung $mP\frac{m}{m-1} : 2P2$ nicht übergehen, sondern die Pyramide aus

* Der Winkel a ist derselbe, wie der bei der Berechnung der mPm, vergl. pag. 347 und bestimmt sich, wie dort gezeigt. Man kann ihn auch durch $\operatorname{tg} a = \sin b \,.\, \operatorname{tg} 60^0$ finden, in welcher Gleichung $b = \frac{1}{2}$ Rdkw. von $2P2 + 90^0$ ist. —

ersterem Winkel direct berechnen will, so ist ein sphärisches Dreieck, Fig. 182, mit folgenden Stücken zu legen:

$B' =$ Combk. $mP\frac{m}{m-1} : \infty P$.
$C' = 60^0$.
$a' =$ Neigung der Combk. $2P2 : \infty P$ zur Combk. $\infty P : \infty P$. *

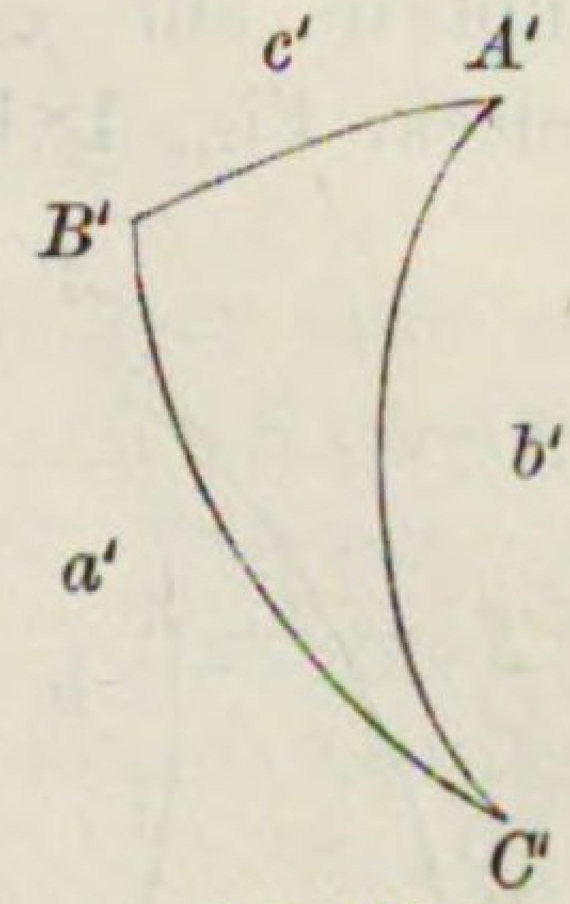


Fig. 182.

Dieser letztere Winkel ist mit dem Winkel der Combinationskante $mP\frac{m}{m-1} : \infty P$ zur Kante $\infty P : \infty P$ identisch, da $2P2$ ebenfalls vom allgemeinen Zeichen $mP\frac{m}{m-1}$ ist.

Man findet: $\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \sin\varphi}{\sin(C + \varphi)}$
mit $\operatorname{tg}\varphi = \cos a \,.\, \operatorname{tg} B$.

Ferner ist: $\operatorname{tg}(b - 90^0) = mc$; n findet sich aus $n = \frac{m}{m-1}$.

β. Gegeben der Winkel Z.

Man bestimme die Neigung von Z zur Projection des basischen Schnitts auf ∞P durch ein Dreieck, Fig. 183, welches folgende Stücke enthält:

$A' = \frac{1}{2}Z$ von $mP\frac{m}{m-1}$.
$C' = 90^0$.
$a' = a'' - 90^0$.

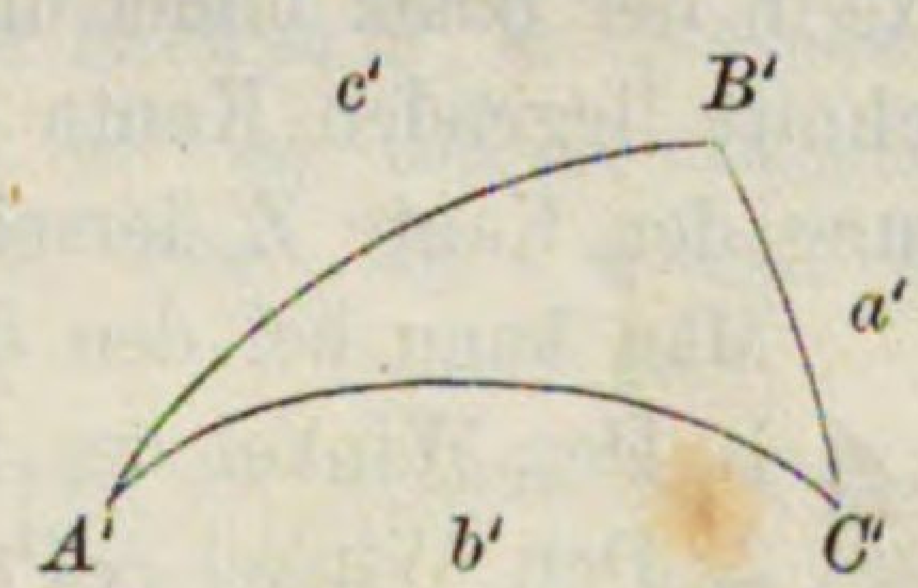


Fig. 183.

Hierbei stellt a″ die Neigung der Combinationskante $mP\frac{m}{m-1} : \infty P$ zur Kante $\infty P : \infty P$ dar und ist somit gleichbedeutend mit a′ im vorigen Falle.

Es ist $\sin b' = \operatorname{cotg} A' . \operatorname{tg} a'$ und b′ als stumpfer Winkel zu nehmen. Die Neigung von Z zur Nebenaxe = a erhält man durch $a = 60^0 + (180^0 - b')$; ferner ist $v = 180^0 - (a + 60^0) = b' - 120^0$ und $n = \frac{\sin a}{\sin v}$. Da aber $n = \frac{m}{m-1}$, so findet sich schliesslich auch $m = \frac{n}{n-1}$.

* Man erhält diesen Winkel durch $\operatorname{tg} c'' = \frac{\operatorname{tg} b''}{\cos A''}$, in welcher Gleichung $A'' = 60^0$ und $b'' = \frac{1}{2}$ Rdkw. von $2P2 + 90^0$ ist.

γ. Gegeben der Winkel Y.

Man berechnet die Neigung der Polkante Y zur Projection der Hauptaxe auf ∞P und hat zu diesem Ende in einem sphärischen Dreieck, Fig. 184:

$$A = \frac{1}{2} Y.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 180^0 - a'.$$

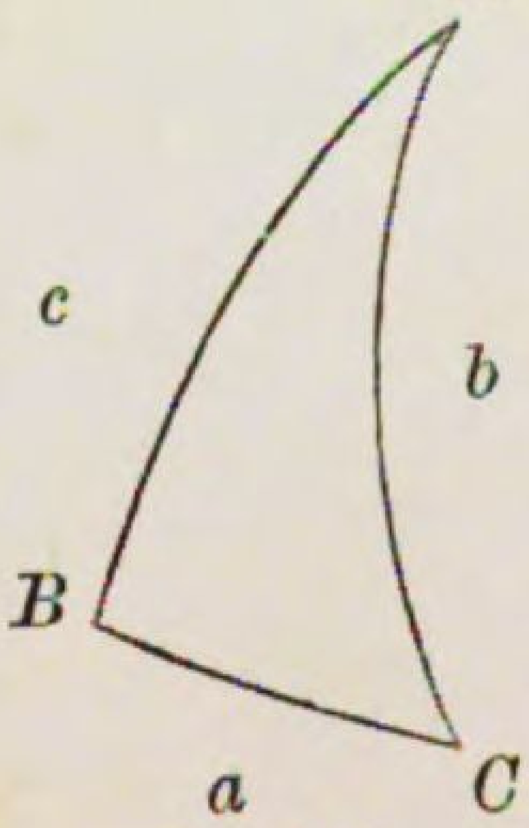


Fig. 184.

Der Winkel a′ ist hier, wie in den zwei vorhergehenden Fällen, gleich der Neigung der Combinationskante $mP \frac{m}{m-1} : \infty P$ zur Kante $\infty P : \infty P$.

Man findet $\sin b = \operatorname{cotg} A . \operatorname{tg} a$ und hat b als stumpfen Winkel anzusehen. Die Neigung $b - 90^0$ ergibt den Winkel, welchen Y mit der Zwischenaxe in der Basis bildet und hiermit ist dann in gewohnter Weisé weiter zu rechnen und $n = \frac{m}{m-1}$ darzustellen.

h. Die Prismen ∞Pn.

Ihre Berechnung ergibt sich aus der der dihexagonalen Pyramide. Der halbe Winkel der im normalen Hauptschnitt liegenden Kante X ist derselbe, wie der, den in der Gestalt mPn die Kante Z zur Nebenaxe in der Basis bildet und der halbe Winkel der im diagonalen Hauptschnitt liegenden Kante Y wird in der Pyramide mPn durch die Neigung der Kante Z derselben zur Zwischenaxe repräsentirt.

Man kann bei den dihexagonalen Prismen messen:

1. Den Winkel der im normalen Hauptschnitt liegenden Kante X.
2. Den Winkel $\infty Pn : \infty P2 = \frac{1}{2} X + 90^0$.
3. Den Winkel der im diagonalen Hauptschnitt sich befindenden Kante Y. Daraus folgt $\frac{1}{2} X = 180^0 - (\frac{1}{2} Y + 30^0)$.
4. Den Winkel $\infty P : \infty Pn = \frac{1}{2} Y + 90^0 = Y'$, daraus findet man $\frac{1}{2} X = 240^0 - Y'$.

Aus der Kenntniss von $\frac{1}{2} X = a$ folgt, wie früher, $v = 180^0 - (a + 60^0)$ und endlich $n = \frac{\sin a}{\sin v}$.

Beispiel. Gemessen sei am Turmalin $\infty P2 : \infty Pn = 166^0\ 6'$, so ist $a = 76^0\ 6'$ und $v = 43^0\ 54'$.

$$\begin{aligned} \log, \text{num. } n = \log. \sin 76^0\ 6' &= 9{,}9870924 - 10 \\ - \log. \sin 43^0\ 54' &= 9{,}8409850 - 10 \\ \hline &\ \ 0{,}1461074 \\ \text{num. } n &= 1{,}3999 = \tfrac{7}{5}. \end{aligned}$$

Das Prisma ist $= \infty P \frac{7}{5}$.

Zur Rückrechnung der Winkel aus den Ableitungscoëfficienten empfiehlt sich auch hier: $\operatorname{tg} a = \frac{n}{2 - n} \cdot \operatorname{tg} 60^0$.

i. Die Pyramiden mPn in Combinationen.

Combinirt mit einer vorherrschenden Pyramide mPn eine untergeordnete m′Pn′ derartig, dass entweder die Kanten X, Y oder Z zugeschärft werden, so ist die neue Pyramide aus der Kenntniss eines ihrer Kantenwinkel zu berechnen, da aus dem Combinationsverhältniss entweder die Neigung von X der erst genannten Pyramide zur Hauptaxe oder zur Nebenaxe, von Y zur Hauptaxe oder zur Zwischenaxe, von Z zur Nebenaxe oder zur Zwischenaxe bekannt ist. Ueberdies ist eine Pyramide m′Pn′, welche die Randkanten von mPn zuschärft = m′Pn (m′ > m) und eine solche, die eine Zuschärfung der Polkanten X hervorbringt = mPn′ (n′ > n).

Combinirt eine Pyramide mPn mit einer vorherrschenden Pyramide mP oder mP2, mit ∞P, ∞P2 oder ∞Pn, so sind im Allgemeinen ein Kantenwinkel der Pyramide und eine Combinationskante zu der betreffenden Gestalt erforderlich, um die Ableitungscoëfficienten zu berechnen. Dabei muss das Bestreben in erster Linie darauf gerichtet sein, die Neigung der betreffenden Pyramidenkante zu einem bekannten Element der anderen Gestalten (Kante oder Höhenlinie auf einer Fläche) zu ermitteln, worauf dann die Rechnung in gewohnter Weise fortgeführt und beendet wird. — Ist oP an der Combination vorhanden, so ergibt die Neigung oP : mPn, wenn sie von 180⁰ abgezogen wird, den halben Randkantenwinkel.

Ist keine eigenthümliche Kante vorhanden, so müssen zwei Combinationskanten herangezogen werden, vergl. Fig. 185[b], die eine Combination von mPn mit mP oder mP2 und Fig. 186[a], die eine solche

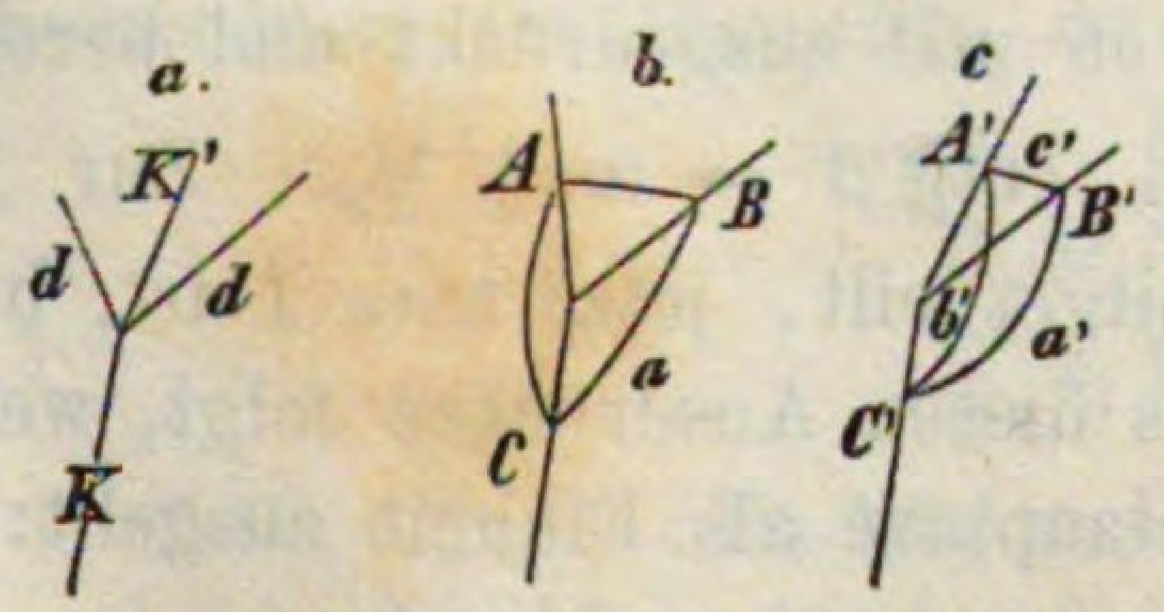


Fig. 185.

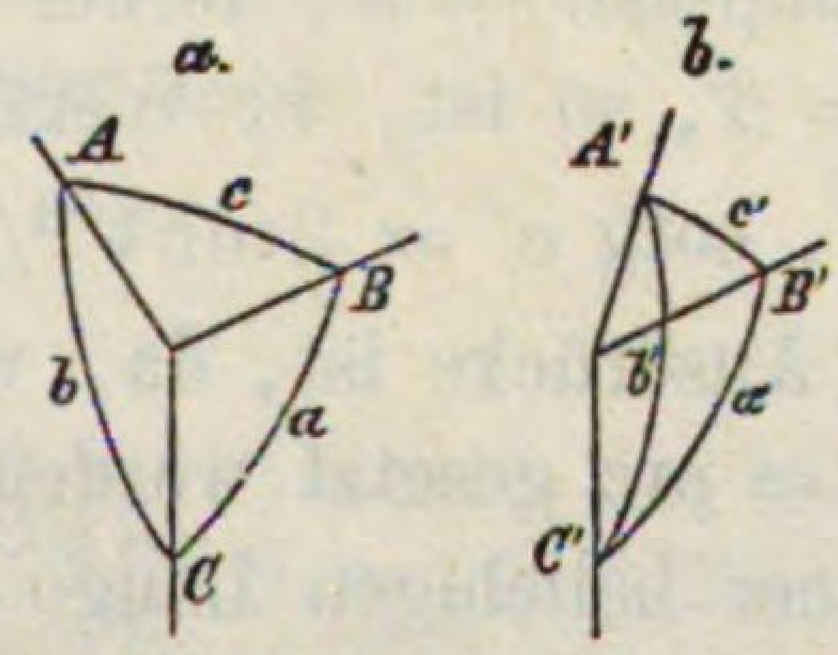


Fig. 186.

von mPn mit ∞P, ∞P2 oder ∞Pn so darstellen, dass die zwölfseitige Pyramide mit nur **einer** Fläche erscheint.

Es ist alsdann auf der sog. zugehörigen Seite vergl. Fig. 185[b] und Fig. 186[a] zuerst die Neigung der Combinationskante gegen ein bekanntes krystallographisches Element zu ermitteln, d. h. in beiden Fällen die Seite a darzustellen und hierauf eine eigenthümliche Kante der Pyramide, in Fig. 185[c] und Fig. 186[b] mit A′ bezeichnet, sowie deren Neigung b′ zu dem ersterwähnten krystallographischen Element zu berechnen, worauf dann die fernere Rechnung den gewöhnlichen Verlauf nimmt.

k. Die Rhomboëder $\pm \frac{mP}{2} = \pm mR$.

Geht man zum Zwecke ihrer Berechnung vom vollständigen Flächenzeichen aus:

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu + \mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu - \mu} : \frac{a''}{\nu - \mu} : \frac{b''}{\nu - 2\mu} : c(c = 1),$$

so muss die der Fläche entsprechende Sectionslinie in der Projection, da erstere einer Axe a parallel geht, dies gleichfalls thun, und es wird somit der inverse Werth des Axenschnittes auf der betreffenden Axe, z. B. $\mu = o$ werden müssen. Man erhält alsdann für die Sectionslinie des Rhomboëders, welche der Axe a parallel geht:

$$\frac{a}{o} : \frac{b}{\nu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu} : \frac{a''}{\nu} : \frac{b''}{\nu}.$$

Durch den Anblick der Projection eines Rhomboëders auf oP, dargestellt z. B. auf Tafel X., Fig. 1, überzeugt man sich, wenn man die Sectionslinie von der eben erwähnten Lage in Betracht zieht, dass die Höhenlinie auf der entsprechenden Fläche des Rhomboëders in $\frac{b'}{2\nu}$, die dieser Fläche anliegenden Polkanten in $\frac{b}{\nu}$ und $\frac{b''}{\nu}$ einschneiden.

Nennt man die Neigung der Höhenlinie auf der Rhomboëderfläche zur Hauptaxe $= \alpha'$, ferner die Neigung einer Polkante zu derselben Axe $= \beta'$, so ist, in Werthen von mP ausgedrückt und bezogen auf $a = 1$, $\text{cotg}\,\alpha' = 2mc\sqrt{1/3}$ und $\text{cotg}\,\beta' = mc\sqrt{1/3}$. Zur Bildung dieser Ausdrücke ist, da, wie mitgetheilt, jetzt $a = 1$ ist, $b = \sqrt{3}$ und $\nu = mc$ gesetzt worden. Aus diesen Ausdrücken folgt, wenn man von einer beliebigen Länge der Hauptaxe als Einheit ausgeht:

$$\text{tg}\,\alpha' : \text{tg}\,\beta' = 1 : 2 \text{ ; } \text{tg}\,\beta' = 2\,\text{tg}\,\alpha'.$$

Mit Hülfe dieser Relation lässt sich beweisen, dass wenn man in einem Rhomboëder durch die oberen und unteren Endpunkte der im Zickzack liegenden Randkanten, senkrecht zur Hauptaxe, Schnitte führt, dieselben die Hauptaxe in drei gleiche Theile zerlegen.

Auf Tafel XI. stelle Fig. 1 einen Rhomboëderhauptschnitt dar. Die Neigung der Projection der Höhenlinie auf der Rhomboëderfläche, CD′, zur Hauptaxe CC′ sei $= \alpha'$, die Neigung der Projection der Polkante X des Rhomboëders, CD, zu derselben Axe $= \beta'$. Die Projectionen der zwei, senkrecht zur Hauptaxe geführten Schnitte seien dargestellt durch AD und A′D′.

Man hat alsdann: $AB : BD = 1 : 2$ und

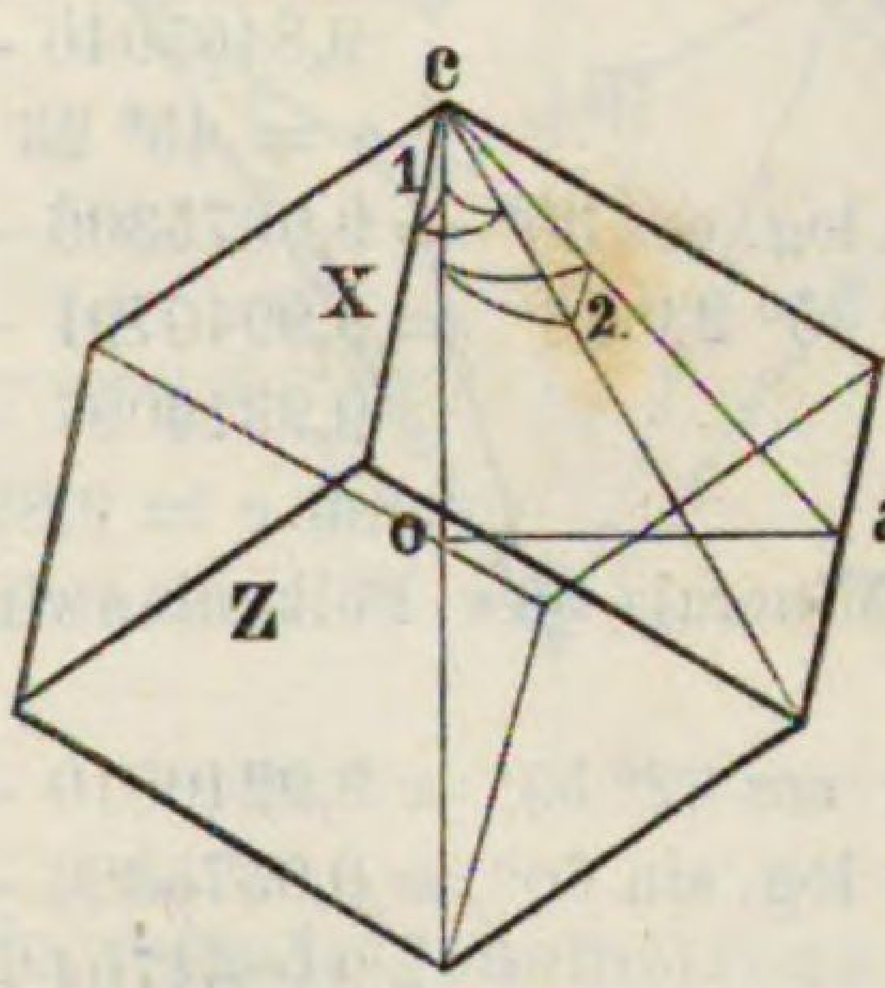
$$AC : CD' = AB : D'B' = AB : BD = 1 : 2,$$

woraus $AC = \frac{1}{2} CD'$ folgt.

Betrachtet man nun CD′ und CD als Axen, so ist CC′ die erste Kantenzonenlinie. Der Schnitt der Linie AD, welche die Axe CD′ im Abstand $\frac{1}{2}$, die Axe CD im Abstand 1 schneidet, muss auf der Kantenzonenlinie CC′ in $\frac{1}{3}$ erfolgen. Ebenso ist $C'B' = \frac{1}{3} CC'$, und es bleibt sonach für BB′ das letzte Drittel der Länge CC′ übrig, so dass also die ganze Hauptaxe in drei gleiche Theile zerlegt ist, was zu beweisen war.

Für jedes Rhomboëder gilt der Satz, dass der Polkantenwinkel X die Ergänzung des Randkantenwinkels Z zu 180° ist.

Nehmen wir an, X sei gegeben, Fig. 187, so ermittelt man



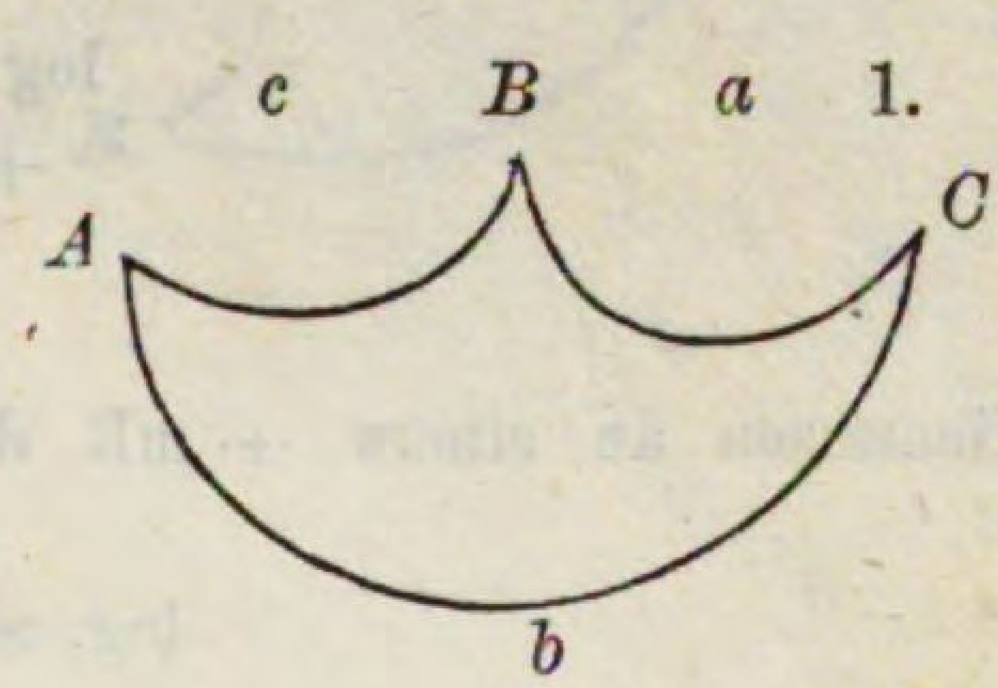


Fig. 187.

durch das Dreieck 1. zuerst die Neigung der Höhenlinie auf der Fläche des Rhomboëders zur Hauptaxe, da bekannt sind:

$$A = \frac{1}{2} X.$$
$$B = 60^0.$$
$$C = 90^0.$$

$$\text{Es ist: } \cos a = \frac{\cos A}{\sin B}.$$

Verbindet man nun den Mittelpunkt des Krystalls mit dem Mittelpunkt einer Randkante, so wird durch diese Verbindung eine Linie oa′ d. h. die Nebenaxe, hergestellt. Durch die weitere Verbindung von a mit c wird die Lage der Kante X des Holoëders fixirt.

In einem zweiten Dreieck, Fig. 188, vergl. auch das Dreieck 2. in Fig. 187, hat man:

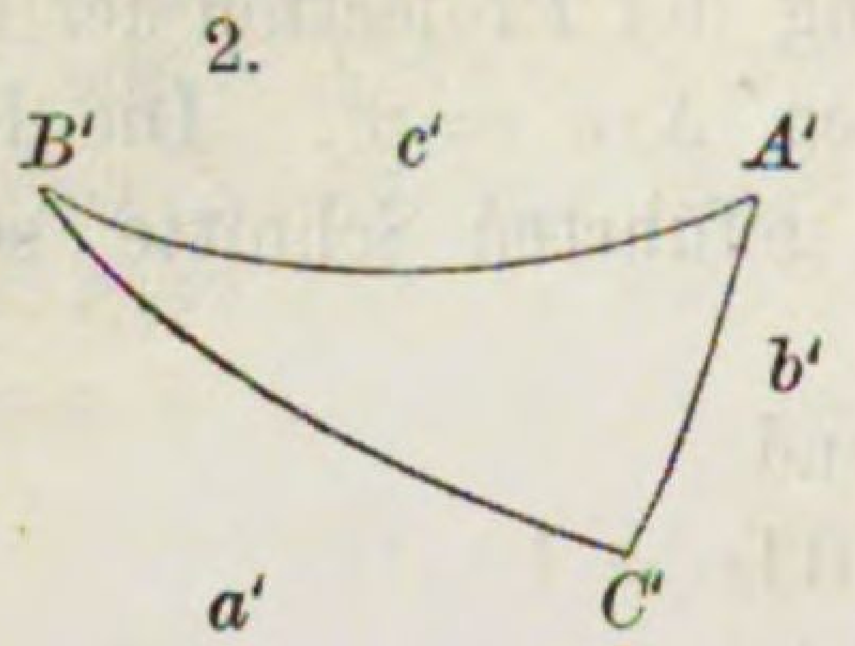


Fig. 188.

$B' = 30^0.$
$C' = 90^0.$
a' = dem soeben berechneten a.

Es ergibt sich c', d. h. die Neigung der Kante X des Holoëders zur Hauptaxe und zugleich auch der Schnitt auf derselben, durch:

$$\cotg c' = \cos B' \,.\, \cotg a' = m c.$$

Ist das Rhomboëder die Stammform, so ist $\cotg c' = c$. Kommen mehrere Rhomboëder derselben Ordnung an einer Combination vor, so behandelt man sie wie Pyramiden mP, deren Randkantenwinkel mittelbar oder unmittelbar gegeben sind. — Neigen Rhomboëderflächen zu $\infty P2$, so ist der Combinationskantenwinkel $mR : \infty P2 = {}^1/_2 Z$ von $mR + 90^0$.

Beispiele.

1. Gemessen sei der Polkantenwinkel des Stammrhomboëders des Kalkspaths zu $105^0\ 5'$. Es soll die Hauptaxenlänge berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\log.\cos a = \log.\cos 52^0\ 32'\ 30'' &= 9{,}7840352 - 10\\
-\log.\sin 60^0 &= 9{,}9375306 - 10\\
\hline
&\ 9{,}8465046 - 10\\
a &= 45^0\ 23'\ 26''.\\
\log.\cotg c = \log.\cos 30^0 &= 9{,}9375306 - 10\\
+\log.\cotg 45^0\ 23'\ 26'' &= 9{,}9940791 - 10\\
\hline
&\ 9{,}9316097 - 10\\
\text{num.}\, c &= 0{,}8542988.
\end{aligned}$$

2. Gemessen an einem $+ mR$ desselben Minerals der Polkantenwinkel $= 65^0\ 50'$.

$$\begin{aligned}
\log.\cos a = \log.\cos 32^0\ 55' &= 9{,}9240010 - 10\\
-\log.\sin 60^0 &= 9{,}9375306 - 10\\
\hline
&\ 9{,}9864704 - 10\\
a &= 14^0\ 13'\ 39''.\\
\log.\text{num.}\, m = \log.\cos 30^0 &= 9{,}9375306 - 10\\
+\log.\cotg 14^0\ 13'\ 39'' &= 0{,}5959369\\
\hline
&\ 0{,}5334675\\
-\log.\text{num.}\, c &= 9{,}9316097 - 10\\
\hline
&\ 0{,}6018578\\
\text{num.}\, m &= 4.
\end{aligned}$$

Die Gestalt ist $+ 4R$.

1. Die Skalenoëder $\pm \pi m P n = \pm m' R n'$.

Wir verstehen unter Skalenoëder hier, wie früher, vergl. pag. 325, ausschliesslich die Gestalten, welche sich durch rhomboëdrische Hemiëdrie aus einer gegebenen Pyramide mPn derartig ableiten, dass

ein Flächenpaar, welches einer, im diagonalen Hauptschnitt befindlichen Polkante Y anliegt, wächst, die damit in Kanten zusammenstossenden Paare verschwinden u. s. w.

Bei jedem Skalenoëder bezeichnet man, vergl. Fig. 189, die ihm eigenthümlichen Polkanten, welche sich als die kürzeren, schärferen darstellen, mit X, die Randkanten mit Z und nennt die längeren, stumpferen Polkanten, die das Skalenoëder mit der Pyramide mPn, aus der es abgeleitet wurde, gemeinsam hat, Y.

Zum Zwecke der Berechnung kommt ganz besonders das am Poleck anzulegende sphärische Dreieck in Betracht, in dem gegeben sind:

$$A = \tfrac{1}{2}X.$$
$$B = \tfrac{1}{2}Y.$$
$$C = 60^0.$$

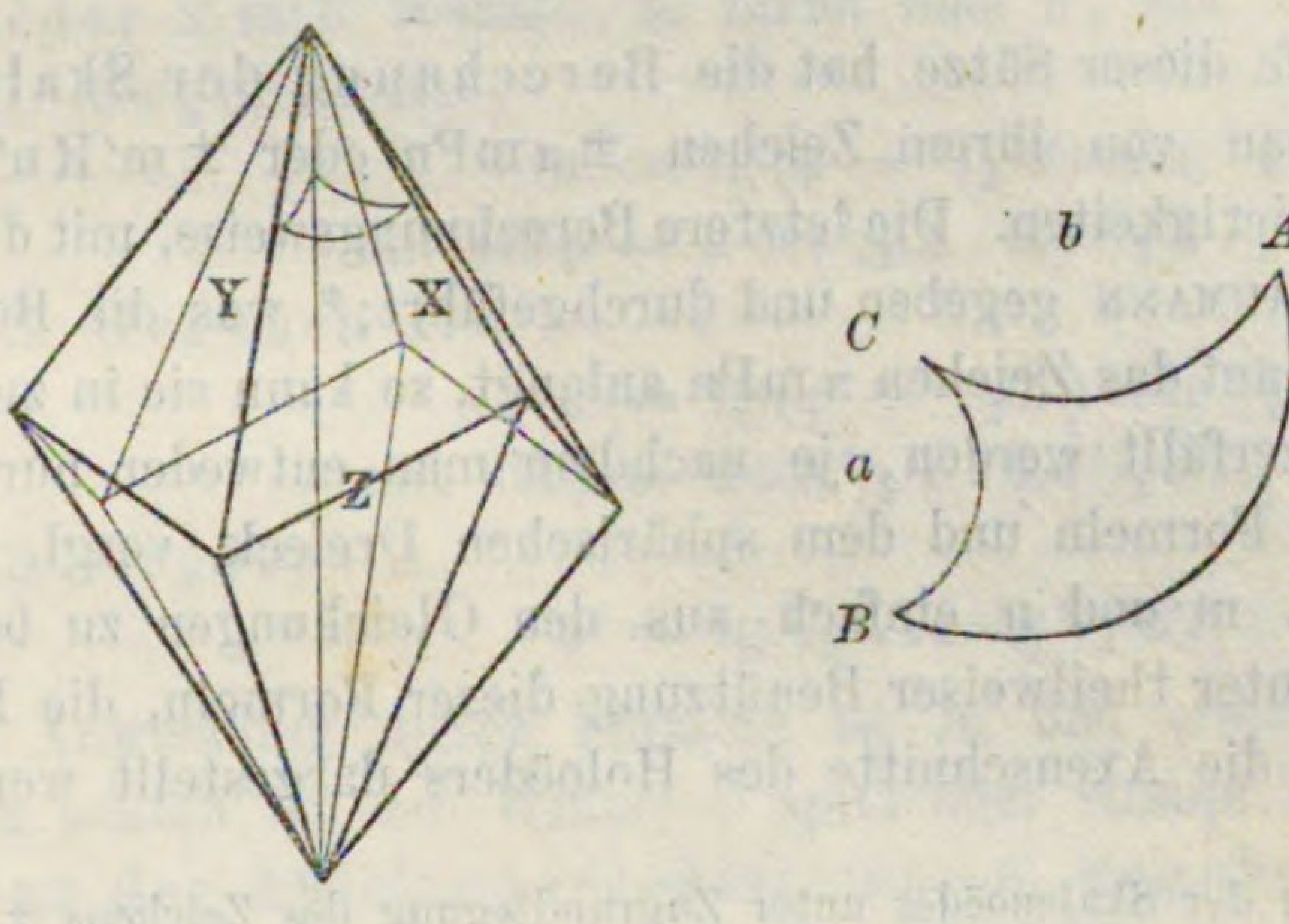


Fig. 189.

Die rein trigonometrische Berechnung ist jedoch bei dieser Gestalt etwas zu umständlich, wesshalb man die Axenschnitte derselben unter Heranziehung anderer Hülfsmittel ermittelt.

Zu diesem letzteren Zwecke hat man vorzugsweise die pag. 337 abgeleiteten Relationen der Sinus und Cosinus der halben Kantenwinkel des Skalenoëders zu den Coëfficienten n und n′ in den Zeichen π mPn und m′Rn′ zu beachten.

Bezeichnet man ferner, vergleiche Tafel XI. Fig. 2, die Neigung der Polkante Y eines jeden Skalenoëders zur Hauptaxe mit α, die Neigung der Polkante X zu derselben Axe mit β, die Neigung der Randkante zur Basis mit γ, so kann man die Cotangenten dieser Winkel in Werthen von m und n oder m′ und n′ ausdrücken. Wie bekannt, schneidet die Polkante Y in der Projection in $\frac{b'}{2\nu - \mu}$, die Polkante

X in $\frac{b}{\nu + \mu}$, die Randkante in $\frac{b''}{\nu - 2\mu}$ ein. Setzt man, da die Axe a = 1 werden soll, $b = \sqrt{3}$ und substituirt für $2\nu - \mu$, $\nu + \mu$ und $\nu - 2\mu$ ihre Werthe, ausgedrückt sowohl in Coëfficienten m und n, als auch in Coëfficienten m' und n', so folgt, unter Berücksichtigung, dass nunmehr, anstatt m und m', die Werthe mc und m'c einzuführen sind:

$$\cotg \alpha = \frac{mc(n+1)}{n\sqrt{3}} = \frac{m'c(3n'+1)}{2\sqrt{3}}.$$

$$\cotg \beta = \frac{mc(2n-1)}{n\sqrt{3}} = \frac{m'c(3n'-1)}{2\sqrt{3}}.$$

$$\cotg \gamma = \frac{mc(2-n)}{n\sqrt{3}} = \frac{m'c}{\sqrt{3}}.$$

Mit Hülfe dieser Sätze hat die Berechnung der Skalenoëder, einerlei, ob man von ihrem Zeichen $\pm \pi$mPn oder $\pm$m'Rn' ausgeht, keinerlei Schwierigkeiten. Die letztere Berechnungsweise, mit der wir beginnen, hat NAUMANN gegeben und durchgeführt;* was die Berechnung mit Rücksicht auf das Zeichen πmPn anlangt, so kann sie in zwei Unterabtheilungen zerfällt werden, je nachdem man entweder nur mit den obenstehenden Formeln und dem sphärischen Dreieck, vergl. Fig. 189, rechnet, d. h. m und n einfach aus den Gleichungen zu bestimmen sucht, oder, unter theilweiser Benützung dieser Formeln, die Rechnung so führt, dass die Axenschnitte des Holoëders dargestellt werden.

a. Berechnung der Skalenoëder unter Zugrundlegung des Zeichens $\pm$ m'Rn'.

1. Gegeben X und Y.

Man findet n' durch $\frac{n'+1}{n'-1} = \frac{\cos \frac{1}{2}X}{\cos \frac{1}{2}Y}$ und bestimmt entweder:

$$\cos \alpha = \frac{3n'+1}{(n'-1)\sqrt{3}} : \cotg \tfrac{1}{2}Y \;;\; m'c = \frac{2\sqrt{3} \,.\, \cotg \alpha}{3n'+1};$$

$$\text{oder: } \cos \beta = \frac{3n'-1}{(n'+1)\sqrt{3}} \,.\, \cotg \tfrac{1}{2}X \;;\; m'c = \frac{2\sqrt{3} \,.\, \cotg \beta}{3n'-1};$$

$$\text{oder: } \sin \tfrac{1}{2}Z = \frac{2n'}{n'+1} \,.\, \cos \tfrac{1}{2}X \;;\; \cos \beta'^{**} = \frac{\tg \frac{1}{2}Z}{n'\sqrt{3}}$$

$$\text{und } m'c = \cotg \beta' \sqrt{3}.$$

* Vergl. NAUMANN, Lehrb. d. rein. u. ang. Kryst. 1830. B. I. p. 429 u. f; Anfangsgr. d. Kryst. 1854. p. 179—180.

** β' ist die Neigung der Polkante des Mittelkantenrhomboëders $\pm$ m'R zur Hauptaxe.

2. Gegeben X und Z.

Man findet n′ durch $\frac{2n'}{n'+1} = \frac{\sin {}^1\!/_2 Z}{\cos {}^1\!/_2 X}$, bestimmt $\cos\beta' = \frac{\operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z}{n'\sqrt{3}}$ und erhält $m'c = \operatorname{cotg}\beta' \sqrt{3}$.

3. Gegeben Y und Z.

Man findet n′ durch $\frac{2n'}{n'-1} = \frac{\sin {}^1\!/_2 Z}{\cos {}^1\!/_2 Y}$ und verfährt alsdann wie soeben gezeigt.

Ist eine der Ableitungszahlen m′ oder n′ gegeben, so vereinfacht sich die Rechnung und erfordert nur die Kenntniss eines Kantenwinkels.

Setzen wir den Fall, es sei m′ durch das Mittelkantenrhomboëder ± m′R bekannt, so findet man n′, wie folgt.

1. Gegeben X.

$$n' = \operatorname{tg}(\varphi - {}^1\!/_2 Z') \operatorname{cotg} {}^1\!/_2 Z'\,^*;$$

$$\text{mit } \sin\varphi = 2\cos {}^1\!/_2 X . \cos {}^1\!/_2 Z'.$$

2. Gegeben Y.

$$n' = \operatorname{tg}(\varphi + {}^1\!/_2 Z') \operatorname{cotg} {}^1\!/_2 Z';$$

$$\text{mit } \sin\varphi = 2\cos {}^1\!/_2 Y . \cos {}^1\!/_2 Z'.$$

3. Gegeben Z.

$$n' = \operatorname{tg} {}^1\!/_2 Z . \operatorname{cotg} {}^1\!/_2 Z'.$$

Bei Anwendung dieser Formeln ist in den ersten zwei Fällen darauf zu achten, ob der Winkel φ spitz oder stumpf ist.

Wenn der Ableitungscoëfficient n′ gegeben ist, so erfordert die Berechnung des Skalenoëders ebenfalls nur die Kenntniss eines Kantenwinkels.

1. Gegeben X.

Man bestimmt entweder:

$$\cos\beta = \frac{3n'-1}{(n'+1)\sqrt{3}} . \operatorname{cotg} {}^1\!/_2 X \text{ und findet } m'c = \frac{2\sqrt{3} . \operatorname{cotg}\beta}{3n'-1},$$

oder ermittelt: $\sin {}^1\!/_2 Z = \frac{2n'}{n'+1} . \cos {}^1\!/_2 X$ und rechnet dann gleichfalls weiter wie im ersten Fall der allgemeinen Berechnung. —

2. Gegeben Y.

Man bestimmt entweder:

$$\cos\alpha = \frac{3n'+1}{(n'-1)\sqrt{3}} . \operatorname{cotg} {}^1\!/_2 Y \text{ und erhält } m'c = \frac{2\sqrt{3} . \operatorname{cotg}\alpha}{3n'+1},$$

* Z′ ist die Mittelkante des eingeschriebenen Rhomboëders.

oder ermittelt: $\sin{}^1/_2 Z = \frac{2n'}{n'-1} . \cos{}^1/_2 Y$ und schlägt das Verfahren wie im ersten Fall der allgemeinen Berechnung ein.

3. Gegeben Z.

Man ermittelt: $\cos\beta' = \frac{tg\,{}^1/_2 Z}{n'\sqrt{3}}$ und setzt $m'c = \text{cotg}\,\beta'\sqrt{3}$.

Combiniren untergeordnete Skalenoëder an einem vorherrschenden derartig, dass dessen Kanten zugeschärft werden, so hat das untergeordnete Skalenoëder, wenn seine Mittelkanten liegen, wie die des vorherrschenden, mit diesem den Coëfficienten m′ gemeinsam, da alsdann das eingeschriebene Rhomboëder für beide gleich ist. Die Berechnung ist, wie oben mitgetheilt, zu führen.

Werden die abwechselnden Polkanten des vorherrschenden Skalenoëders durch ein anderes zugeschärft,* so ist die Polkante des untergeordneten Skalenoëders zu messen und die Neigung derselben gegen die Hauptaxe aus der vorherrschenden Gestalt zu entnehmen. Hiermit ist nach den im ersten Falle gegebenen Formeln zuerst n′ und dann m′ zu bestimmen.

Mit Hülfe der bei gegebenem n′ des Skalenoëders erwähnten Rechnungsformeln lassen sich auch die Rhomboëder, da in ihnen n′ = = 1 wird, leicht bestimmen. Man hat für alle mR:

$$\cos\beta' = \text{cotg}\,{}^1/_2 X . \sqrt{{}^1/_3}.$$

und dann $mc = \text{cotg}\beta' . \sqrt{3}$.

β. Berechnung der Skalenoëder unter Zugrundlegung des Zeichens $\pm \pi mPn$.

αα. Berechnung von m und n aus den gegebenen Formeln.

Wir gehen hierbei vorzugsweise von der Annahme aus, X und Y seien bekannt, und führen die Fälle, in denen X und Z, oder Y und Z vorkommen, auf den ersten zurück.

1. Gegeben X und Y.

Man bestimme n durch: $n - 1 = \frac{\cos{}^1/_2 Y}{\cos{}^1/_2 X}$ und ermittele entweder: $\cos\alpha = \frac{n+1}{(n-1)\sqrt{3}} . \text{cotg}\,{}^1/_2 Y$;

oder: $\cos\beta = \frac{2n-1}{\sqrt{3}} . \text{cotg}\,{}^1/_2 X$,

* Ueber das diesem Skalenoëder zukommende Vorzeichen u. s. w. vergl. die Betrachtung über die Zonenverhältnisse der Skalenoëder pag. 325 u. f.

indem man in den trigonometrischen Formeln für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$, vergl. das sphärische Dreieck in Fig. 189, das eine Mal X in Werthen von Y und n, das andere Mal Y in Werthen von X und n ausdrückt, passend reducirt und für sin 60° den Werth $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, sowie für cotg 60° den Werth $\sqrt{\frac{1}{3}}$ einführt.

Sodann hat man entweder: $mc = \frac{n\sqrt{3}\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{n+1}$;

oder: $mc = \frac{n\sqrt{3}\,.\,\mathrm{cotg}\,\beta}{2n-1}$;

indem man auf die früher abgeleiteten Formeln für die Cotangenten der Winkel α und β zurückgeht; vergl. pag. 356.

2. Gegeben X und Z.

Man bestimme $n = \frac{\sin \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} X}$ und verfahre, wie unter 1. gezeigt.

3. Gegeben Y und Z.

Man bestimme n aus: $\frac{n}{n-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Y}$. Das Verfahren ist alsdann das gleiche, wie im ersten Falle.

— Liegt die eine oder die andere Art der Polkanten eines untergeordneten Skalenoëders, wie die abwechselnden Polkanten eines vorherrschenden,* so kann man die Polkante des untergeordneten Skalenoëders durch Messung bestimmen und kennt aus der vorherrschenden Gestalt auch die Neigung derselben zur Hauptaxe. Man ermittelt alsdann, da nunmehr für das zu berechnende Skalenoëder X und β, oder Y und α bekannt sind, aus den oben abgeleiteten Formeln n und m. Die Grösse von m entscheidet über das Vorzeichen (vergl. die Zonenbetrachtung der Skalenoëder). War die zu berechnende Gestalt das Grenzglied zweier Reihen von Skalenoëdern, nämlich die durch das vorherrschende Skalenoëder in der Zone der betreffenden Polkante bedingte Pyramide der zweiten Art, so wird n = 2, und m findet sich entweder durch Rechnung oder aus dem allgemeinen Zeichen.

* Wann unter diesen Umständen ein Zuschärfen der abwechselnden Polkanten des vorherrschenden Skalenoëders stattfindet, erkennt man am besten aus der Projection. — Uebrigens können in gewissen Fällen, vergl. p. 325—327, auch zwei Pyramiden mP2 mit verschiedenen Werthen von m mit einem Skalenoëder so combiniren, dass die abwechselnden Polkanten der Pyramiden dieselbe Lage haben, wie die schärferen oder stumpferen Polkanten des Skalenoëders; dabei werden erstere durch die Flächen der einen Pyramide der zweiten Art zugeschärft, vergl. Tafel IX, Fig. 9.

Hat man für das betreffende Skalenoëder n berechnet und sind die nöthigen Grenzgestalten vorhanden, so erfährt man durch letztere die Zonenabtheilung, in die das Skalenoëder gehört und findet m aus dem allgemeinen Zeichen. Fehlen die Grenzgestalten, so kann man, nachdem n bekannt ist, mit demselben und der bekannten Polkante leicht die unbekannte Polkante darstellen und dadurch das Vorzeichen des Skalenoëders bestimmen. Der Werth von m kann stets, da das Vorzeichen unzweideutig* auf die betreffende Abtheilung der Skalenoëder in der Gesammtzone, d. h. auf deren allgemeines Zeichen, weist, aus letzterem entnommen werden.

* Auf den ersten Blick scheint dies nicht der Fall zu sein, da die Gesammtzone einer Polkante von $\pm \pi$mPn drei Abtheilungen von Skalenoëdern enthält, von denen zwei immer gleiche Vorzeichen besitzen. Allein eine nähere Betrachtung lehrt, dass von diesen drei Abtheilungen nur die Skalenoëder zweier, entweder ihre schärferen, oder ihre stumpferen Polkanten dahin legen, wo das Grundskalenoëder die eine Art der seinigen hat, und dass mit eben denselben weder die schärferen, noch die stumpferen Polkanten der Skalenoëder der dritten Abtheilung zusammenfallen. — Diejenigen Kanten, welche bei den Skalenoëdern der letztgenannten Abtheilung mit den Polkanten der Hauptgestalt in gleiche Lage kommen, sind an einem Skalenoëder im Gleichgewicht nicht als solche vorhanden, werden aber der Lage nach durch die Position der Mittelkanten, als deren Parallelkanten sie sich darstellen, fixirt, und sind in ihrem Winkelmass die Ergänzungen der Winkel der Mittelkanten zu 180°.

Bezüglich der gleichen Lage der schärferen oder stumpferen Polkanten eines untergeordneten Skalenoëders mit den abwechselnden Polkanten des Grundskalenoëders kommen also nur zwei Abtheilungen von Skalenoëdern in Betracht, und es sind dieselben von entgegengesetzten Vorzeichen. Die Abtheilung, welche bei dieser Betrachtung entfällt, da die ihr zugehörigen Skalenoëder weder ihre schärferen, noch ihre stumpferen Polkanten in gleiche Lage mit den abwechselnden Polkanten des Grundskalenoëders bringen, enthält die steilsten Gestalten der betreffenden Zone. Sie finden sich in der Zone der stumpferen Polkanten von $\pm \pi$ mPn zwischen ∞P2 und $\mp$ n'R; in der Zone der schärferen Polkanten zwischen ∞P2 und $\pm$ n''R, vergl. pag. 325—327. Die genannten Rhomboëder geben in der Grösse der Winkel ihrer Polkanten die Grenzen für die in Betracht kommenden, soeben nach Lage und Winkelwerth besprochenen Kanten der Skalenoëder ab: es müssen letzteren stets kleinere Winkelwerthe zukommen, als ersteren; ein wichtiges Entscheidungsmerkmal in zweifelhaften Fällen. —

Ist eine solche Kante eines Skalenoëders gemessen und die Neigung derselben zur Hauptaxe, entnommen aus der vorherrschenden Gestalt, bekannt, so kann man daraus auch das Skalenoëder berechnen. Man berechnet alsdann durch ein sphärisches Dreieck, vergl. Fig. 189, in dem zwei Winkel (einer derselben ist = 60°) und eine eingeschlossene Seite gegeben sind, die Neigung der anderen Kante (mit der stumpferen Polkante zusammenfallend) zur Hauptaxe und ermittelt die stumpfere Polkante in ihrer Hälfte dadurch, dass man den Winkel, welcher der gegebenen Seite gegenüberliegt, darstellt, und von 180° abzieht. Die weitere Berechnung ist sodann, wie früher mitgetheilt, zu führen.

Liegen die Randkanten eines untergeordneten Skalenoëders, wie die eines gegebenen, so sind beide derselben Ordnung und besitzen dasselbe Mittelkantenrhomboëder. Für ein gegebenes Skalenoëder $\pm \pi mPn$ ist aber das Mittelkantenrhomboëder $= \pm \frac{m(2-n)}{n}R$, also erhält $\frac{m(2-n)}{n}$ für beide Skalenoëder denselben Werth. Sei derselbe $= m'$, das Mittelkantenrhomboëder also $= \pm m'R$, so ergibt sich aus: $\frac{m(2-n)}{n} = m'$ auch $m = \frac{m'n}{2-n}$. — Eine zur Berechnung mit demselben Resultat zu verwendende Beziehung kann man finden, wenn man Rücksicht auf die Grenzgestalten in der Zone nimmt. Die Skalenoëder, welche zwischen $\pm m'R$ und $\infty P2$ liegen, sind vom Zeichen $\pm \pi mP \frac{2m}{m+m'}$ *; es wird somit, da $n = \frac{2m}{m+m'}$ ist, $m = \frac{m'n}{2-n}$, wie vorhin.

Zur Berechnung eines Skalenoëders von solcher Lage können je eine Kante X, Y oder Z, sodann die Combinationskante zum Mittelkantenrhomboëder, zu $\infty P2$, zum vorherrschenden Skalenoëder u. s. w. in Betracht kommen. Wir berücksichtigen vorzugsweise zwei Fälle: es soll entweder die Polkante Y, oder die Combinationskante $\pi mPn : m'R$ gegeben sein. Die Fälle, in denen Z oder die anderen Combinationskanten gegeben sind, reduciren sich auf die von uns angenommene Combinationskante, und was die Berechnung aus X betrifft, so ist dieselbe unschwer zu finden, wenn man die Berechnung aus Y eingesehen hat.

Man lege ein sphärisches Dreieck, Fig. 190, in dem gegeben sind:

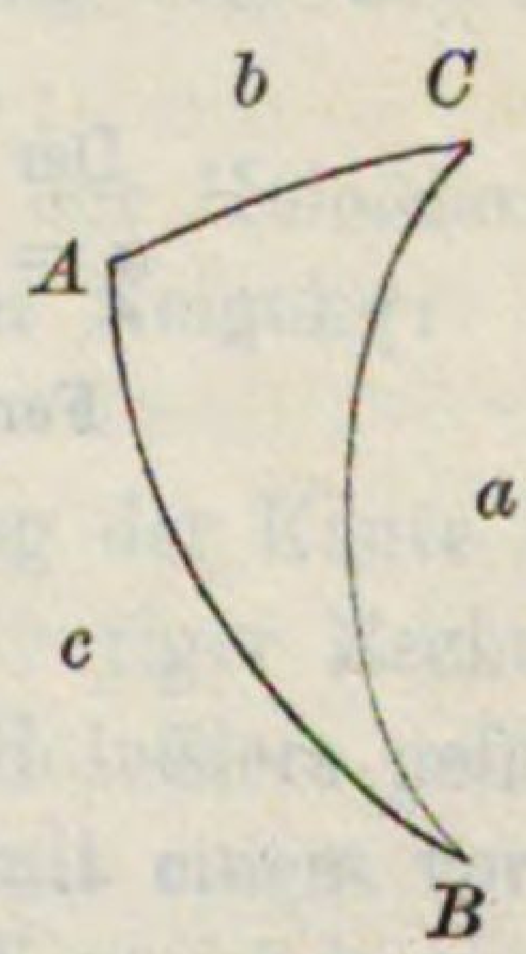


Fig. 190.

Entweder: $A =$ Combk. $\pm m'R : \pm \pi mPn$.
$C = 90^0$.
$b =$ dem halben, am Poleck von $\pm m'R$ anliegenden, ebenen Flächenwinkel; **

und bestimme: $\operatorname{tg} a = \sin b \cdot \operatorname{tg} A$.

Oder: $B = \frac{1}{2}Y$ von $\pm \pi mPn$.
$C = 90^0$.
$b =$ demselben Winkel, wie im ersten Falle;

und berechne: $\sin a = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{tg} b$.

* Gegenüber dem auf pag. 328 stehenden Zeichen sind die m und m' vertauscht, da wir jetzt von $+ m'R$ ausgegangen sind.

** Wenn derselbe nicht bekannt ist, so muss er durch $\cos b = \frac{\cos 60^0}{\sin A}$ gefunden werden, in welcher Gleichung $A = \frac{1}{2}X$ von $\pm m'R$ ist.

In beiden Fällen ist a ein stumpfer Winkel und gleich der Neigung der Polkante Y zur Höhenlinie auf der Fläche von $\pm$ m'R. Da nun diese Höhenlinie zur Hauptaxe unter einem Winkel α' neigt, der sofort durch $\cotg \alpha' = 2 m' c \sqrt{1/3}$ gefunden ist, so bestimmt sich die Neigung von Y zur Hauptaxe, $\alpha = \alpha' - (180^0 - a)$. — Nun ist aber $\cotg \alpha = \frac{mc(n+1)}{n\sqrt{3}}$, setzt man hierin für m den oben ermittelten Werth ein, so bestimmt sich $\cotg \alpha = \frac{m'c(n+1)}{(2-n)\sqrt{3}}$; also ermittelt man schliesslich n durch: $\frac{n+1}{2-n} = \frac{\cotg \alpha . \sqrt{3}}{m'c}$ * ; m durch: $\frac{m'n}{2-n}$.

Beispiel. An einem Skalenoëder des Kalkspaths, dessen Mittelkantenrhomboëder + R ist, messe $Y = 144^0\ 24'$, das Zeichen des Skalenoëders ist zu berechnen.

Man hat zuerst: $\frac{m(2-n)}{n} = 1$; $m = \frac{n}{2-n}$.

Der halbe, am Poleck von + R anliegende ebene Flächenwinkel findet sich ein für alle Male für die Substanz durch $\cos b = \frac{\cos 60^0}{\sin 52^0\ 32^1/_2{}'}$.

$$\begin{aligned} \log. \cos b = \log. \cos 60^0 &= 9{,}6989700 - 10 \\ - \log. \sin 52^0\ 32'\ 30'' &= 9{,}8997088 - 10 \\ \hline &\quad 9{,}7992612 - 10 \\ b &= 50^0\ 57'\ 30''. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Neigung von Y zur Höhenlinie auf der Fläche von + R hat man:

$$\begin{aligned} \log. \sin a = \log. \cotg 72^0\ 12' &= 9{,}5065928 - 10 \\ + \log. \tg 50^0\ 57'\ 30'' &= 0{,}0909851 \\ \hline &\quad 9{,}5975779 - 10 \\ a &= 23^0\ 19'\ 18''. \end{aligned}$$

Der zu berücksichtigende stumpfe Winkel ist $= 156^0\ 40'\ 42''$.

$\alpha = 45^0\ 23'\ 26''$ ** $- 23^0\ 19'\ 18'' = 22^0\ 4'\ 8''$.

Ferner bestimmt sich: $\frac{n+1}{2-n} = \frac{\cotg \alpha \sqrt{3}}{c}$.

$$\begin{aligned} \log. \cotg 22^0\ 4'\ 8'' &= 0{,}3920889 \\ + \log. \tg 60^0 &= 0{,}2385606 \\ \hline &\quad 0{,}6306495 \\ - \log. \text{num} c &= 9{,}9316097 - 10 \\ \hline &\quad 0{,}6990398 \\ \text{num.} &= 5. \end{aligned}$$

Es ist also $\frac{n+1}{2-n} = 5$; folglich $n = {}^3/_2$ und schliesslich $m = 3$.

Sonach ist das gesuchte Skalenoëder $+ \pi 3P{}^3/_2 = + R3$.

* Ist Y gegeben, so findet man auch $\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos a \sqrt{3}}{\cotg {}^1/_2 Y}$.

** Dieser Werth für α' ist bei der Berechnung der Hauptaxe des Kalkspaths bereits gefunden worden, vergl. p. 354.

Aus den abgeleiteten Formeln der allgemeinen Skalenoëderberechnung mit Rücksicht auf das Zeichen $\pm \pi$mPn ergibt sich ohne jede Schwierigkeit, wie, wenn n bekannt ist, die Skalenoëder aus Kenntniss von X, Y oder Z zu berechnen sind. — Für den speciellen Fall der Berechnung, in dem n bekannt und in zwei in Combination befindlichen Skalenoëdern gleicher Stellung denselben Werth hat, erhält man auch einfache Formeln, wenn man von der nunmehr zu erörternden Rechnungsweise besonders dann Gebrauch macht, wenn die horizontale Combinationskante der beiden Skalenoëder zu einander gegeben ist.

$\beta\beta$. Berechnung der Skalenoëder unter Darstellung der Axenschnitte des Holoëders.

Die Berechnung führen wir nur aus Kenntniss von X und Y, da sich die zwei anderen Fälle, in denen X und Z, oder Y und Z gegeben sind, darauf reduciren lassen.

Man bestimme n durch $n - 1 = \frac{\cos {}^1/_2 Y}{\cos {}^1/_2 X}$ und berechne ferner $\operatorname{tg} a = \frac{n \,.\, \operatorname{tg} 60^0}{2 - n}$. Dieser Winkel a ist die Neigung der Kante Z des Holoëders zur Nebenaxe in der Basis.

Hierauf ermittele man die Neigung der besagten Kante Z zur Zwischenaxe durch $a' = 180^0 - (30^0 + a)$ und berechne diese Kante in ihrer Hälfte selbst durch:

$$\sin B' = \frac{\cos A'}{\cos a'};$$

in welcher Gleichung a′ die eben erörterte Bedeutung hat und $A' = {}^1/_2 Y$ von $\pm \pi$mPn (zugleich auch von mPn) ist.

Danach stelle man die Neigung der Kante X des Holoëders zur Nebenaxe in der Basis dar und hat in der tg dieser Neigung:

$$\operatorname{tg} b = \sin a \,.\, \operatorname{tg} B = mc.$$

Es bedeuten in dieser Gleichung: a die Neigung der Kante Z des Holoëders zur Nebenaxe und B den Winkel B′ aus voriger Rechnung.

Da durch diese Art der Berechnung ${}^1/_2$Z des Holoëders gefunden wird, so lassen sich sämmtliche Skalenoëder, die mit einem vorherrschenden, was auf diese Weise berechnet ist, das Vorzeichen sowohl, als auch n gemeinsam haben, und in Folge dessen unter Erzeugung horizontaler Combinationskanten, mit ihm combiniren, leicht aus der Kenntniss ihrer Combinationskantenwinkel bestimmen. Man stellt nämlich, da für das erste Skalenoëder die Neigung seiner Fläche zum basischen Hauptschnitt (Kante ${}^1/_2$Z des Holoëders) gegeben ist, die übrigen aber, wegen der horizontalen Combinationskanten, den Coëfficienten n im

Zeichen $\pm \pi$mPn gleich und gemeinsam haben, leicht auch deren Flächenneigungen zum basischen Hauptschnitt (Kanten $^1/_2$Z ihrer Holoëder) dar. Die Neigung dieser Kanten zur Nebenaxe ist in allen Skalenoëdern, in denen n gleich und gemeinsam ist, dieselbe und zwar = a aus voriger Rechnung. Wird die Neigung der Fläche zum basischen Hauptschnitt mit B bezeichnet, so folgt schliesslich:

$$\mathrm{tg}\,b = \sin a \,.\, \mathrm{tg}\,B = mc.$$

Ist nicht die, für die Rechnung am vortheilhaftesten liegende, horizontale Combinationskante, sondern eine der Kanten X, Y oder Z des untergeordneten Skalenoëders gemessen, so muss man Y darstellen * (für den Fall Y gemessen sein sollte, entfällt diese Rechnung), mit $^1/_2$Y und a′ (entnommen aus der vorherrschenden Gestalt) $^1/_2$Z des Holoëders berechnen und mit $^1/_2$Z und a (gleichfalls aus der Berechnung der vorherrschenden Gestalt erhalten) schliesslich wieder tg b = = sin a . tg B = mc ermitteln. —

Wir werden zu den wichtigsten Skalenoëderberechnungen Beispiele am Schluss in der Entwickelung einer complicirten Rothgiltigerzcombination bringen.

Was die Rückrechnung gemessener Winkel aus dem Axenverhältniss und den Axenschnitten der Gestalten anlangt, so kommen für die wichtigsten derselben die im Vorstehenden gegebenen Formeln in Betracht, die sämmtlich in logarithmisch bequemer Weise gestatten, rückwärts die Winkel zu ermitteln. Mit der Winkelformel rechnet sich es in vielen Fällen auch nicht unbequem; namentlich gelangt sie dann zur Verwendung, wenn es sich darum handelt, Neigungen von Flächen aus verschiedenen Octanten (bezogen auf das orthohexagonale Axensystem) gegen einander zu finden.

4. Entwickelung complicirter Krystalle als Uebungsbeispiele durch Rechnung und Projection.

a. Turmalin vom Gouverneur. St. Lawrence Co. New-York.

Eine allgemeine Bestimmung des auf Taf. XI. in Fig. 3 abgebildeten Krystalls ergibt, wenn man P als + R ansieht:

∞R ** ,	∞P2 ,	$-{}^1/_2$R ,	$-$ 2R ,	zwei $+ \pi$mPn ,	$- \pi$mPn.
l ,	s ,	n ,	o ,	t und u ,	v.

* Es ist dies, da neben X oder Z der Ableitungscoëfficienten n bekannt ist, stets möglich.

** Eigentlich müsste $\pm \frac{\infty R}{2}$ geschrieben werden, da durch die Hemimorphie ∞R in zwei Rhomboëder mit unendlich grosser Hauptaxe zerfällt.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses nehmen wir an, der Polkantenwinkel von + R sei zu 133° 10′ gefunden worden. Alsdann ist:

$$\begin{array}{rl} \log.\cos a = \log.\cos 66^0\,35' = & 9{,}5992441 - 10 \\ - \log.\sin 60^0 = & 9{,}9375306 - 10 \\ \hline & 9{,}6617135 - 10 \\ & a = 62^0\,41'\,3''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log.\operatorname{cotg} c = \log.\cos 30^0 = & 9{,}9375306 - 10 \\ + \log.\operatorname{cotg} 62^0\,41'\,3'' = & 9{,}7130606 - 10 \\ \hline & 9{,}6505912 - 10 \\ & \text{num.}\,c = 0{,}447292. \end{array}$$

2. Zur Ableitung der Skalenoëder, die in diesem Beispiel vollständig aus dem Zonenverband geschehen kann, fertigen wir uns eine Projection der bis jetzt bestimmten Gestalten + R, — $^1/_2$R, — 2R, ∞R, ∞P2 auf oR an, Tafel XI, Fig. 4.

Das Skalenoëder t gehört der Zone der Mittelkanten von + R an. Eine Fläche desselben $\underline{t}$ liegt zwischen $\underline{P}$ und $\underline{s}$, ferner stumpft $\underline{o}$ die schärferen Polkanten von t gerade ab.

Im vollständigen Zeichen $\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\nu+\mu} : \frac{a'}{\nu} : \frac{b'}{2\nu-\mu} : \frac{a''}{\nu-\mu} : \frac{b''}{\nu-2\mu}$

wird daher: $\frac{b}{\nu+\mu} = \frac{b}{4}$; d. h. $\nu + \mu = 4$

$$\frac{b''}{\nu - 2\mu} = \frac{b''}{1}; \quad \text{d. h. } \nu - 2\mu = 1$$

Daraus folgt $3\mu = 3$.

Folglich ist $\mu = 1$ und $\nu = 3$. Dies ergibt aber:

$$\frac{a}{1} : \frac{b}{4} : \frac{a'}{3} : \frac{b'}{5} : \frac{a''}{2} : \frac{b''}{1} = a : {}^1/_3 a' : {}^1/_2 a'' : c = + \pi 3P^3/_2 = + R3.$$

Das Skalenoëder v fällt mit der Fläche $\underline{v}$ in die Zonen $\underline{o} : \underline{s}$, ferner bilden $\underline{v}$, $\underline{t}$, t, v eine Zone, d. h. v legt seine schärferen Polkanten dahin, wo t seine stumpferen hat.

Im vollständigen Zeichen wird: $\frac{b'}{\nu+\mu} = \frac{b'}{5}$; also $\nu + \mu = 5$

$$-\frac{b''}{\nu - 2\mu} = -\frac{b''}{2}; \text{ also } \nu - 2\mu = 2$$

Daraus folgt $3\mu = 3$.

Somit ist $\mu = 1$ und $\nu = 4$. Dies ergibt:

$$\frac{a''}{1} : \frac{b'}{5} : \frac{a'}{4} : \frac{b}{7} : \frac{a}{3} : -\frac{b''}{2} =$$

$$= a'' : {}^1/_4 a' : {}^1/_3 a : c = - \pi 4P^4/_3 = - 2R2.$$

Das Skalenoëder u endlich fällt mit der Fläche $\underline{u}$ in die Zonen $\underline{P} : \underline{s}$, ferner legt es seine schärferen Polkanten dahin, wo v seine stumpferen hat.

Somit sind bekannt: $\frac{b}{\nu + \mu} = \frac{b}{7}$; d. h.: $\nu + \mu = 7$

$$\frac{b''}{\nu - 2\mu} = \frac{b''}{1}; \text{ d. h.: } \nu - 2\mu = 1$$

Daraus folgt: $3\mu = 6$.

Folglich ist $\mu = 2$ und $\nu = 5$. Dies ergibt aber:

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{7} : \frac{a'}{5} : \frac{b'}{8} : \frac{a''}{3} : \frac{b''}{1} =$$

$$= {}^1\!/_2 a : {}^1\!/_5 a' : {}^1\!/_3 a'' : c = + \pi 5P{}^5\!/_3 = + R5.$$

Hiermit wäre die Combination mit Hülfe des WEISS'schen Flächenzeichens ohne weitere Rechnung entwickelt. Trägt man alle Flächen mit den entsprechenden Sectionslinien in die Projection ein, so offenbart sich der Zonenverband, in dem erstere unter einander stehen.

b. Bergkrystall vom St. Gotthard*.

Eine allgemeine Bestimmung des auf Tafel XI. in Fig. 5 dargestellten Krystalls lehrt, ausser dem ersten Prisma $\infty R = g$, vorab mehrere positive und negative Rhomboëder erkennen. Nehmen wir die mit R bezeichnete Gestalt als + R an, so ist $r' = - R$ und es ergeben sich alsdann vier $+ mR (m > 1)$ und ein $- mR (m > 1)$. Wir beobachten ferner die trigonale Pyramide $s = \frac{2P2}{4}$ (Zonen $R : \underline{g}$ und $r' : g$), links von + R liegend; sodann, unter + R, ebenfalls links liegend, zwei $+ l \frac{mP\frac{m}{m-1}}{4}$, nämlich u und x (Zone s : g), endlich, unter — R, rechts liegend, $o' = - r \frac{mP\frac{m}{m-1}}{4}$ (Zone $s : \underline{g}$) und $i = - r \frac{mPn}{4}$ (Zone $u : \underline{g}$). Letztere Gestalt ist am Krystall, der sich demnach als ein links drehender zu erkennen gibt, nur als Einzelfläche vorhanden.

1. Zur Berechnung des Axenverhältnisses der Grundform schreitend, nehmen wir an, es sei die Neigung $+ R : \infty R = 141^0\ 47'$ gut

* Vergl. HESSENBERG, Min. Notizen I. p. 166. Abh. der Senckenberg. naturf. Gesellschaft B. II.

messbar gewesen,* und die Neigung $-R:\infty R$ habe sich mit etwa demselben Werthe ergeben.

Alsdann können wir aus dem gemessenen Winkel die Neigung der Fläche zum basischen Hauptschnitt bilden, welche gleich dem Winkel $\frac{1}{2}Z$ der Pyramide $P = \pm R$ ist $= 51^0\ 47'$. Es findet statt: $\text{tg}\,b = \sin 60^0 \,.\, \text{tg}\ 51^0\ 47' = c$.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg}\,b = \log.\ \sin 60^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ + \log.\ \text{tg}\ 51^0\ 47' &= 0{,}1038082 \\ \hline & 0{,}0413388 \\ \text{num.}\ c &= 1{,}099866. \end{aligned}$$

2. Die Berechnung der noch zu bestimmenden fünf Rhomboëder, von denen vier positiv und eins negativ sind (letzteres gehört übrigens zu dem steilsten der positiven) lässt sich vereinfachen.

Da alle nach derselben Formel:

$$\text{tg}\,b = \sin a \,.\, \text{tg}\,B = mc$$

berechnet werden, in der $a = 60^0$ vorstellt und B die Neigung der Rhomboëderfläche zum basischen Hauptschnitt bedeutet, so ist vorab:

$$m = \frac{\sin a}{c} \,.\, \text{tg}\,B.$$

Da $\frac{\sin a}{c}$ sich immer gleich bleibt, so bilden wir dessen Werth ein für alle Male und addiren dazu dann den log. tg B eines jeden Rhomboëders.

$$\begin{aligned} \log.\ \sin a &= 9{,}9375306 - 10 \\ - \log.\ \text{num.}\ c &= 0{,}0413388 \\ \hline & 9{,}8961918 - 10 \end{aligned}$$

Wir beginnen nun mit der Berechnung des auf $+R$ folgenden Rhomboëders und wenden uns dann den anderen, die immer steiler werden, zu.

Berechnung von $+mR$. Gemessen $+mR:\infty R = 155^0\ 46'$.
Daraus folgt $B = 65^0\ 46'$.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \frac{\sin a}{c} &= 9{,}8961918 - 10 \\ + \log.\ \text{tg}\ 65^0\ 46' &= 0{,}3466743 \\ \hline & 0{,}2428661 \\ \text{num.}\ m &= \tfrac{7}{4}. \end{aligned}$$

Das Rhomboëder ist $+\frac{7}{4}R$.

* Wäre dies nicht der Fall gewesen, so hätte man einen andern Winkel, z. B. den Polkantenwinkel von $+R$, der Rechnung zu Grund legen müssen.

Berechnung von $+ m'R$. Gemessen $+ m'R : \infty R = 165^0\,18'$.
Daraus folgt $B = 75^0\,18'$.

$$\log.\ \text{num.}\ m' = \log.\ \frac{\sin a}{c} = 9{,}8961918 - 10$$
$$+ \log.\ \text{tg}\ 75^0\,18' = 0{,}5811271$$
$$0{,}4773189$$
$$\text{num.}\ m' = 3.$$

Das Rhomboëder ist $+ 3R$.

Berechnung von $+ m''R$. Gemessen $+ m''R : \infty R = 168^0\,52'$.
Daraus folgt $B = 78^0\,52'$.

$$\log.\ \text{num.}\ m'' = \log.\ \frac{\sin a}{c} = 9{,}8961918 - 10$$
$$+ \log.\ \text{tg}\ 78^0\,52' = 0{,}7059828$$
$$0{,}6021746$$
$$\text{num.}\ m'' = 4.$$

Das Rhomboëder ist $+ 4R$.

Berechnung von $\pm m'''R$. Gemessen $\pm m'''R : \infty R = 171^0\,3'$.
Daraus folgt $B = 81^0\,3'$.

$$\log.\ \text{num.}\ m''' = \log.\ \frac{\sin a}{c} = 9{,}8961918 - 10$$
$$+ \log.\ \text{tg}\ 81^0\,3' = 0{,}8027470$$
$$0{,}6989388$$
$$\text{num.}\ m''' = 5.$$

Die Rhomboëder sind $\pm 5R$.

3. Ehe wir zur Berechnung der Trapezoëder übergehen können, müssen wir erst einige Neigungen von 2P2 zu anliegenden Flächen darstellen, da wir derselben im Verlaufe der Rechnung bedürfen.

Zuerst soll die Neigung der Fläche zum basischen Hauptschnitt, d. h. der halbe Randkantenwinkel ermittelt werden.

$$\log.\ \text{tg}\ {}^1\!/_2 Z = \log.\ \text{num.}\ c = 0{,}0413388$$
$$+ \log.\ \text{num.}\ 2 = 0{,}3010300$$
$$0{,}3423688$$
$${}^1\!/_2 Z = 65^0\,33'\,12''.$$

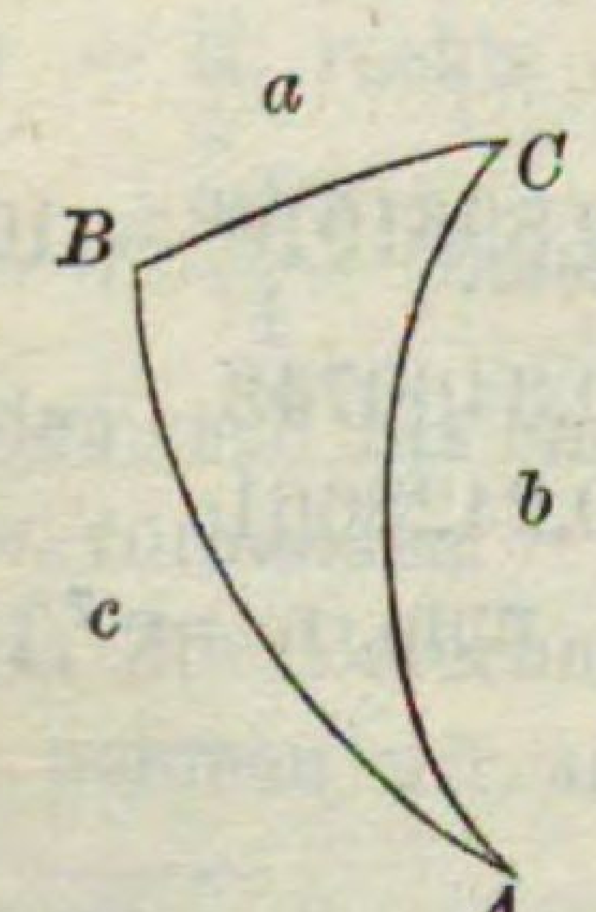


Fig. 191.

Alsdann stelle man sich die Combination von 2P2 und ∞R vor und lege, Fig. 191, ein sphärisches Dreieck, das:

$$A = 60^0.$$
$$C = 90^0.$$
$$b = 155^0\,33'\,12''\ \text{enthält.}$$

In diesem Dreieck sind folgende Stücke zu berechnen:

B = Combinationskante 2P2 : ∞R.

a = halber, ebener Winkel der Combinationskanten 2P2 : ∞R zu 2P2 : ∞R.

c = Neigung der Combinationskante 2P2 : ∞R zur Kante ∞R : ∞R.

Man hat zuerst: $\cos B = \sin A . \cos b$.

$$\begin{aligned} \log.\cos B = \log.\sin 60^0 &= \quad 9{,}9375306 - 10 \\ + \log.\cos 24^0\,26'\,48'' &= N.\ 9{,}9592069 - 10 \\ \hline & \quad N.\ 9{,}8967375 - 10 \\ & \quad B = 142^0\,2'\,5''. \end{aligned}$$

Ferner gilt: $tg a = \sin b . tg A$.

$$\begin{aligned} \log.tg a = \log.\sin 24^0\,26'\,48'' &= 9{,}6168388 - 10 \\ + \log.tg 60^0 &= 0{,}2385606 \\ \hline & \quad 9{,}8553994 - 10 \\ & \quad a = 35^0\,37'\,59''. \end{aligned}$$

Endlich ist: $tg c = \frac{tg b}{\cos A}$.

$$\begin{aligned} \log.tg c = \log.tg 24^0\,26'\,48'' &= N.\ 9{,}6576319 - 10 \\ - \log.\cos 60^0 &= \quad 9{,}6989700 - 10 \\ \hline & \quad N.\ 9{,}9586619 - 10 \\ & \quad c = 137^0\,43'\,22''. \end{aligned}$$

4. Berechnung von $u = + \frac{1}{4} \frac{mP\frac{m}{m-1}}{}$. Gemessen ist g : u = = 161⁰ 31′. Da nun g : s = 142⁰ 2′ 5″, so ist u : s = 160⁰ 31′ 5″.

Mit diesen Stücken kann man ein sphärisches Dreieck legen, vergl. Fig. 191, mit:

$$B = 160^0\,31'\,5''.$$
$$C = 90^0.$$
$$a = 35^0\,37'\,59''.$$

Man hat $tg b = tg B . \sin a$ und besitzt in b die Neigung der Kante X des Holoëders zur Höhenlinie auf der Fläche von 2P2.

$$\begin{aligned} \log.tg b = \log.tg 19^0\,28'\,55'' &= N.\ 9{,}5487136 - 10 \\ + \log.\sin 35^0\,37'\,59'' &= \quad 9{,}7653645 - 10 \\ \hline & \quad N.\ 9{,}3140781 - 10 \\ & \quad b = 168^0\,21'\,16''. \end{aligned}$$

Da man die Neigung der Höhenlinie auf der Fläche von 2P2 zur Nebenaxe in der Basis kennt = 65⁰ 33′ 12″, so ermittelt man die Neigung der Kante X gegen dieselbe Axe = b′ = 77⁰ 11′ 56″. Alsdann ist:

$$m = \frac{tg b'}{c} \text{ und } n = \frac{m}{m-1}.$$

$$\text{log. num. m} = \text{log. tg } 77^0\ 11'\ 56'' = 0{,}6435633$$
$$-\ \text{log. num. c} = 0{,}0413388$$
$$0{,}6022245$$
$$\text{num. m} = 4\ ;\ n = {}^4/_3.$$

Die Gestalt u ist $= +\, l\, \frac{4P^4/_3}{4}$.

5. Berechnung von $x = +\, l\, \frac{mP\frac{m}{m-1}}{4}$. Gemessen ist $g : x =$ $= 167^0\ 59'$, daraus folgt $x : s = 154^0\ 3'\ 5''$.

Somit haben wir:

$$\text{log. tg} b = \text{log. tg } 25^0\ 56'\ 55'' = \text{N. } 9{,}6871925 - 10$$
$$+\ \text{log. sin } 35^0\ 37'\ 59'' = 9{,}7653645 - 10$$
$$\text{N. } 9{,}4525570 - 10$$
$$b = 164^0\ 10'\ 19''.$$

b′ bestimmt sich zu $81^0\ 22'\ 53''$; ferner ist:

$$m = \frac{\text{tg} b'}{c} \text{ und } n = \frac{m}{m-1}.$$

$$\text{log. num. m} = \text{log. tg } 81^0\ 22'\ 53'' = 0{,}8193923$$
$$-\ \text{log. num. c} = 0{,}0413388$$
$$0{,}7780535$$
$$\text{num. m} = 6\ ;\ n = {}^6/_5.$$

Die Gestalt x ist $= +\, l\, \frac{6P^6/_5}{4}$.

6. Berechnung von $o' = -\, r\, \frac{mP\frac{m}{m-1}}{4}$. Gemessen $o' : \underline{g} =$ $= 154^0\ 55'$, daraus bestimmt sich $o' : s = 167^0\ 7'\ 5''$.

$$\text{log. tg} b = \text{log. tg } 12^0\ 52'\ 55'' = \text{N. } 9{,}3592642 - 10$$
$$+\ \text{log. sin } 35^0\ 37'\ 59'' = 9{,}7653645 - 10$$
$$\text{N. } 9{,}1246287 - 10$$
$$b = 172^0\ 24'\ 39''.$$

b′ ist hiernach $= 73^0\ 8'\ 33''$ und es folgt:

$$m = \frac{\text{tg} b'}{c} \text{ und } n = \frac{m}{m-1}.$$

$$\text{log. num. m} = \text{log. tg } 73^0\ 8'\ 33'' = 0{,}5185385$$
$$-\ \text{log. num. c} = 0{,}0413388$$
$$0{,}4771997$$
$$\text{num. m} = 3\ ;\ n = {}^3/_2.$$

Die Gestalt o′ ist $= -\, r\, \frac{3P^3/_2}{4}$.

7. Berechnung der Axenschnitte der Einzelfläche i, der Gestalt i = $= - r \frac{mPn}{4}$ angehörig. Gemessen sei i : $\underline{g}$ = 176° 4′. Soll die Berechnung aus diesem einen Winkel erfolgen, so muss noch eine Zone herangezogen werden. Als solche ergibt sich, bestätigt durch das Reflexionsgoniometer: 3r : u : i : $\underline{g}$; der Schnitt der in dem entsprechenden Zonenpunkt liegenden Sectionslinie, vergl. Tafel XI, Fig. 6, erfolgt auf der Axe a′ im Abstand $^1/_3$. Als eine zweite Zone bietet sich scheinbar dar: 5r : x : i, allein man erkennt sofort, dass dies eine unächte Zone ist, da i, was auf a′ in $^1/_3$ einschneidet, sonst auch auf derselben Axe in $^1/_5$ liegen müsste, eine Bedingung, der nur $\underline{g}$ zu genügen vermag.

Wir können also zur Berechnung der Gestalt nur die erste Zone verwenden, erkennen aber aus derselben sofort, dass die Combinationskante i : $\underline{g}$ zur Kante $\underline{g}$: g unter demselben ebenen Winkel neigt, unter dem u : $\underline{g}$ zu $\underline{g}$: g steht.

Zur Berechnung des letzteren Winkels legen wir ein sphärisches Dreieck, Fig. 192, mit folgenden Stücken:

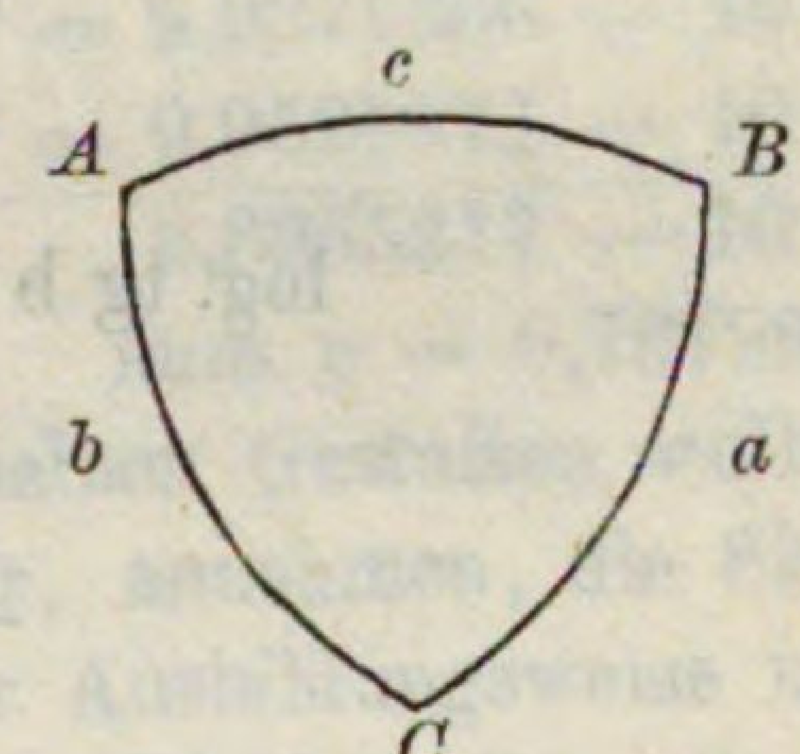


Fig. 192.

B = 161° 31′ = Winkel u : g.
C = 120° 0′ = Winkel $\underline{g}$: g.
a = 137° 43′ 22″ = Neigung der Combk. s : g oder u : g zur Kante $\underline{g}$: g.

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} a \,.\, \sin \varphi}{\sin (C + \varphi)};$$

mit $\operatorname{tg} \varphi = \cos a \,.\, \operatorname{tg} B$.

$$\begin{aligned}
\log.\, \operatorname{tg}\varphi = \log.\, \cos 42^0\, 16'\, 38'' &= N.\ 9{,}8691872 - 10\\
+ \log.\, \operatorname{tg} 18^0\, 29' &= N.\ 9{,}5240999 - 10\\
\hline
&\ P.\ 9{,}3932871 - 10\\
\varphi &= 13^0\, 53'\, 33''.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log.\, \operatorname{tg} b = \log.\, \operatorname{tg} 42^0\, 16'\, 38'' &= N.\ 9{,}9586619 - 10^{*}\\
+ \log.\, \sin 13^0\, 53'\, 33'' &= 9{,}3803939 - 10\\
\hline
&\ N.\ 9{,}3390558 - 10\\
- \log.\, \sin 46^0\, 6'\, 27'' &= 9{,}8577195 - 10\\
\hline
&\ N.\ 9{,}4813363 - 10\\
b &= 163^0\, 8'\, 49''.
\end{aligned}$$

* Der log. tg 42° 16′ 38″ ist der Berechnung auf p. 369 entnommen.

Mit diesem soeben gerechneten und dem früher gemessenen Winkel lässt sich die Gestalt, wie folgt, berechnen. In einem anderen sphärischen Dreieck, Fig. 193, sind gegeben:

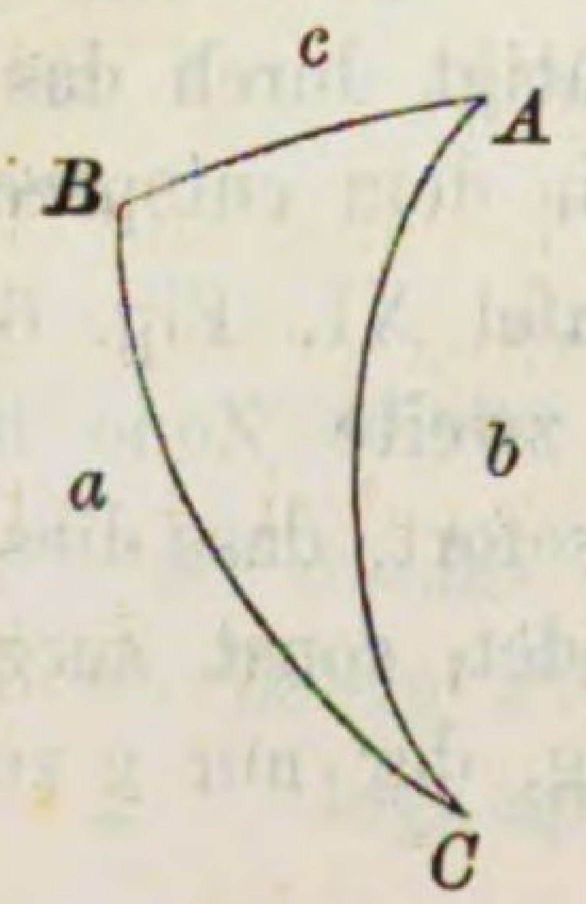


Fig. 193.

$$B = 176^0\, 4' = \text{Cbk. } i : \underline{g}.$$
$$C = 60^0.$$
$$a = 163^0\, 8'\, 49''.$$

Man rechnet $\operatorname{tg} b = \dfrac{\operatorname{tg} a \,.\, \sin \varphi}{\sin (C + \varphi)}$

mit $\operatorname{tg} \varphi = \cos a \,.\, \operatorname{tg} B$.

Der Winkel b ist die Neigung der nicht vorhandenen Kante X der holoëdrischen Gestalt zur Prismenkante, d. h. zur Projection der Hauptaxe. Zieht man von b einen Winkel von 90⁰ ab, so erhält man die Neigung besagter Kante zur Nebenaxe und die tg dieser Neigung ist mc.

$$
\begin{aligned}
\log.\ \operatorname{tg} \varphi = \log.\ \cos 16^0\, 51'\, 11'' &= \text{N. } 9{,}9809353 - 10 \\
+ \log.\ \operatorname{tg} 3^0\, 56' &= \text{N. } 8{,}8373211 - 10 \\
\hline
&\quad \text{P. } 8{,}8182564 - 10 \\
&\quad \varphi = 3^0\, 45'\, 54''.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\ \operatorname{tg} b = \log.\ \operatorname{tg} 16^0\, 51'\, 11'' &= \text{N. } 9{,}4813401 - 10 \\
+ \log.\ \sin 3^0\, 45'\, 54'' &= \quad 8{,}8173298 - 10 \\
\hline
&\quad \text{N. } 8{,}2986699 - 10 \\
- \log.\ \sin 63^0\, 45'\, 54'' &= \quad 9{,}9527869 - 10 \\
\hline
&\quad \text{N. } 8{,}3458830 - 10 \\
&\quad b = 178^0\, 43'\, 47''.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\ \text{num. } m = \log.\ \operatorname{tg} 88^0\, 43'\, 47'' &= 1{,}6541530 \\
- \log.\ \text{num. } c &= 0{,}0413388 \\
\hline
&\quad 1{,}6128142 \\
&\quad \text{num. } m = 41.
\end{aligned}
$$

Mit der Bestimmung von m kennt man auch n, denn da die Gestalt vom Zeichen 41Pn ist, so wird $\nu = 41$ und der Axenschnitt mit dem kleinsten Werthe $= \dfrac{a''}{\nu} = \dfrac{a''}{41}$. Aus der Zone $\underline{g} : i : u : 3r$ folgt aber der Axenschnitt mit dem grössten Werthe zu $\dfrac{a'}{3}$, daher muss der mittlere, der überdies für die Sectionslinie der einzigen am Krystalle vorhandenen Fläche der Gestalt i auf $-$ a liegt, zu $- \dfrac{a}{38}$ werden.

Somit erhalten wir: $i = \frac{a'}{3} : \frac{a''}{41} : -\frac{a}{38} : c = -r\frac{41P\frac{41}{38}}{4}$.
— Hiermit wäre die ganze Combination entwickelt. Einen Einblick in den Zusammenhang der Glieder derselben gewährt Fig. 6 auf Tafel XI.

c. Rothgiltigerz von Freiberg.

Die auf Tafel XII. in Fig. 1 abgebildete Combination* lässt, wenn man von P als + R ausgeht, folgende Gestalten erkennen:

$-\frac{1}{2}R$; $-mR (m > 1)$; $+\frac{\infty R}{2}$; $+\frac{\infty Rn}{2}$; $\infty P2$; drei $+ \pi mPn$;
z ; f ; k ; s n ; a, h, g;
fünf $- \pi mPn$.
o, x, d, m und w.

1. Zur Bestimmung des Axenverhältnisses der Grundform nehmen wir den Polkantenwinkel von + R = 108° 42′ an; alsdann ist:

$$\begin{aligned} \log.\cos a = \log.\cos 54^0\,21' &= 9{,}7655436 - 10 \\ -\log.\sin 60^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ \hline &\ 9{,}8280130 - 10 \\ a &= 47^0\,42'\,4''. \\ \log.\operatorname{cotg} c = \log.\cos 30^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ +\log.\operatorname{cotg} 47^0\,42'\,4'' &= 9{,}9589911 - 10 \\ \hline &\ 9{,}8965217 - 10 \\ \text{num. } c &= 0{,}787992. \end{aligned}$$

2. Zum Zwecke der Berechnung der einzelnen Gestalten wollen wir, wie es am Originalkrystall der Fall war, annehmen, die Skalenoëder o, x, d, m und w treten in messbarer Ausbildungsweise nur auf der rechten Seite auf, d überdies nur mit einer Fläche; die anderen Skalenoëder g, h und a liegen, wie es die Abbildung zeigt, mit je zwei Flächen an P = + R an.

3. Zunächst suchen wir a zu ermitteln, dessen stumpfere Polkante sich, wie die Fläche von + R, uns zuwendet und somit ein positives Skalenoëder ist. Sei zur Ableitung gemessen a′ : P = 164° 5′, so folgt daraus $\frac{1}{2}X$ von $+ \pi mPn = 70^0\,16'$. Ferner ist in Betracht zu ziehen, dass die Gestalt, weil positiv und zwischen + R und $-\frac{1}{2}R$ gelegen, vom Zeichen $+ \pi mP\frac{m}{2m-1}$ ist**. Soll die Berechnung aus

* Dieselbe stellt einen Krystall aus der Sammlung der Universität Strassburg dar, der dem Verfasser zum Zwecke des Studiums von H. Prof. P. Groth mit grösster Bereitwilligkeit anvertraut wurde. — Die Abbildung dieses ausgezeichneten Krystalls ist, bezüglich des Auftretens der Flächen auf dessen rechter Seite, fast vollkommen naturgetreu; es fehlt daselbst am Krystall nur eine Fläche von d.

** In diesem Zeichen ist gegenüber dem bei der Zonenbetrachtung abgeleiteten m anstatt m′ gesetzt.

dem einen mitgetheilten Winkel erfolgen so ist aus dem Zonenverband die Neigung der Kante X von $+ \pi mPn$ zur Hauptaxe, welche mit der entsprechenden Neigung der Kante X von + R identisch ist, zu entnehmen. Da wir indessen letzteren Neigungswinkel nicht kennen, so muss er zuvor durch:

$$\operatorname{cotg} \beta' = c \sqrt{1/3}$$

dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \log. \operatorname{cotg}\beta' = \log. \text{num. } c &= 9{,}8965217 - 10 \\ + \log. \sqrt{1/3} &= 9{,}7614394 - 10 \\ \hline & \quad 9{,}6579611 - 10 \\ \beta' &= 65^0\ 32'\ 13''. \end{aligned}$$

Dieser Winkel, β' des Rhomboëders, gibt für das Skalenoëder β, so dass zur Berechnung desselben X und β gegeben sind.

Zur Berechnung von n haben wir: $2n - 1 = \frac{\cos\beta . \sqrt{3}}{\operatorname{cotg} {}^1/_2 X}$.

$$\begin{aligned} \log. \text{num. } 2n - 1 = \log. \cos 65^0\ 32'\ 13'' &= 9{,}6171119 - 10 \\ + \log. \sqrt{3} &= 0{,}2385606 \\ \hline & \quad 9{,}8556725 - 10 \\ - \log. \operatorname{cotg} 70^0\ 16' &= 9{,}5547415 - 10 \\ \hline & \quad 0{,}3009310 \\ & \quad \text{num.} = 2. \end{aligned}$$

Aus $2n - 1 = 2$, folgt $n = {}^3/_2$; der Werth von m ergibt sich aus dem allgemeinen Zeichen zu ${}^3/_4$.

Also ist $a = + \pi {}^3/_4 P {}^3/_2 = + {}^1/_4 R3$.

4. Zur Bestimmung des Skalenoëders g veranstalten wir die Messungen:

$$g : g' = 171^0\ 30' \quad ; \quad g' : P = 137^0\ 38'.$$

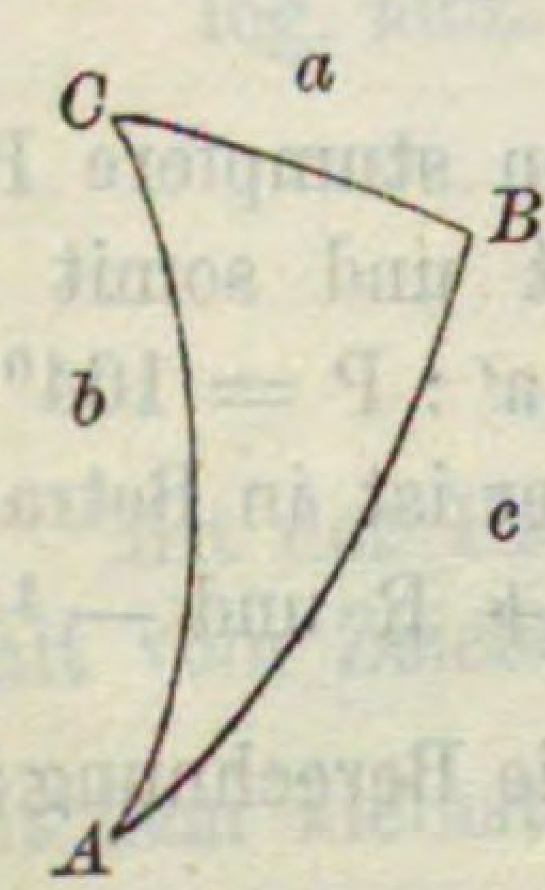


Fig. 194.

Hiermit lässt sich ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 194, das folgende Stücke enthält:

$A = 85^0\ 45'$.
$B = 137^0\ 38'$.
$C = 90^0$.

Man berechnet b, d. i. die Neigung der Kante Y des Skalenoëders zur Höhenlinie auf der Fläche von + R. Es findet statt: $\cos b = \frac{\cos B}{\sin A}$.

$$\begin{aligned} \log. \cos b = \log. \cos 42^0\ 22' &= \text{N. } 9{,}8685548 - 10 \\ - \log. \sin 85^0\ 45' &= \quad 9{,}9988041 - 10 \\ \hline & \quad \text{N. } 9{,}8697507 - 10 \\ b &= 137^0\ 48'\ 25''. \end{aligned}$$

Da nun die Neigung der Höhenlinie auf der Fläche von + R zur Hauptaxe = 47° 42′ 4″ ist, so neigt die Kante Y des Skalenoëders zu derselben Axe unter dem Winkel 5° 30′ 29″ = α.

Wir haben nunmehr n zu bestimmen durch die Formel:

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos\alpha . \sqrt{3}}{\operatorname{cotg} {}^1/_2 Y}.$$

$$\begin{aligned}
\text{log. num.} \frac{n+1}{n-1} &= \text{log. cos } 5^0\ 30'\ 29'' = 9{,}9979901 - 10 \\
&+ \text{log. } \sqrt{3} = 0{,}2385606 \\
&\phantom{+ \text{log. } \sqrt{3} =} 0{,}2365507 \\
&- \text{log. cotg } 85^0\ 45' = 8{,}8710638 - 10 \\
&\phantom{- \text{log. cotg } 85^0\ 45' =} 1{,}3654869 \\
&\text{num.} = 23{,}20.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $\frac{n+1}{n-1} = 23{,}20$ folgt $n = 1{,}09 = {}^{12}/_{11}$.

Zur Berechnung von m hat man in diesem speciellen Falle:

$$m = \frac{{}^{12}/_{11} \sqrt{3} . \operatorname{cotg}\alpha}{c . {}^{23}/_{11}} = \frac{12 . \sqrt{3} . \operatorname{cotg}\alpha}{c . 23}.$$

$$\begin{aligned}
\text{log. num. m} = \text{log. num. } 12 &= 1{,}0791812 \\
+ \text{log. } \sqrt{3} &= 0{,}2385606 \\
+ \text{log. cotg } 5^0\ 30'\ 29'' &= 1{,}0157835 \\
& 2{,}3335253
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{log. num c} &= 9{,}8965217 - 10 \qquad & 1{,}2582495 \\
+ \text{log. num. } 23 &= 1{,}3617278 & 1{,}0752758 \\
& 1{,}2582495 & \text{num. m} = 11{,}893 = 12.
\end{aligned}$$

Zieht man sowohl die hohen Ableitungscoëfficienten, als den Umstand in Betracht, dass die Messungen nicht sehr genau auszuführen waren, so ergibt sich in befriedigender Weise:

$$g = + \pi 12 P {}^{12}/_{11} = + 10 R {}^6/_5.$$

5. Ist g bestimmt, so sind damit h und s gegeben. Aus der Kantenzone von + R folgt für h = + π mPn (Grenzgestalten + R und ∞P2) das allgemeine Zeichen $+ \pi m' P \frac{2m'}{m'+1}$; aus der Zone g : k ergibt sich, da $g = + \pi m P \frac{m}{m-1}$ ist, für h derselbe allgemeine Werth. Unter Berücksichtigung, dass der Schnitt auf der Hauptaxe für ein und dieselbe Gestalt in Betracht kommt, folgt m = = m′ und alsdann sofort: $\frac{2m}{m+1} = \frac{m}{m-1}$; m = 3 , n = ³/₂.

Das Skalenoëder h ist also $= + \pi 3 P {}^3/_2 = + R3$.

Die ditrigonale Säule s, welche mit dem genannten Skalenoëder horizontale Combinationskanten bildet, wird zu $\frac{+\infty R^3/_2}{2}$.

Die Berechnung von h, g und s kann man auch mit der Bestimmung von s beginnen; h ergibt sich sodann aus dem Zonenverband sofort zu $+\pi 3P^3/_2$ und für g folgt aus der Zone h : k das allgemeine Zeichen $+\pi mP\frac{m}{m-1}$. Zur völligen Bestimmung von g ist schliesslich noch eine Messung anzustellen, und man kann dann, wie bei der Pyramide $mP\frac{m}{m-1}$ gezeigt, die Gestalt berechnen, wenn man vorher den ebenen Winkel kennt, den die Combinationskante h : k mit der Kante k : k' bildet.

6. Gehen wir zur Bestimmung der auf der rechten Seite des Krystalls auftretenden Skalenoëder über (der Originalkrystall zeigte, wie bereits bemerkt, dieselben auf der linken Seite stark verkümmert), so ist bezüglich der Gestalt o geltend zu machen, dass sie in die Kantenzone von $-{}^1/_2R$ fällt. Es kommt ihr daher das Zeichen $-\pi mP\frac{2m}{m+{}^1/_2}$ zu. Sei zur Ableitung gemessen $z' : o = 163^0\ 40'$, so kann man damit ein sphärisches Dreieck legen, Fig. 195, in dem gegeben sind:

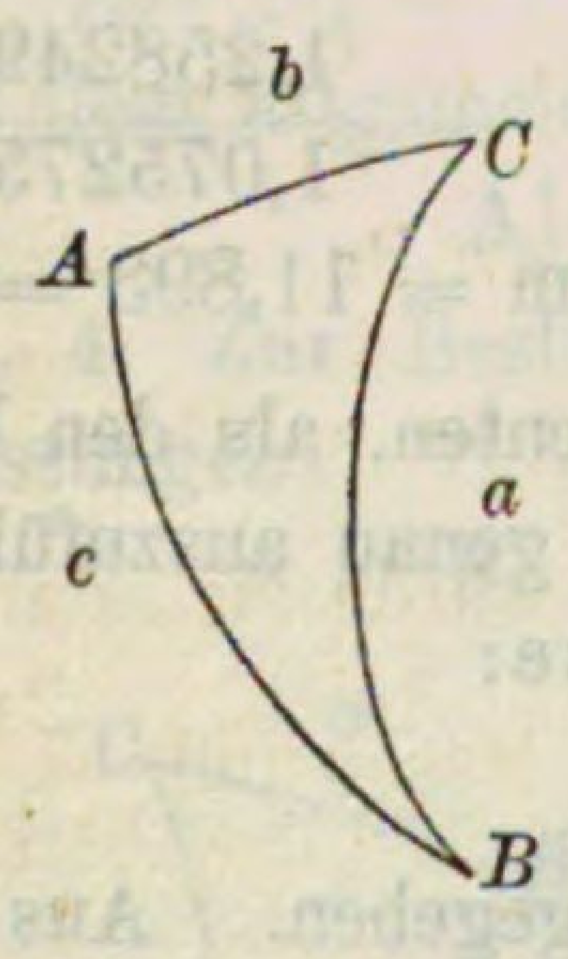


Fig. 195.

$A = 163^0\ 40'$.
$C = 90^0$.
$b = 57^0\ 36'\ 48''$.

(Dieser letztere Winkel ist die Hälfte der Neigung der Combinationskante z' : o zur Combinationskante z' : o' und identisch mit dem halben, ebenen Winkel am Poleck von $-{}^1/_2R$, aus dessen Elementen er durch $\text{tg}\,b = \sin a . \text{tg}B$ erhalten worden ist. In besagter Gleichung ist $B = 60^0$ und a stellt die Neigung der Höhenlinie auf der Fläche von $-{}^1/_2R$ (zusammenfallend mit der Kante von $+R$) zur Hauptaxe $= 65^0\ 32'\ 13''$ vor.)

Man findet: $\text{tg}\,a = \sin b . \text{tg}A$

und hat in a die Neigung der Polkante Y des Skalenoëders zur Höhenlinie auf der Fläche von $-{}^1/_2R$.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tg}\,a &= \log.\ \sin 57^0\ 36'\ 48'' = & 9{,}9265752 - 10 \\ &+ \log.\ \text{tg}\ 16^0\ 20' = & \text{N. } 9{,}4669448 - 10 \\ & & \text{N. } 9{,}3935200 - 10 \\ & & a = 166^0\ 6'\ 1''. \end{aligned}$$

Da nun die Höhenlinie auf der Fläche von $-\frac{1}{2}R$ zur Hauptaxe unter 65° 32′ 13″ neigt, so beträgt diese Neigung für Y = 51° 38′ 14″. Wir nennen diesen Winkel α.

Ferner ist: $\cotg\alpha = \frac{mc(n+1)}{n\sqrt{3}}$, da aber aus der Zone $n = \frac{2m}{m+\frac{1}{2}}$ folgt, so findet sich $m = \frac{\frac{1}{2}n}{2-n}$. Substituirt man dies, so erhält man: $\cotg\alpha = \frac{\frac{1}{2}c(n+1)}{(2-n)\sqrt{3}}$ und hieraus zur Berechnung:

$$\frac{n+1}{2-n} = \frac{\cotg\alpha \,.\, 2\sqrt{3}}{c}.$$

$$\begin{aligned}
\log.\,\mathrm{num.}\,\frac{n+1}{2-n} = \log.\,\cotg\,51^0\,38'\,14'' &= 9{,}8984690 - 10\\
+ \log.\,\mathrm{num.}\,2 &= 0{,}3010300\\
+ \log.\,\sqrt{3} &= 0{,}2385606\\
\hline
&\ 0{,}4380596\\
- \log.\,\mathrm{num.}\,c &= 9{,}8965217 - 10\\
\hline
&\ 0{,}5415379\\
\mathrm{num.} &= 3{,}48.
\end{aligned}$$

Aus $\frac{n+1}{2-n} = 3{,}48$ folgt $n = 1{,}33 = \frac{4}{3}$; m ergibt sich = 1.

Das Skalenoëder o ist somit $-\pi P\frac{4}{3} = -\frac{1}{2}R2$.

7. Könnten wir, zur Bestimmung von $d = -\pi mPn$, ausser der Zone z′:o:d, aus welcher sich das allgemeine Zeichen $-\pi mP\frac{2m}{m+\frac{1}{2}}$ ergibt, auch noch die Zone d : P : d heranziehen, so würde sich daraus das allgemeine Zeichen $-\pi mP\frac{m}{2(m-1)}$ ermitteln lassen und $\frac{2m}{m+\frac{1}{2}}$ wäre $= \frac{m}{2(m-1)}$, d. h. $m = \frac{3}{2}$ und $n = \frac{3}{2}$.

Wir erhielten also: $d = -\pi\frac{3}{2}P\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}R3$.

Dies Verfahren ist jedoch nicht zulässig, da, nach der Annahme, d nur auf der rechten Seite und überdies blos mit einer Fläche auftritt.

Wir constatiren daher die erstgenannte Zone, messen z′ : d = = 152° 0′ und legen ein sphärisches Dreieck, vergl. Fig. 195, mit:

A = 152° 0′.
C = 90°.
b = 57° 36′ 48″.

$$\log.\ \mathrm{tg}\,a = \log.\ \sin 57^0\,36'\,48'' = 9{,}9265752 - 10$$
$$+ \log.\ \mathrm{tg}\,28^0\,0' = \mathrm{N}.\ 9{,}7256744 - 10$$
$$\mathrm{N}.\ 9{,}6522496 - 10$$
$$a = 155^0\,49'\,11''.$$

α bestimmt sich, entsprechend der Ermittelung im vorigen Falle, zu $41^0\,21'\,24''$.

$$\log.\ \mathrm{num}.\ \frac{n+1}{2-n} = \log.\ \mathrm{cotg}\ 41^0\,21'\,24'' = 0{,}0553814$$
$$+ \log.\ \mathrm{num}.\ 2 = 0{,}3010300$$
$$+ \log.\ \sqrt{3} = 0{,}2385606$$
$$0{,}5949720$$
$$- \log.\ \mathrm{num}.\ c = 9{,}8965217 - 10$$
$$0{,}6984503$$
$$\mathrm{num}. = 4{,}994 = 5.$$

Aus $\frac{n+1}{2-n} = 5$ folgt $n = {}^3/_2$ und m findet sich dann gleichfalls zu ${}^3/_2$.

Das Skalenoëder d ist daher $= -\pi{}^3/_2P{}^3/_2 = -{}^1/_2R3$.

8. Zur Berechnung der beiden anderen negativen Skalenoëder x und m, die mit d horizontale Combinationskanten bilden, folglich vom Zeichen $-\pi mP{}^3/_2 = -mR3$ sind, können wir mit Vortheil die zweite Art der Berechnung dieser Gestalten, mit Rücksicht auf das Zeichen πmPn anwenden. Zuvor müssen wir aber die Kante ${}^1/_2Z$ der holoëdrischen Gestalt ${}^3/_2P{}^3/_2$ und ihre Neigung zur Nebenaxe in der Basis kennen.

Letztere findet man durch: $\mathrm{tg}\,a = \frac{n\,.\,\mathrm{tg}\,60^0}{2-n}$. Wird für n in dieser Gleichung der Werth ${}^3/_2$ gesetzt, passend reducirt, so folgt:

$$\mathrm{tg}\,a = 3\,.\,\mathrm{tg}\,60^0.$$
$$\log.\ \mathrm{tg}\,a = \log.\ \mathrm{num}.\ 3 = 0{,}4771213$$
$$+ \log.\ \mathrm{tg}\,60^0 = 0{,}2385606$$
$$0{,}7156819$$
$$a = 79^0\,6'\,24''.$$

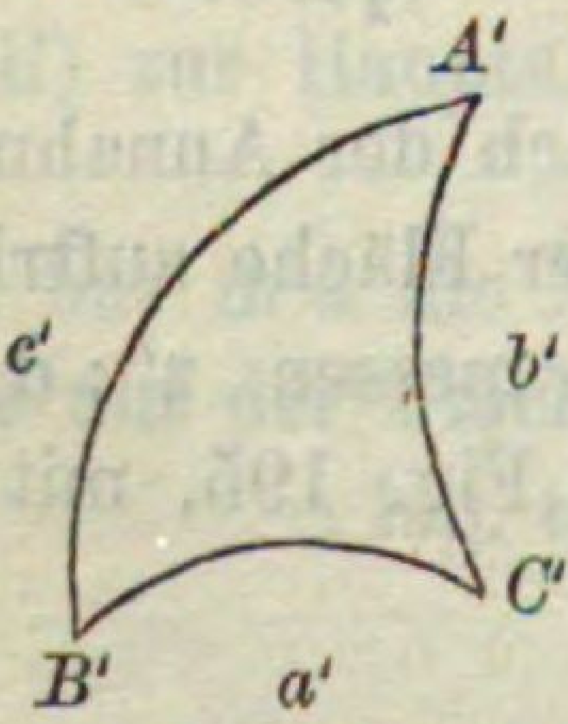


Fig. 196.

Hieraus folgt zunächst die Neigung zur Zwischenaxe $= 70^0\,53'\,36''$. Da nun Y von $-\pi{}^3/_2P{}^3/_2$ (zugleich von ${}^3/_2P{}^3/_2$) zur Hauptaxe unter $41^0\,21'\,24''$ neigt, so beträgt dessen Neigung zur Zwischenaxe $= 48^0\,38'\,36''$. Hiermit und dem letzterwähnten Winkel können wir ein Dreieck bilden, Fig. 196, aus dem ${}^1/_2Z$ des Holoëders berechnet werden kann.

$$a' = 70^0\ 53'\ 36''.$$
$$b' = 48^0\ 38'\ 36''.$$
$$C' = 90^0.$$

Es ist $\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} b'}{\sin a'}$.

$$\begin{aligned} \log.\ \operatorname{tg} B' = \log.\ \operatorname{tg}\ 48^0\ 38'\ 36'' &= 0{,}0553814 \\ -\log.\ \sin\ 70^0\ 53'\ 36'' &= 9{,}9753908 - 10 \\ \hline &\ \ 0{,}0799906 \\ B' &= 50^0\ 14'\ 49''. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von m konnte gemessen werden d : m = 173⁰ 54′; daraus folgt die Neigung der Fläche zum basischen Schnitt 56⁰ 20′ 49″.

Zur Berechnung des Ableitungscoëfficienten dient die Relation:

$$m = \frac{\sin a\,.\,\operatorname{tg} B}{c};$$

in der a = 79⁰ 6′ 24″ und B = 56⁰ 20′ 49″ bedeuten.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \sin\ 79^0\ 6'\ 24'' &= 9{,}9921029 - 10 \\ +\log.\ \operatorname{tg}\ 56^0\ 20'\ 49'' &= 0{,}1766992 \\ \hline &\ \ 0{,}1688021 \\ \log.\ \text{num.}\ c &= 9{,}8965217 - 10 \\ \hline &\ \ 0{,}2722804 \\ \text{num.}\ m &= 1{,}872 = {}^{15}/_8. \end{aligned}$$

Das Skalenoëder m ist $= -\pi\,{}^{15}/_8 P\,{}^3/_2 = -\,{}^5/_8 R3$.

Zur Bestimmung von x liegt die Messung x : d = 171⁰ 46′ vor; daraus folgt die Neigung der Fläche zum basischen Schnitt = 42⁰ 0′ 49″.

$$\begin{aligned} \log.\ \text{num.}\ m = \log.\ \sin\ 79^0\ 6'\ 24'' &= 9{,}9921029 - 10 \\ +\log.\ \operatorname{tg}\ 42^0\ 0'\ 49'' &= 9{,}9546449 - 10 \\ \hline &\ \ 9{,}9467478 - 10 \\ -\log.\ \text{num.}\ c &= 9{,}8965217 - 10 \\ \hline &\ \ 0{,}0502261 \\ \text{num.}\ m &= 1{,}123 = {}^9/_8. \end{aligned}$$

Das Skalenoëder x ist $= -\pi\,{}^9/_8 P\,{}^3/_2 = -\,{}^3/_8 R3$.

9. Zur Bestimmung des negativen Rhomboëders f messen wir f : z′ = 126⁰ 50′ und erhalten, da die Neigung von z′ zur Hauptaxe = 65⁰ 32′ 13″ bekannt ist, die Neigung von f zu derselben Axe = 12⁰ 22′ 13″. Zur Berechnung von m gilt die Relation

$$m = \frac{\cos 30^0\,.\,\operatorname{cotg} 12^0\ 22'\ 13''}{c}$$

$$\begin{aligned} \text{log. num. m} = \text{log. cos } 30^0 &= 9{,}9375306 - 10 \\ + \text{log. cotg } 12^0\, 22'\, 13'' &= 0{,}6589208 \\ & 0{,}5964514 \\ - \text{log. num. c} &= 9{,}8965217 - 10 \\ & 0{,}6999297 \\ &\text{num. m} = 5. \end{aligned}$$

Das Rhomboëder f ist = — 5R.

10. Die letzte Gestalt ist das Skalenoëder w, der Kantenzone von — 5R angehörig.* Wir wollen diese Gestalt nicht durch Messung, sondern durch den Zonenverband bestimmen.

Aus der Kantenzone von — 5R kommt der Gestalt das allgemeine Zeichen $-\pi\,\mathrm{m}P\dfrac{2\mathrm{m}}{\mathrm{m}+5}$ zu; ferner ergibt sich am Reflexionsgoniometer die Zone g' : w : w', d. h. w schärft die Polkanten X von g = $= +\pi\,12P\,{}^{12}/_{11}$ zu.

Das vollständige Zeichen dieses letzteren Skalenoëders ist:

$$\frac{a}{1} : \frac{b}{13} : \frac{a'}{12} : \frac{b'}{23} : \frac{a''}{11} : \frac{b''}{10} : c.$$

Die schärfere Polkante liegt in $\dfrac{b}{13}$, daher ist, unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens, vergl. p. 327, das allgemeine Zeichen des zuschärfenden Skalenoëders $= -\pi\,\mathrm{m}P\dfrac{\mathrm{m}}{13-\mathrm{m}}$. Wir können folglich setzen: $\dfrac{2\mathrm{m}}{\mathrm{m}+5} = \dfrac{\mathrm{m}}{13-\mathrm{m}}$; daraus folgt m = 7 und n ist = $^7/_6$.

Das Skalenoëder w ist somit $= -\pi\,7P\,{}^7/_6 = -5R\,{}^7/_5$.

Mit der Berechnung dieser letzten Gestalt ist die ganze Combination entwickelt. —

* Diese Zugehörigkeit erkennt man durch die Zone f : w : n, welche nöthigenfalls am Reflexionsgoniometer bestätigt werden muss. Ist diese Bestätigung aus irgend einem Grunde nicht thunlich, oder ihr Ergebniss nicht völlig zweifellos, so muss man durch Rechnung bestimmen, ob die Zone besteht, oder nicht. — Zum Zwecke dieser rechnenden Prüfung ermittelt man aus den Elementen von — 5R den halben, ebenen Winkel am Poleck; mit demselben muss innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen der halbe Winkel stimmen, den die Combinationskante f : w zur Combinationskante f : w' bildet. Dieser letztgenannte halbe Winkel = b wird berechnet durch ein sphärisches Dreieck, vergl. Fig. 195, in dem A = Combk. f : w; B = Combk. w : w' und C = 90⁰ gegeben sind.

C. Anhang.

Von der Zeichnung der Krystallformen.

I. Zeichnung der einfachen Formen und deren Combinationen.

Soll die Ausbildung der Flächen eines Krystalls durch Zeichnung wiedergegeben werden, so bedient man sich hierzu fast ausschliesslich einer Methode, welche den Krystall aus den Axen und den Axenabschnitten seiner Flächen entstehen lässt.

Bei der Herstellung der Krystallzeichnungen denkt man sich stets das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung vom Krystalle; hierdurch wird es erreicht, dass alle Gesichtsstrahlen einander parallel sind und der am Krystalle stattfindende Kantenparallelismus auch im Bilde erscheint.

Man nennt die Ebene, auf welche das Bild des Krystalls entworfen wird, die Bild- oder Projectionsebene und unterscheidet, je nach der Lage der Gesichtsstrahlen zu derselben, eine orthographische und eine klinographische Projection. Ferner denkt man sich die Projectionsebene durch den Mittelpunkt des Krystalls gelegt und theilt die Projectionen, je nach der Lage der Projectionsebene zur vertical gerichteten Axe, in horizontale, verticale und schiefe Projectionen ein.

Die bei der Zeichnung der Krystallformen zur Verwendung kommenden Horizontalprojectionen sind orthographisch; die anderen Projectionen dagegen theils orthographisch, theils klinographisch. Was die schiefe Projection anlangt, so stellen viele Forscher nach ihr, unter Voraussetzung einer orthographischen Projection, die Krystallbilder dar; — wir werden uns zu diesem Zwecke, nach dem Vorgange von

NAUMANN* hauptsächlich der klinographischen Verticalprojection mit intermediärer Lage der Projectionsebene bedienen.

1. Klinographische Verticalprojection mit intermediärer Lage der Projectionsebene.

Bei derselben ist die Projectionsebene vertical, fällt aber mit keinem Krystallhauptschnitt zusammen, sondern befindet sich, mit Rücksicht auf zwei Hauptschnitte, in einer Zwischenlage. Die Gesichtsstrahlen stehen auf der Projectionsebene schief.

Die zwei Hauptaufgaben, welche in Betracht kommen, sind: die Construction des betreffenden Axensystems und die auf dasselbe gegründete Darstellung der Gestalten. Wir werden die erste dieser Aufgaben nach den verschiedenen Systemen behandeln und sodann den allgemeinen Weg angeben, den man bei der Zeichnung der Gestalten einschlägt.

a. Projection der Axen.

α. Reguläres System.

Wir führen die Projection der Axen mit Rücksicht auf die drei Hauptaxen des regulären Systems aus und gründen darauf die Projectionen der Axen in den übrigen Systemen.

Soll das in richtiger Stellung gedachte Axensystem in Projection gelegt werden, so erfährt es um seine verticale Axe aus der Normallage eine Drehung von rechts nach links und zwar um einen Winkel δ, den man den Declinationswinkel nennt. Derselbe ist bestimmt durch:

$$\operatorname{cotg} \delta = r.$$

Der Werth von r wird = 3 angenommen.

Ferner müssen die Endpunkte der in der Horizontalebene gelegenen Axen im Bilde eine Abweichung unter oder über dieselbe erkennen lassen, wenn das in unendlicher Ferne befindliche Auge sich in einer, zur Projectionsebene normalen Ebene um einen Winkel ε über die Horizontalebene erhebt. Diesen Winkel nennt man den Elevationswinkel des Auges. Die Grössen der eben erwähnten Abweichungen sind, für jeden Elevationswinkel, den wirklichen Abständen der betreffenden Endpunkte von der Projectionsebene proportional. Der Elevationswinkel selbst bestimmt sich durch:

* Vergl. NAUMANN, Lehrb. d. rein. und angew. Kryst. 1830. B. II. p. 390 u. f. — Der dem Verfasser noch zu Gebot stehende Raum gestattet nur die Darlegung der wichtigsten Verhältnisse in gedrängter Kürze; man wolle zum Zwecke eines eingehenderen Studiums, ausser den Schriften NAUMANN's, auch noch die Werke von HAIDINGER, V. VON LANG, MOHS, QUENSTEDT, SCHRAUF, WEISBACH (Anleitung zum axonometrischen Zeichnen. Freiberg 1857) u. s. w. nachsehen.

$$\cot g\, \varepsilon = s \,.\, \cot g\, \delta.$$

Für s nimmt man entweder den Werth 3, oder auch den Werth 2 an.* — Zum Zwecke der nachfolgend erörterten Construction sei r = 3 und s = 2.

Soll das reguläre Axensystem für die gegebene Breite 2b des Bildes construirt werden, so ziehe man, Tafel XII., Fig. 2, zwei sich rechtwinkelig schneidende Linien und trage in die eine als Horizontallinie zu beiden Seiten vom Durchschnittspunkte M die Länge b = HM = MZ ein. Hierauf theile man HZ in 2r gleiche Theile, lege durch ihre End- und beiden mittelsten Theilpunkte Hülfsverticallinien und trage auf der äussersten Verticale links, abwärts von H, die Länge $\frac{1}{s}$ b ab, bestimme somit den Punkt R. Zieht man nun RM und verlängert die Linie über M hinaus, so ist das zwischen den beiden mittleren Verticalen befindliche Stück AA′ die Projection der vorderen horizontalen Hauptaxe. — Zieht man hierauf durch A die Horizontale AS, ferner die Linie SM, so bestimmt sich in der einen Verticale ein Punkt T. Durch denselben zieht man die Horizontale TB, verbindet B mit M und verlängert diese Linie über M hinaus, so ist das zwischen den äussersten Verticalen befindliche Stück BB′ die Projection der seitlichen horizontalen Hauptaxe. — Trägt man endlich auf der äussersten Verticale rechts, von Z aus abwärts, die Länge $\frac{1}{2r}$ HZ ab, verbindet den dadurch bestimmten Punkt Q mit M, nimmt MC = = MC′ = MQ, so ist CC′ die richtige Länge der verticalen Hauptaxe.

Wie man, nachdem die Hauptaxen des Systems gefunden sind, die Zwischenaxen des Grundkörpers, des Oktaëders, darstellt, bedarf keiner weiteren Erörterung. Was die Zwischenaxen der übrigen Körper anlangt, so sind sie der Lage nach durch die des Grundkörpers bestimmt; ihre Länge kann man für die Zeichnung durch Rechnung finden, da die Längen der Zwischenaxen des Grundkörpers, die Grundwerthe derselben und die Coëfficienten der Zwischenaxen der übrigen Körper bekannt sind. Wir werden jedoch bei der von uns befolgten Constructionsmethode dieser Rechnungen nicht bedürfen.

β. Quadratisches und rhombisches System.

Sei die gegebene Breite 2b des Bildes dieselbe, wie im ersten Falle, so findet man das Axenkreuz eines im quadratischen

* Wegen anderer Werthe, namentlich wegen der von Mohs und Haidinger gebrauchten, vergl. die Abhandlung des letzteren Forschers in Pogg. Annalen 1825. B, V. p. 507—532.

System krystallisirenden Körpers, wenn man die Axen AA′ und BB′ der Lage und Länge nach ungeändert beibehält und auf CC′ aufwärts und abwärts von M ein Stück MC″ abträgt, welches sich ergibt, wenn man die halbe Länge von CC′, d. h. MC, mit der relativen Hauptaxenlänge c des betreffenden quadratischen Krystalls multiplicirt.

Um bei derselben Breite des Bildes das Axenkreuz eines rhombischen Krystalls zu finden, behalten wir der Lage nach, das Axenkreuz des regulären Systems gleichfalls bei und setzen die Länge MB gleich der Länge der halben Makrodiagonale, b = 1. Die Länge der halben Brachydiagonale in der Zeichnung findet sich durch Multiplication der Länge von MA mit dem Werthe der Axe $\breve{a}$; die Länge der halben Hauptaxe durch Multiplication von MC mit dem Werthe der Axe $\acute{c}$.

γ. Hexagonales System.

Man kann ohne einer besonderen Construction für dies System zu bedürfen,* das Axenkreuz sehr einfach aus dem des regulären Systems und zwar mit Rücksicht auf ein dreizähliges, orthohexagonales oder ein vierzähliges Axensystem ableiten.

Soll ein orthohexagonales Axensystem dargestellt werden, so gehen wir auf die Axen des regulären Systems zurück und behalten dieselben, ihrer Lage nach, bei. Das Axenverhältniss des zu construirenden Systems lautet $a : a\sqrt{3} : c$. Wir setzen, Tafel XII, Fig. 3, MB = a = 1 und multipliciren die Länge von MC mit dem Werth der Hauptaxe c. Die dritte Axe MA wird mit dem Werth, den sie in der Projection besitzt, in Rechnung gezogen und mit $\sqrt{3}$ multiplicirt, somit auf die Länge $a\sqrt{3}$ (in Projection) gebracht.

Will man von diesem Axensystem auf das vierzählige übergehen, so braucht man nur die Endpunkte der Axe a mit denen der Axe $a\sqrt{3}$ zu verbinden, letztere Axe zu halbiren und durch den Punkt $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ eine Parallele zur Axe B′B = — a . . . a zu ziehen. Diese Linie wird die eben erwähnten Verbindungslinien in den Punkten a′ und a″ schneiden. Verbindet man a′ mit M und verlängert die Linie über M, so dass — a′M = a′M wird, führt dieselbe Construction für a″ und M aus, so dass a″M = — a″M ist, so stellen die Axen a, a′ und a″ die drei unter 60° geneigten Nebenaxen des

* Ueber eine solche Construction, vergl. NAUMANN, Lehrbuch der reinen und angew. Kryst., 1830, B. II. pag. 443 u. f.

Systems in richtiger Projection dar, die Hauptaxe bleibt nach Lage und Länge dieselbe wie im orthohexagonalen Axenkreuz.

δ. Klinorhombisches System.

αα. Darstellung des durch den Winkel β und das Verhältniss der Lineardimensionen 1 : 1 : 1 bestimmten Axensystems in Vorderansicht.

Wir gehen von dem Axenkreuz des regulären Systems aus und nehmen, Tafel XII, Fig. 4, in der verticalen Axe CC′, von M aus aufwärts, die Grösse:

$$MC'' = MC . \cos\beta$$

an, ferner tragen wir in der Axe A′A, rückwärts von M aus, die Grösse:

$$MA'' = MA . \sin\beta$$

ab, vollenden das Parallelogramm MC″aA″, ziehen dessen Diagonale Ma, verlängern sie über M und machen Ma′ = Ma. Alsdann ist:

CC′ die Hauptaxe,
BB′ die Orthodiagonale,
aa′ die Klinodiagonale.

unter Voraussetzung von $\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 1 : 1 : 1$. Wir haben also, da in unserem Axenverhältniss $\bar{b} = 1$ ist, noch die Längen CM und aM mit den Werthen von $\acute{c}$ und $\grave{a}$ zu multipliciren, um das Axenkreuz des betreffenden Krystalls zu erhalten, dessen Axenverhältniss gegeben war.

ββ. Darstellung des durch den Winkel β und das Verhältniss der Lineardimensionen 1 : 1 : 1 bestimmten Axensystems in Seitenansicht.

Auch in diesem Falle gehen wir von dem regulären Axenkreuz aus, Tafel XII, Fig. 4, und nehmen in der verticalen Axe CC′, von M aus aufwärts, die Grösse:

$$MC''' = MC . \cos\beta$$

an und tragen auf der Axe BB′, links von M, die Grösse:

$$MB''' = MB' . \sin\beta$$

ab, vollenden das Parallelogramm MB‴eC‴, ziehen dessen Diagonale Me und machen ihre Verlängerung über M hinaus, Me′ = Me. Alsdann ist, unter Voraussetzung von $\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 1 : 1 : 1$

CC′ die Hauptaxe,
AA′ die Orthodiagonale,
ee′ die Klinodiagonale.

Die wahren Werthe der Axen für den speciellen Fall finden sich in bekannter Weise.

ε. Klinorhomboidisches System.

Um das Axenkreuz eines klinorhomboidischen Krystalls in Projection zu legen, lassen wir den brachydiagonalen Hauptschnitt auf den Beobachter zu verlaufen und drehen den zu demselben unter dem Winkel C geneigten makrodiagonalen so lange, bis seine neue Projection dem wirklichen Neigungswinkel C entspricht.

Zu diesem Behufe gehen wir vom regulären Axenkreuz AA′, BB′, CC′, Tafel XII., Fig. 5, aus und nehmen in AA′, von M aus vorwärts, die Grösse:

$$MA'' = MA' . \cos C$$

an und tragen auf BB′, von M aus nach rechts oder nach links (je nachdem der spitze Winkel C rechts oder links erscheint), die Grösse:

$$MB'' = MB . \sin C$$

ab. Vollendet man alsdann das Parallelogramm über MA″ und MB″ und zieht dessen Diagonale MD, verlängert solche über M hinaus nach D′, so ist die Ebene CDC′D′ die richtige Projection des makrodiagonalen Hauptschnitts. Die Linie MD stellt in demselben eine Horizontale vor und ist in ihrer Grösse = MA′ und MC.

Im Bilde erscheinen die Linien jetzt derartig, dass die MC sowohl auf der MD, als auch auf der MA′ rechtwinkelig steht, während in der That die Linie MC zur Linie MD unter dem Winkel α, zu MA′ unter dem Winkel β geneigt ist. Um zu diesen schiefen Axen überzugehen, nehme man in CC′, von M aus aufwärts, die Grössen:

$$MC''' = MC . \cos\beta$$

$$MC'' = MC . \cos\alpha$$

an und trage in AA′, von M aus vorwärts oder rückwärts (je nachdem der spitze Winkel β vorn oder hinten liegt), die Grösse:

$$MA''' = MA' . \sin\beta$$

ab und bestimme in DD′, von M aus nach links oder rechts (je nachdem der spitze Winkel α links oder rechts erscheint), die Grösse:

$$MD'' = MD' . \sin\alpha.$$

Alsdann vollende man die Parallelogramme MC‴aA‴ und MC″b′D″, ziehe deren Diagonalen aM und b′M, verlängere dieselben über M und mache ihre Verlängerungen ihnen selbst gleich, so ist

für $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 1 : 1 : 1$

CC′ die Hauptaxe,
bb′ die Makrodiagonale,
aa′ die Brachydiagonale.

Um von diesem Axenverhältniss auf das einer bestimmten Substanz überzugehen, hat man, da b = 1 gesetzt wird, bb′ unverändert

zu lassen und die halben Längen von aa′ und CC′ mit den Werthen von $\breve{a}$ und $\acute{c}$, entnommen aus dem Axenverhältniss des betreffenden triklinen Krystalls, zu multipliciren.

b. Zeichnung der Gestalten.

Nachdem das Verfahren, die Axenkreuze aller Systeme zu construiren, erörtert ist, könnte man zum Zweck der Zeichnung der Gestalten so vorgehen, dass man die betreffenden Flächen, welche eine bestimmte Kante bilden sollen, in richtiger Lage an das Axenkreuz anlegt, ihre Durchschnittspunkte in zwei Axenebenen aufsucht und beide Schnittpunkte durch eine Gerade verbindet. Es würde alsdann dieselbe die gesuchte Combinationskante vorstellen.

Allein diese Methode erweist sich beim Zeichnen complicirter Combinationen als nicht practisch und zwar desswegen nicht, weil sie zu viel Hülfsconstructionen erfordert, und diese, wenn sie in einer Figur vorgenommen werden, die Uebersichtlichkeit erschweren und leicht Irrthümer veranlassen können.

Man kann all' diese Uebelstände vermeiden, wenn man die Zeichnungen der Krystalle auf Grund einer sogenannten parallelperspectivischen QUENSTEDT'schen Projection* ausführt. Dieselbe unterscheidet sich von der gewöhnlichen QUENSTEDT'schen Projection dadurch, dass die Projectionsebene, als welche die Ebene der Axen a und b angenommen wird, nicht die Ebene der Zeichnung ist, sondern durch die, ihrerseits parallelperspectivisch dargestellten Axen a und b geht.

Eine solche perspectivische Projection, z. B. die einer Combination des Topases:** $M = \infty P$, $l = \infty \breve{P}2$, $o = P$, $s' = {}^2/_3 P$, $y = 2\breve{P}\infty$ zeigt Fig. 6^a auf Tafel XII. Dieselbe ist nach der obigen Annahme auf die Axenebene ab, welche P = oP parallel geht, gefertigt.

Diese Projection dient als Grundlage für die auszuführende Zeichnung und lässt sich in jedem System, wenn nur das Axenkreuz bekannt

* Die erste Idee hierzu findet sich bei SCHRÖDER, Elemente der rechn. Kryst. 1852 pag. 100 u. f. — DAUBER hat 1860 in seiner Arbeit über Rothbleierz, Wien. Ac. B. XLII. (p. 37 und 38 des Sep.-Abdr.) in einer Anmerkung auf die entsprechende Verwendbarkeit der NEUMANN'schen graphischen Punktmethode hingewiesen.

** Nach v. KOKSCHAROW wurde $\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}529 : 1 : 0{,}954$ zur Construction des Axenkreuzes verwendet. — Unsere Pyramide o = P ist die gewöhnlich als 2P angenommene. Die Gestalt $s' = {}^2/_3 P$ ist neu und entspricht in der anderen Stellung der Pyramide ${}^4/_3 P$; dieselbe wurde an einem Krystall vom Ural aufgefunden. —

ist, leicht herstellen. Aus ihr ermittelt man die Lage der Combinationskanten durch Kenntniss eines einzigen Satzes, der sich, wie folgt, aussprechen lässt:

„Man findet die Lage der Combinationskante zweier Flächen dadurch, dass man in einer parallelperspectivischen QUENSTEDT'schen Projection, die diesen Flächen entsprechenden Sectionslinien und ihren Schnittpunkt aufsucht und sodann diesen letzteren mit der Hauptaxe c = 1 verbindet."

Nach diesem Princip ist die Figur 6^b auf Tafel XII. construirt, indem auf ein zweites, in paralleler Stellung zum ersten befindliches, perspectivisches Axenkreuz die im ersten, dem Constructionsaxenkreuz, gefundenen Combinationskanten durch Parallelverschiebung übertragen worden sind.

Zum Zwecke der Ausführung complicirter Combinationen ist ferner Folgendes zu beachten.

Man fertigt sich zuerst eine gewöhnliche QUENSTEDT'sche Projection der zu zeichnenden Combination auf die Ebene der Basis, zusammenfallend mit der Ebene der Zeichnung, an.* Aus derselben erhellen, nachdem sie gehörig controlirt ist, der Zonenzusammenhang und die Axenschnitte aller in der Projectionsebene befindlichen Sectionslinien. — In das Constructionsaxenkreuz, das in grösserem Masstabe anzulegen ist, werden keine Sectionslinien eingetragen,** sondern nur die vorkommenden Schnittpunkte der Sectionslinien auf den Axen mit Zahlen und Punkten angedeutet. Zur Auffindung aller in Betracht kommenden Zonenpunkte in der Ebene der in Projection liegenden Axen a und b zieht man die hierzu nöthigen Linien so kurz als möglich aus, so dass sie in ihren Durchschnitten grade nur die gesuchten Punkte angeben und alles Liniengewirr vermieden wird. Zur sicheren Bestimmung der Schnittpunkte mache man es sich zur Regel, dieselben, wenn dies möglich ist, immer aus den Sectionslinien mit den einfachsten Axenabschnitten zu ermitteln. Man wird dann erkennen, dass eigentlich nur verhältnissmässig wenig Punkte zur Bestimmung der Lage der in Betracht kommenden Combinationskanten festzustellen sind. So wären, in Fig. 6^a, Tafel XII., nur die angedeuteten Punkte zur Construction erforderlich.

* Besitzt man ausserdem noch eine Handskizze der herzustellenden Combination, so kann dieselbe vortreffliche Dienste leisten.

** In Fig. 6^a, Tafel XII. ist dies nur zum Zwecke des leichteren Verständnisses geschehen.

Wie man im Felde der in Projection liegenden Axen a und b möglichst jedes Ziehen von Linien vermeidet, so verbindet man auch keinen der daselbst gefundenen Punkte thatsächlich mit c = 1, sondern legt das Lineal nur an beide Punkte an, und verschiebt die erhaltene Verbindungslinie, welche die Lage der gesuchten Kante angibt, parallel sich selbst, an die gewünschte Stelle im zweiten Axenkreuz, das dem Constructionsaxenkreuz parallel ist und über das der Krystall gezeichnet wird.

Man beginnt bei der Zeichnung mit den vorherrschenden Formen und trägt danach die untergeordneten ein. Um den Krystall im Gleichgewicht zu erhalten, lässt man die eingetragenen Kanten nur so weit gehen, als es, von der bestimmten Länge einer Kante ausgehend, die Axenparallelen gestatten. Um diese rasch zu finden, legt man durch das obere und untere Ende der Hauptaxe nochmals die Projectionen der beiden Nebenaxen.*

Mit dem Auffinden einer jeden Kante ist auch die parallele Gegenkante, wenn solche in der betreffenden Figur zur Geltung kommen soll, gegeben. Man zieht die vorderen Kanten kräftig aus und hält die hinteren fein punktirt. — Ist die Combination nicht sehr complicirt, so kann man über dem zweiten Axenkreuz, das man nach Schluss der Construction wegnimmt, gleich die eigentliche Zeichnung vollenden. Bei sehr complicirten Combinationen sticht man die Zeichnung auf untergelegtes Papier durch und zeichnet dann in's Reine, oder pauscht durch und überträgt die Punkte der Pausche auf reines Zeichenpapier.

Hat man einen Krystall vollständig mit seiner Vorder- und Hinterseite gezeichnet und pauscht ihn vermittelst darauf gelegten Pauschpapiers durch, so wird, wenn man die Pausche um den Mittelpunkt durch 180° dreht, eine jede Linie derselben eine Linie der Zeichnung decken, aber es werden die vorderen Linien der Zeichnung mit den hinteren der Pausche zusammenfallen und umgekehrt.

Aus diesem Umstande kann man Nutzen ziehen und ihn vorab zur Controle der Richtigkeit der Zeichnungen benutzen, dann aber auch, was noch wichtiger ist, anwenden, um sich die Construction der halben Figur zu ersparen. Man pauscht die eine Hälfte der Zeichnung, die vollendet ist, durch, dreht die Pausche um den Mittelpunkt durch 180°, sticht durch und hat die andere Hälfte hergestellt. Meistens pflegt man nur die vordere Hälfte einer Combination zu construiren und die

* Auf andere beim Zeichnen zu beachtende Rücksichten näher einzugehen, verzichten wir, da dieselben sich in der Praxis leicht von selbst ergeben.

hintere der durch 180⁰ um den Mittelpunkt gedrehten Pausche derselben zu entnehmen.

2. Orthographische Vertical- und Horizontalprojection.

Die orthographische Verticalprojection erlangt nur im monoklinen Systeme mit Rücksicht auf den klinodiagonalen Hauptschnitt Wichtigkeit, wesshalb wir speciell nur die sog. Klinodiagonalprojection betrachten. Die Gesichtsstrahlen sind bei dieser letzteren Projection parallel der Orthodiagonale, daher ist diese Darstellung von der Orthodiagonale gänzlich unabhängig und das zur Construction erforderliche Axensystem sehr einfach herzustellen, wenn man nur zwei Gerade, unter dem Winkel β zu einander geneigt, zeichnet und die relativen Längen von $\grave{a}$ und $\acute{c}$ auf ihnen abträgt.

Die orthographische Horizontalprojection wird im regulären Systeme auf die Ebene des Würfels, in dem quadratischen, rhombischen und hexagonalen auf die Ebene der Basis ausgeführt. In diesen Systemen entspricht also der Projectionsebene ein Hauptschnitt; die Projection muss daher von der auf diesem Hauptschnitt normalen Axe, der Verticalen, gänzlich unabhängig sein und sich auf die Darstellung der Nebenaxen reduciren. — Um für das trikline System ebenfalls die Lage der Axen a und b in der Horizontalebene zu finden, ziehe man zwei unter dem Winkel C sich schneidende Linien, mache die eine derselben $= \breve{a} \,.\, \sin\beta$, die andere $= b \,.\, \sin\alpha$, so ist die Horizontalprojection der Dimensionen der Grundgestalt vollendet. — Im monoklinen Systeme ist $C = \alpha = 90^0$, somit ist die Orthodiagonale in der Einheit, die Klinodiagonale dazu rechtwinkelig und nach dem Verhältniss: $\grave{a} \,.\, \sin\beta$ aufzutragen, um die in Betracht kommenden Axen zu erhalten.

Bei beiden eben beschriebenen Projectionen ist die Projectionsebene senkrecht zu einer wichtigen Zone des betreffenden Krystalls; es werden sich daher alle Flächen einer solchen nur als gerade Linien darstellen können, was zur Folge hat, dass die näheren Verhältnisse dieser Zone aus der Figur nicht ersichtlich werden. Diese beiden Arten der Projection haben desswegen, gegenüber der von uns zuerst betrachteten, einen beschränkteren Werth und geben mehr eine schematische Uebersicht der Flächen eines Krystalls, als dass sie ein vollständiges Bild desselben gewährten. Immerhin sind sie für gewisse Zwecke sehr geeignet.

Um die Flächen eines Krystalls in Klinodiagonalprojection oder in Horizontalprojection darzustellen, fertige man sich, als Grundlage

für die Zeichnung, eine QUENSTEDT'sche Projection, entweder auf das Klinopinakoid, oder auf die Horizontalebene an. Zu den Axen dieser Projection in paralleler Stellung, construire man ein zweites entsprechendes Axensystem in der Grösse, welche der Zeichnung gegeben werden soll und begrenze dasselbe durch die Sectionslinien der Flächen, die der Zone, senkrecht zu welcher die Projection erfolgt, angehören. Alsdann übertrage man die Kanten der übrigen darzustellenden Flächen aus der QUENSTEDT'schen Projection in das soeben erwähnte zweite Axensystem nach dem Satze:

„Man findet die Lage der Combinationskante zweier Flächen, wenn man den Schnittpunkt ihrer Sectionslinien in der QUENSTEDT'schen Projection (angefertigt entweder auf das Klinopinakoid, oder auf die Horizontalebene) ermittelt und denselben mit dem Projectionsmittelpunkt verbindet."

II. Zeichnung der Zwillingskrystalle. *

Wir beschränken uns bei der Betrachtung derselben auf die Angabe der Construction des Axenkreuzes des zweiten Individuums, welches

* Das allgemeine Problem der Zwillingsberechnung wurde in diesem mehr für den Standpunkt des Anfängers berechneten Werke nicht erörtert; indessen kann man auch ohne dasselbe die in der Praxis wichtigste Aufgabe lösen, nämlich das specielle Gesetz eines Zwillings, d. h. seine Zwillingsaxe oder die dazu normale Fläche, den in den meisten Fällen 180° betragenden Umdrehungswinkel und die Zusammensetzungsfläche finden.

Zu diesem Behufe, speciell zur Bestimmung der auf der Zwillingsaxe senkrechten Fläche dienen ganz besonders die gemeinsamen Zonen der beiden Individuen zum Ausgangspunkt. Kann man deren zwei beobachten, so ist die von ihnen bestimmte Fläche die zur Zwillingsaxe senkrecht stehende. — Ist nur eine gemeinschaftliche Zone zu erkennen, so muss man den Umstand zu Hülfe nehmen, dass die auf der Zwillingsaxe senkrecht stehende Fläche den Winkel (oder seine Ergänzung) halbirt, den eine Fläche des Grundindividuums mit der ihr entsprechenden im Zwillingsindividuum bildet. — Sind keine gemeinschaftlichen Zonen zu beobachten, so kann man die Position der Zwillingsaxe oder der auf ihr senkrechten Fläche gegen die Axen, d. h. Kanten des einen Individuums, durch Anwendung sphärischer Trigonometrie finden. Sehr empfehlenswerth und in eleganter Weise die Verwendbarkeit der QUENSTEDT'schen Projectionsmethode zeigend, ist auch ein Verfahren, das H. Prof. WEBSKY in POGG. Ann. B. CXVIII. p. 240—255 angegeben hat.

Ausser dieser Darstellung möchte dem Weiterstrebenden das Studium der Werke von V. VON LANG, MILLER (Treatise on Crystallography 1839), NAUMANN, REUSCH (POGG. Ann. CXLVII. p. 569—589) und ganz besonders SCHRAUF zu empfehlen sein, welch' letzterem wir die allgemeinste Behandlung des Problems verdanken.

gegen das erste in einer um die Zwillingsaxe durch 180° gedrehten Stellung sich befindet. Wir gehen dabei von einem rechtwinkeligen Axensystem aus, da wir früher gesehen haben, dass auf Grund eines solchen immer das gewünschte schiefaxige System erhalten werden kann. Die auf der Zwillingsaxe normale Fläche lassen wir die drei Axen des ersten Individuums, welches die Normallage beibehält, in endlichen, aber unter sich verschiedenen Abständen schneiden; es ist besagte Fläche somit eine Pyramidenfläche. Die Construction aber, welche zur Darstellung des Axenkreuzes des zweiten, in Zwillingsstellung befindlichen Individuums erforderlich ist, wenn von den drei Axenschnitten einer oder zwei unendlich werden, versteht sich alsdann von selbst.

Gegeben sei ein dreizähliges, rechtwinkeliges Axensystem, Tafel XII., Fig. 7. In demselben stellen MA, MB, MC die Längen und Richtungen der drei Halbaxen der Grundform vor und MX, MY, MZ repräsentiren die Axenabschnitte der auf der Zwillingsaxe normalen Fläche. Es ist alsdann die erste Aufgabe, die Centronormale zu dieser letzteren Fläche, d. h. die Richtung der Zwillingsaxe selbst zu finden. *

Man ziehe in der Axenebene AC aus X, parallel der Linie AC, die Gerade XZ″, ferner aus Z, gleichfalls parallel AC, die Gerade X″Z, vollende das Parallelogramm VX″MZ″ und construire dessen Diagonale VM, so wird dieselbe die Linie XZ in dem Punkte R schneiden. Auf entsprechende Weise findet man in der Axenebene BC den Punkt S und in der Axenebene AB den Punkt T. (Letzterer ist mitsammt der Construction in Fig. 7 weggelassen, da R und S zur Herleitung genügen. T ist indessen zur Controle verwendbar.)

Verbindet man R mit Y, S mit X (und, wenn dargestellt, T mit Z), so bestimmt sich aus dem Durchschnitt dieser Linien, der Höhenlinien des Dreiecks XYZ, ein Punkt N, welcher, mit M verbunden, die gesuchte Projection der Normale aus M auf die Fläche XYZ ist.

Verlängert man nun, Tafel XII., Fig. 8, MN über N bis M′, macht NM′ = MN, verbindet sodann M′ mit X, Y und Z, so sind M′X, M′Y und M′Z die Richtungen der drei Axen des in Zwillingsstellung befindlichen Krystalls und stellen in ihren Längen die Axenabschnitte der zur Zwillingsaxe senkrechten Fläche XYZ, die also beiden Individuen gemeinsam ist, dar. Um schliesslich noch die Axenabschnitte der in Zwillingsstellung befindlichen Grundform des zweiten

* Vergl. V. von Lang, Krystallographie 1866 p. 285 und 286.

Individuums der Länge nach zu finden, ziehe man durch A, B, C, parallel MNM', gerade Linien, und verlängere dieselben so weit, bis sie die Axen des zweiten Krystalls schneiden. Es werden alsdann M'A', M'B', M'C' die gewünschten Längen sein.

Mit Hülfe dieses Axenkreuzes zeichnet man das in Zwillingsstellung befindliche Individuum entweder vollständig, wenn ein Penetrationszwilling zweier vollständigen Individuen dargestellt werden soll, oder theilweise, wenn ein Contactzwilling zu construiren ist und bringt es alsdann durch Parallelverschiebung in die gewünschte Lage gegenüber dem ersten Individuum, welches seinerseits die entsprechende Ausbildung in der Normallage besitzt.

Berichtigungen.

Seite	4	Zeile	9 v. o.	lies: „cos c“	statt: „cos a“.
„	7	„	5 v. u.	lies: „vorn“	statt: „von“.
„	8	„	2 v. o.	lies: „demselben“	statt: „denselben“.
„	8	„	8 v. u.	lies: „Man“	statt: „Mann“.
„	10	„	1 v. o.	lies: „bb, (a—a,)“	statt: „bb, (a—a)“.
„	18	„	6 v. u.	lies: „Parallelepipedons“	statt: „Parallelopipedons“.
„	21	„	19 v. u.	lies: „$\nu,^2a^2$“	statt: „ν, a^2“.
„	21	„	22 v. u.	lies: „XXIII^a“	statt: „XXII^a“.
„	21	„	23 v. u.	lies: „XXII^c“	statt: „XXII^a“.
„	30	„	17 v. o.	lies: „zusammenfallen“	statt: „znsammenfallen“.
„	44	„	7 v. o.	lies: „Sectionslinienformel“	statt: „Sectionsformel“.
„	64	„	1 u. 4 v. u.	lies: „Darmsaite“	statt „Darmseite“.
„	147	„	16 v. u.	lies: „9,8064326 — 10“	statt: „9,8064326“.
„	166	„	5 v. o.	lies: „Fläche“	statt: „Fläch“.
„	177	„	6 v. o.	lies: „0,2497194“	statt: „9,2497194“.
„	200	„	15 v. u.	lies: „9,8591341 — 10“	statt: „9,8591341“.
„	208	„	7 v. o.	lies: „0,2984773“	statt: „0,2984773 — 10“.
„	230	„	15 v. o.	lies: „C = 90°“	statt „c = 90°“.
„	264	„	20 v. o.	lies: „9,8962937 — 10“	statt: „8,8962937 — 10“.

Klein, Krystallberechnung.

Fig. 1.

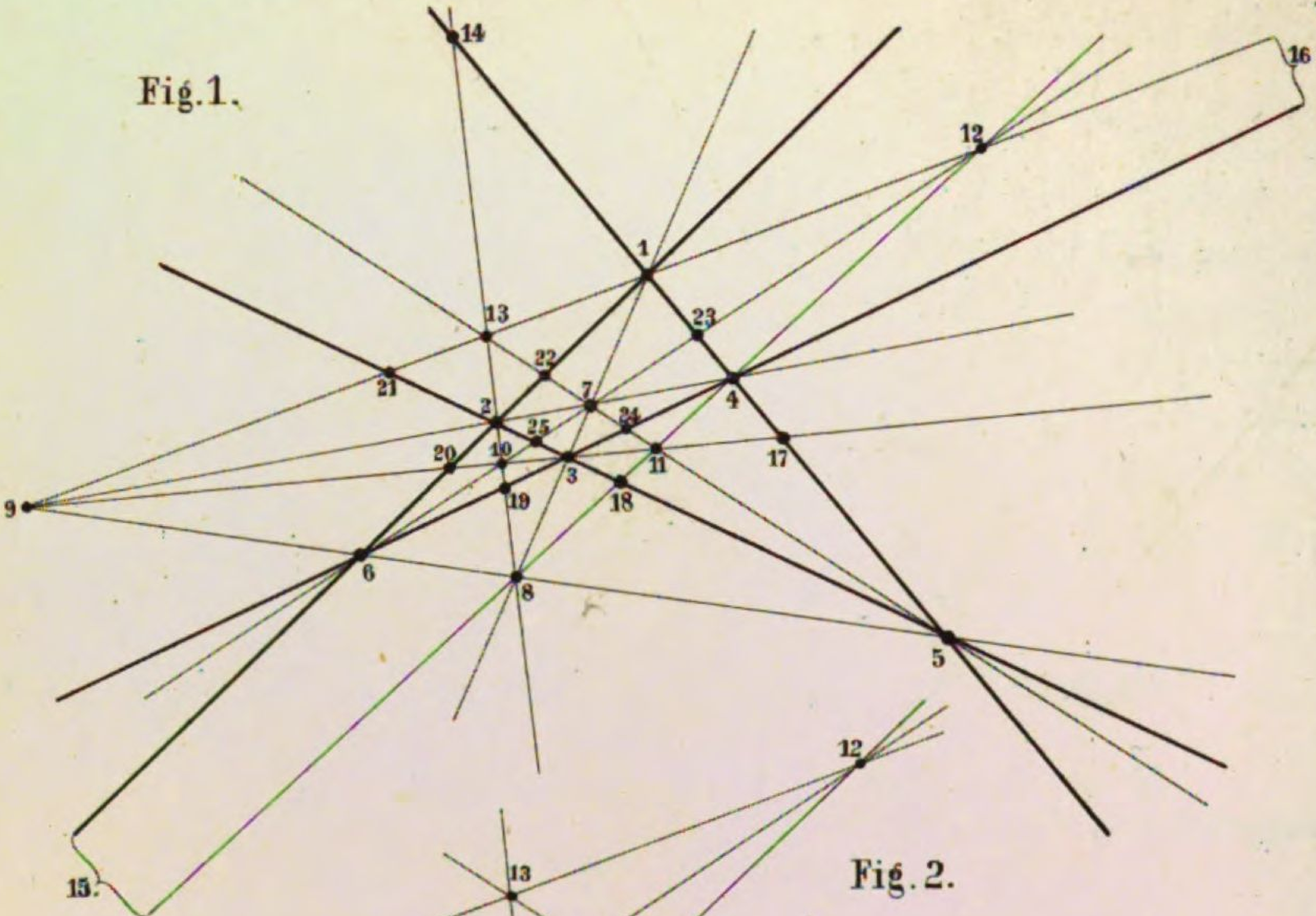


Fig. 2.

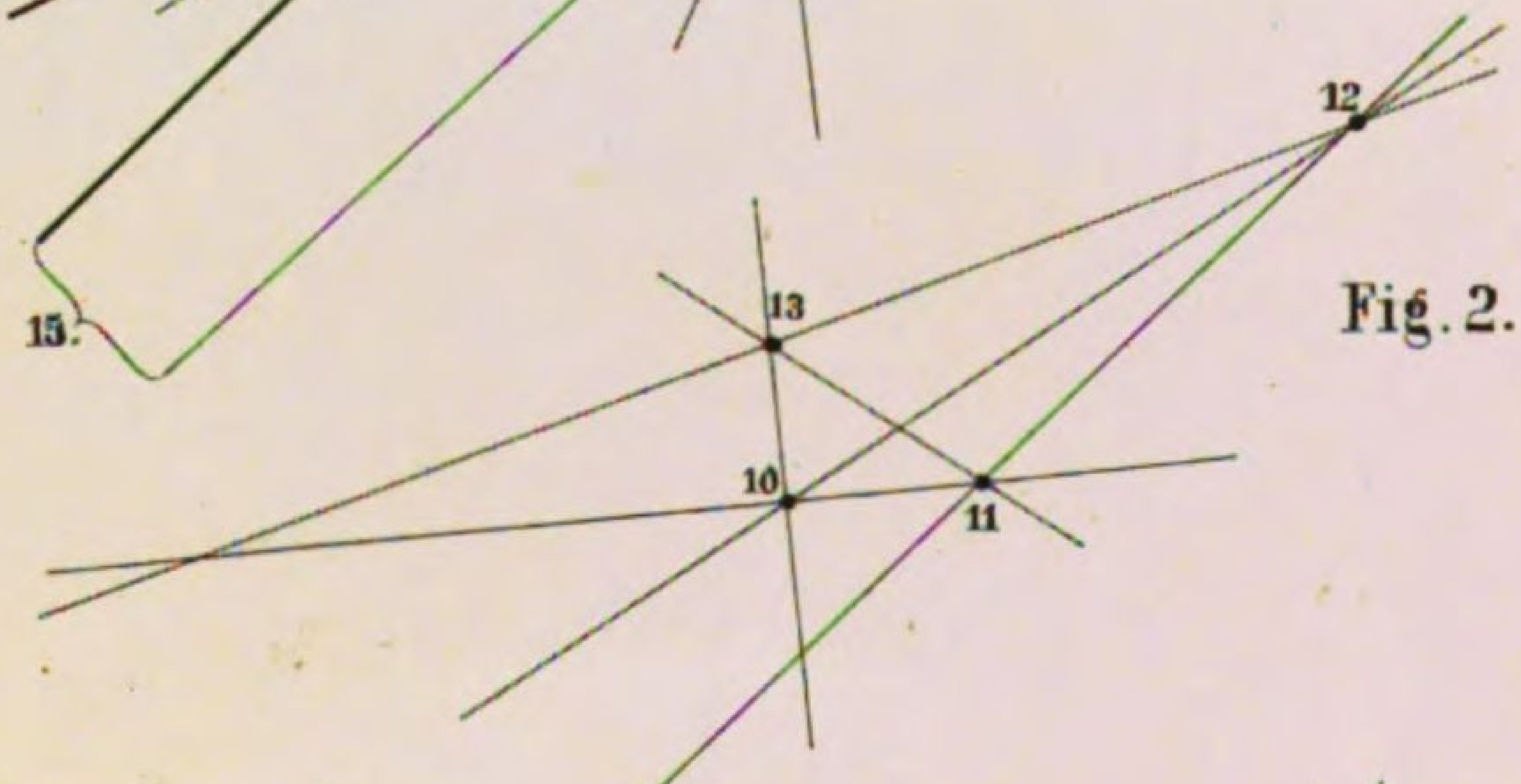
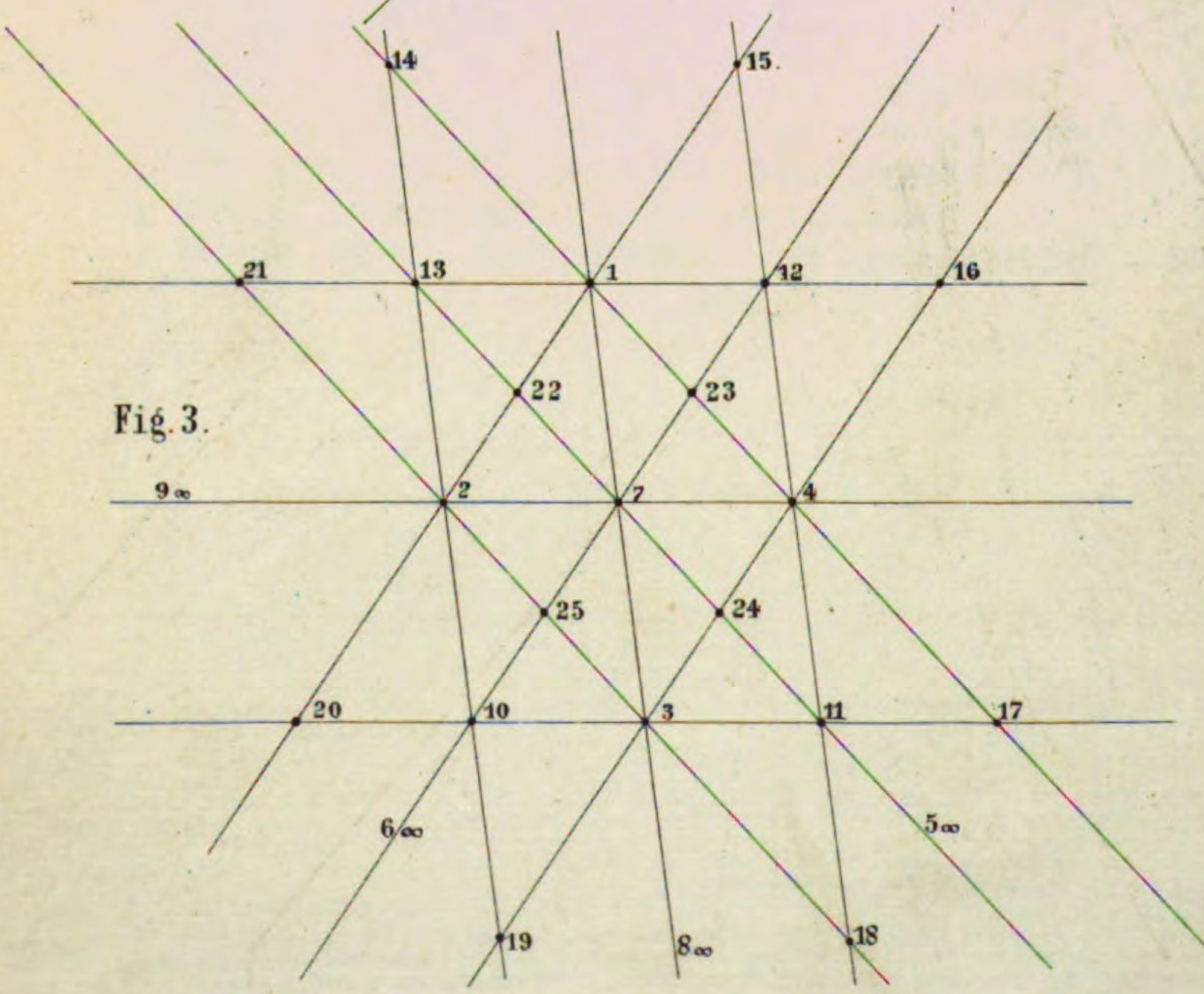
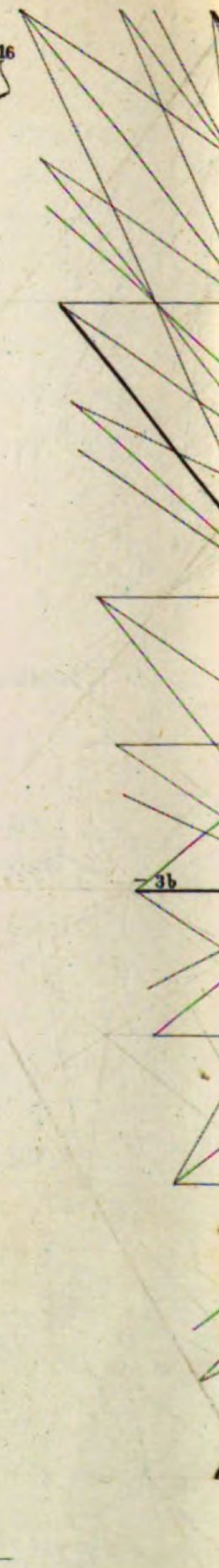


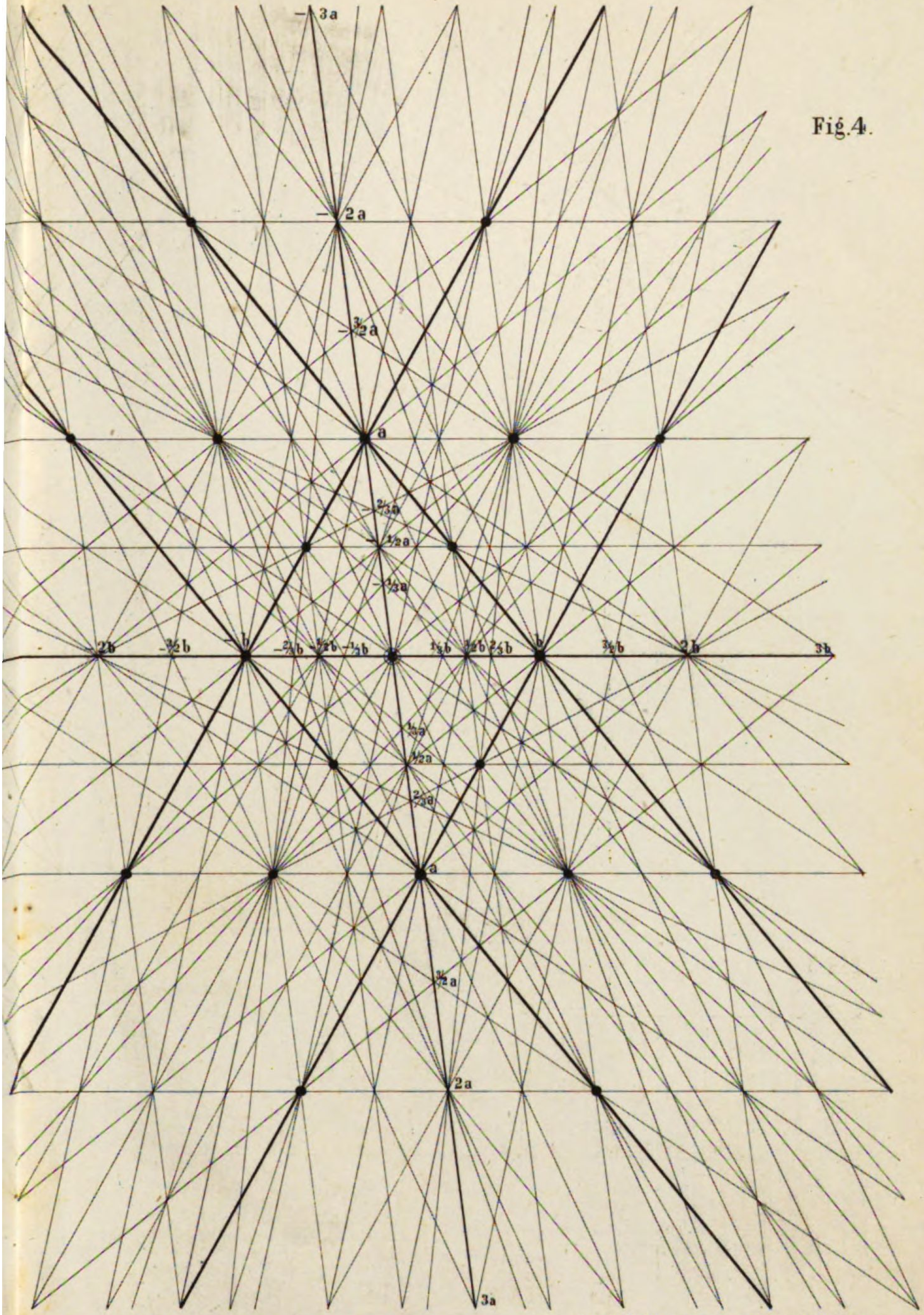
Fig. 3.





Taf. I.

Fig. 4.



Lit. G. Ebenhueen; vorm. W. C. Baisch, Stuttgart.

Fig. 1.

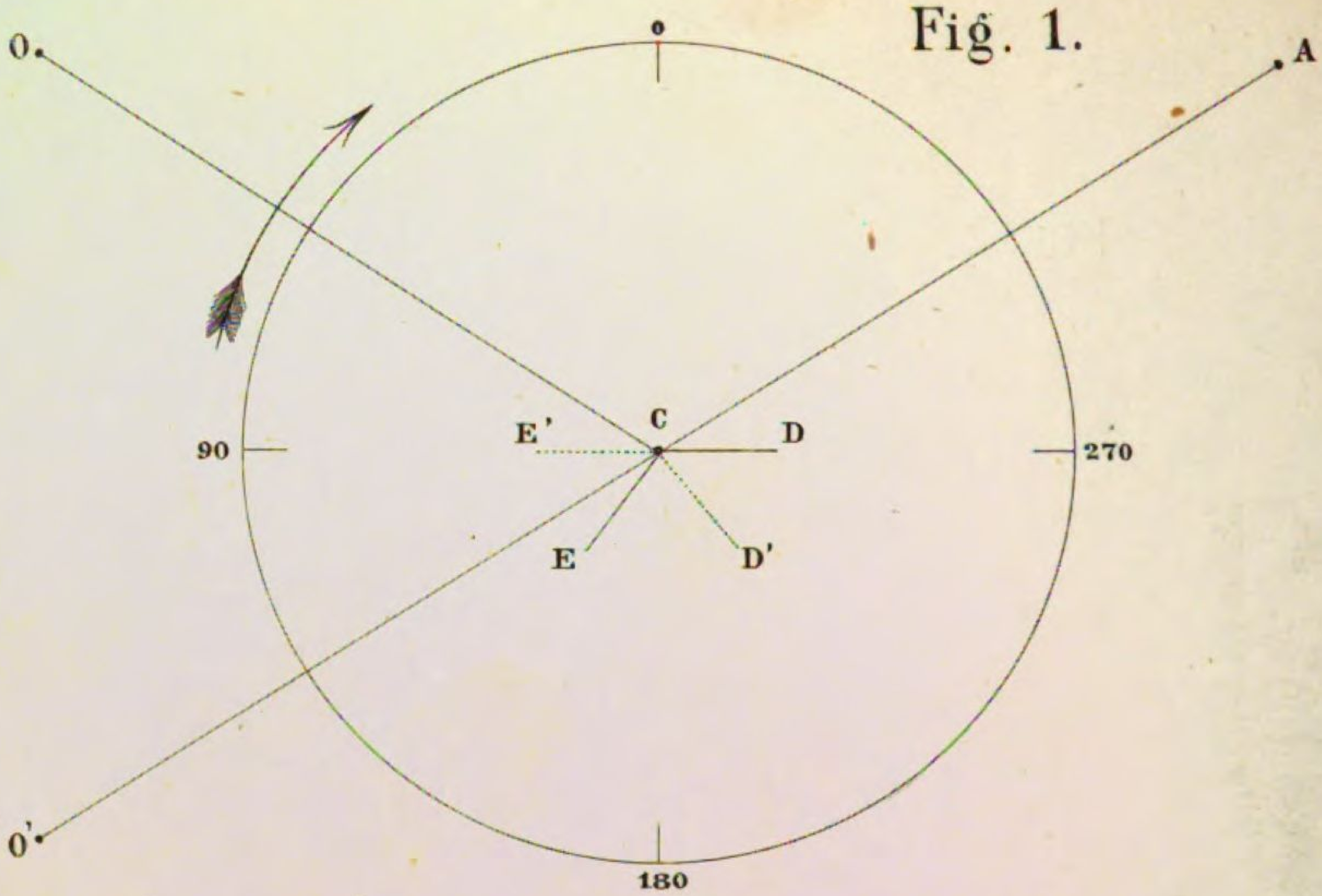


Fig. 3.

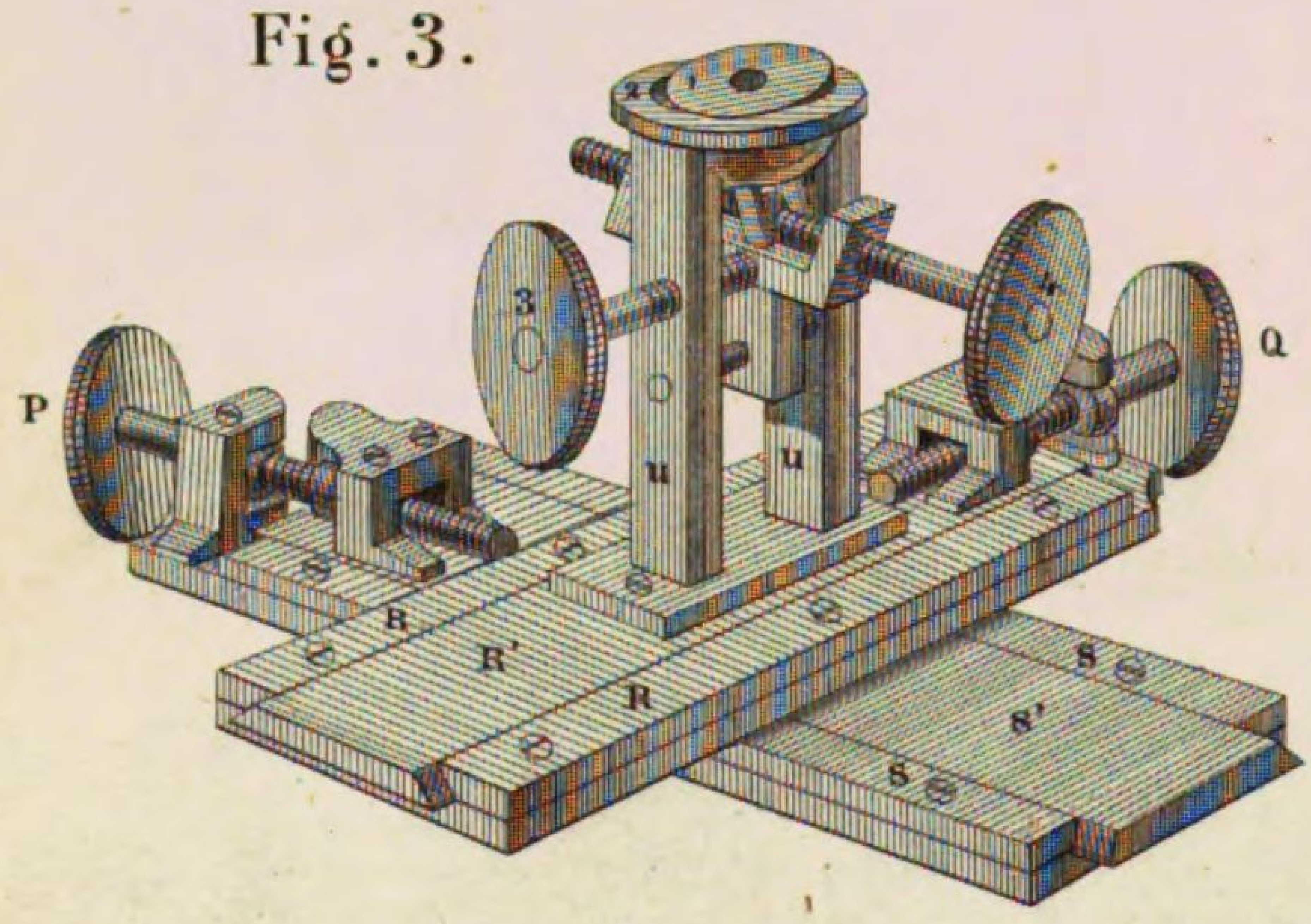
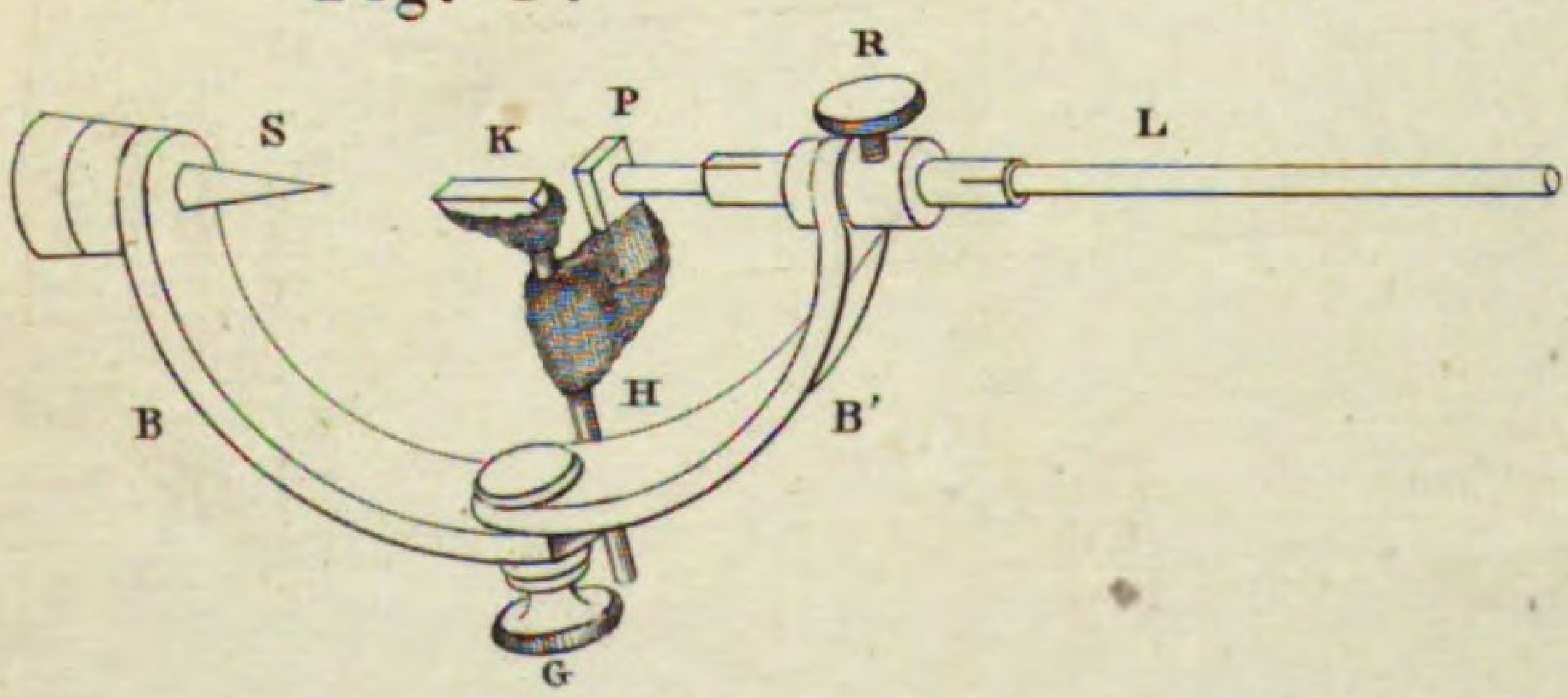
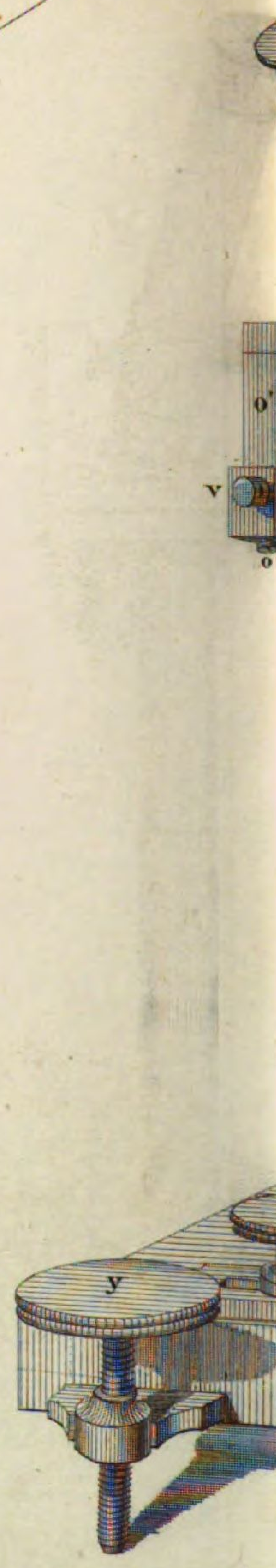


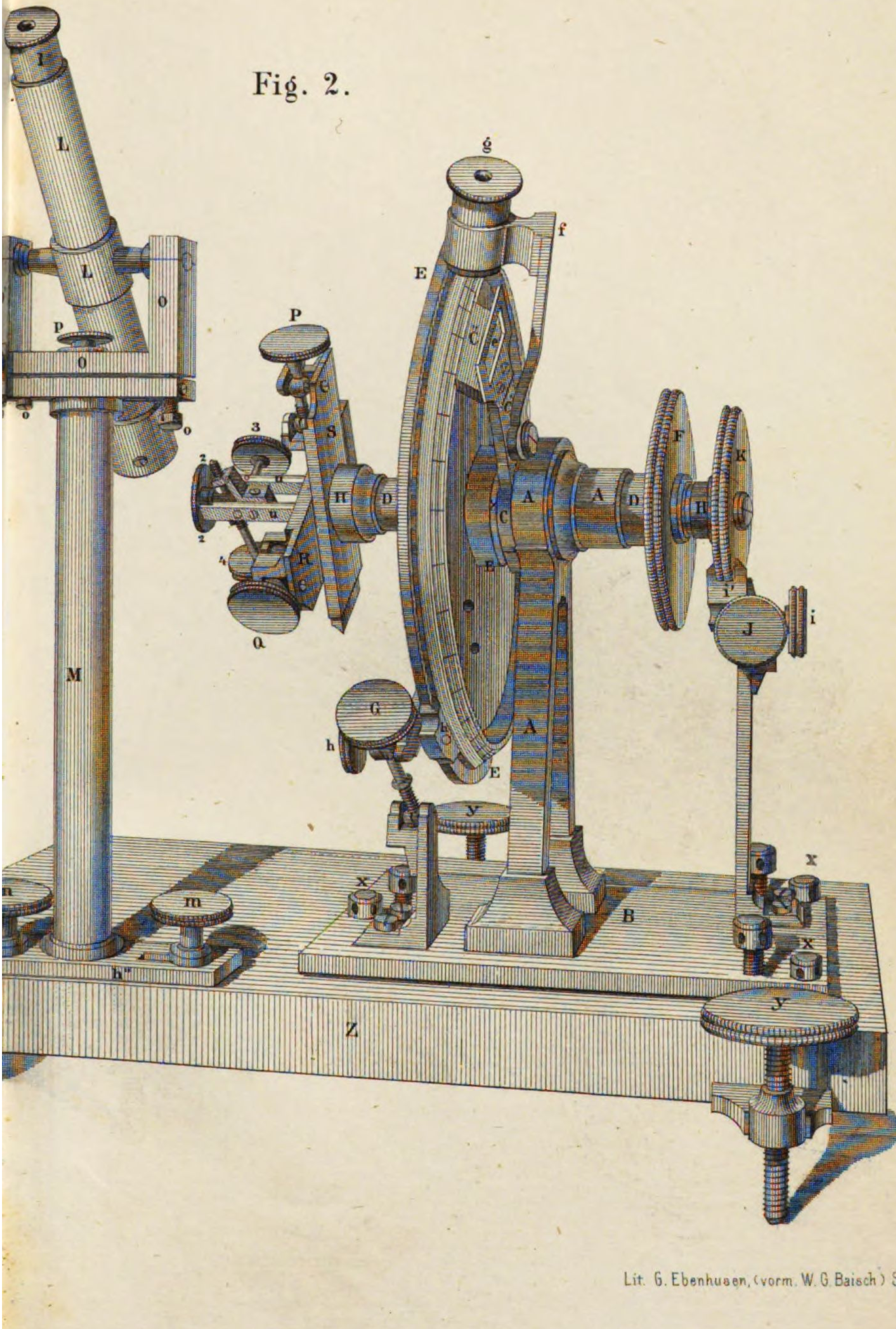
Fig. 4.





Taf. II.

Fig. 2.



Lit. G. Ebenhusen, (vorm. W. G. Baisch) Stuttgart.

Fig. 1.

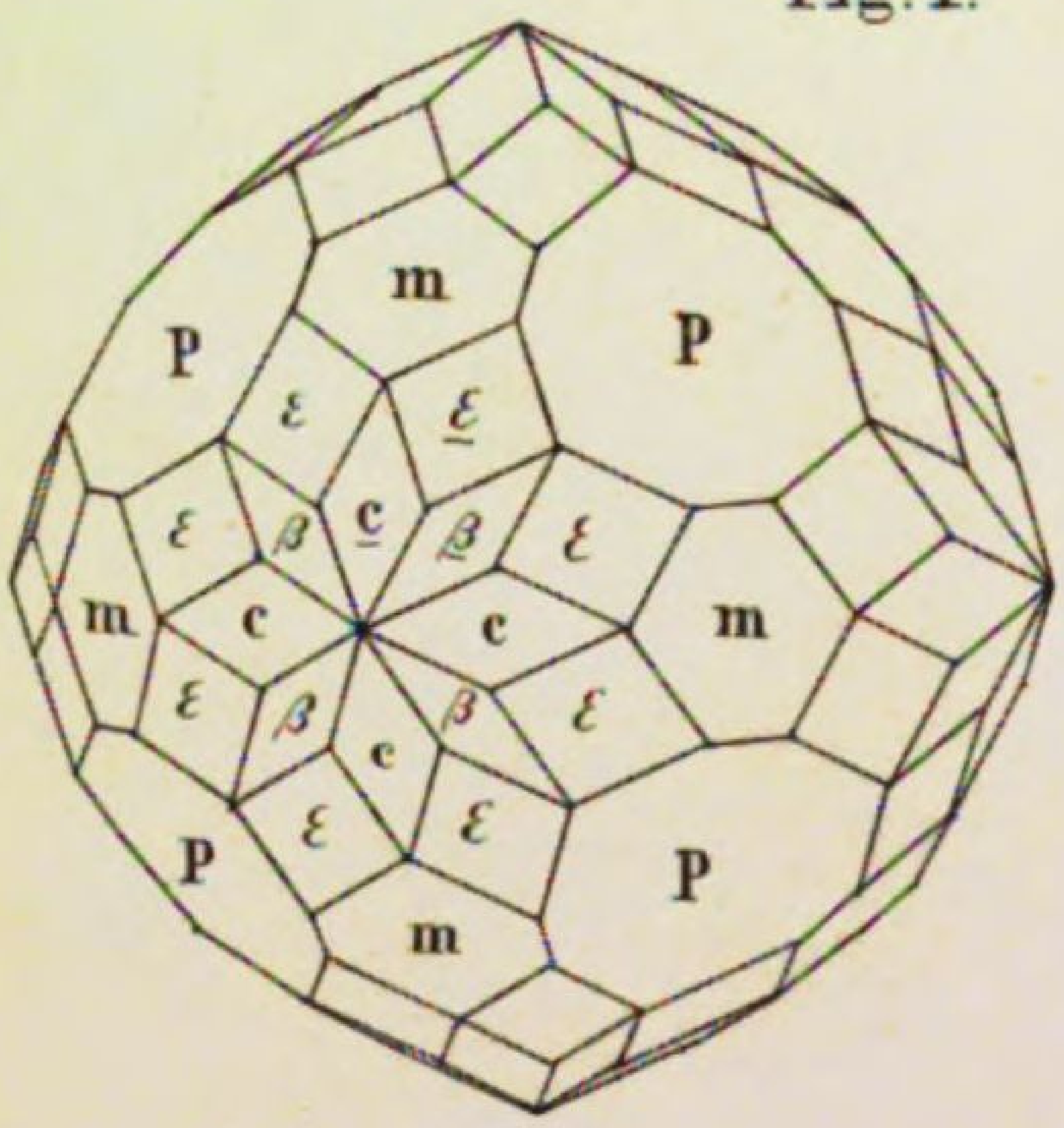


Fig. 2.

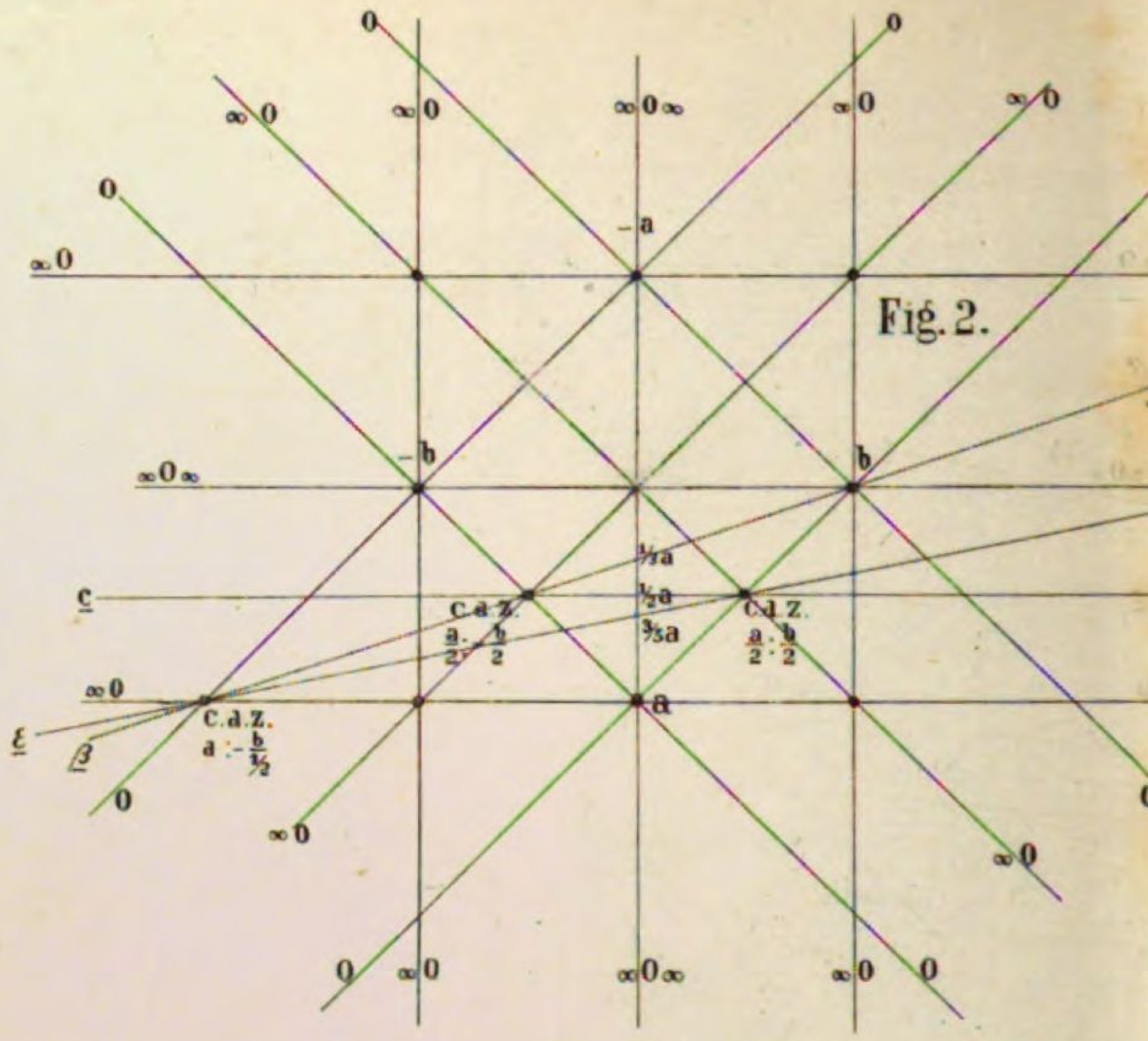


Fig. 4.

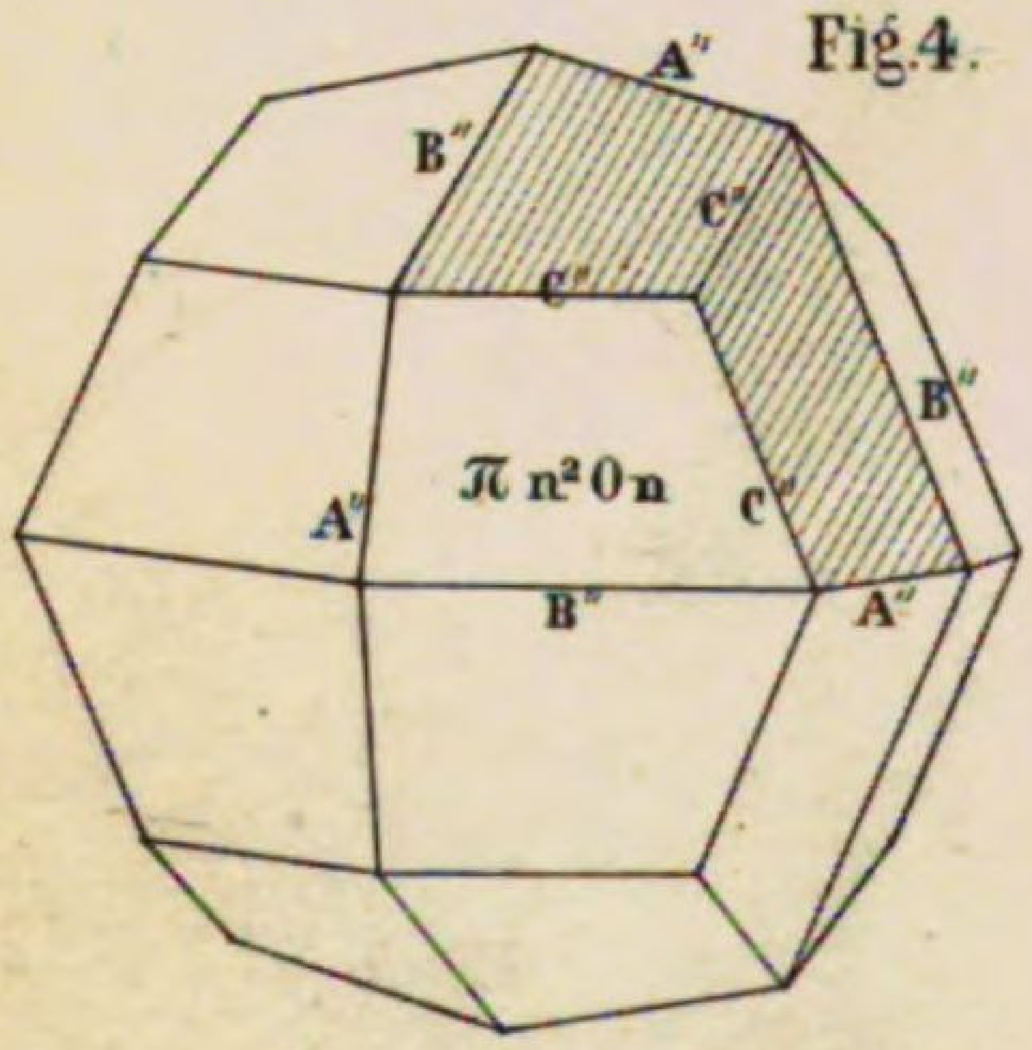


Fig. 5.

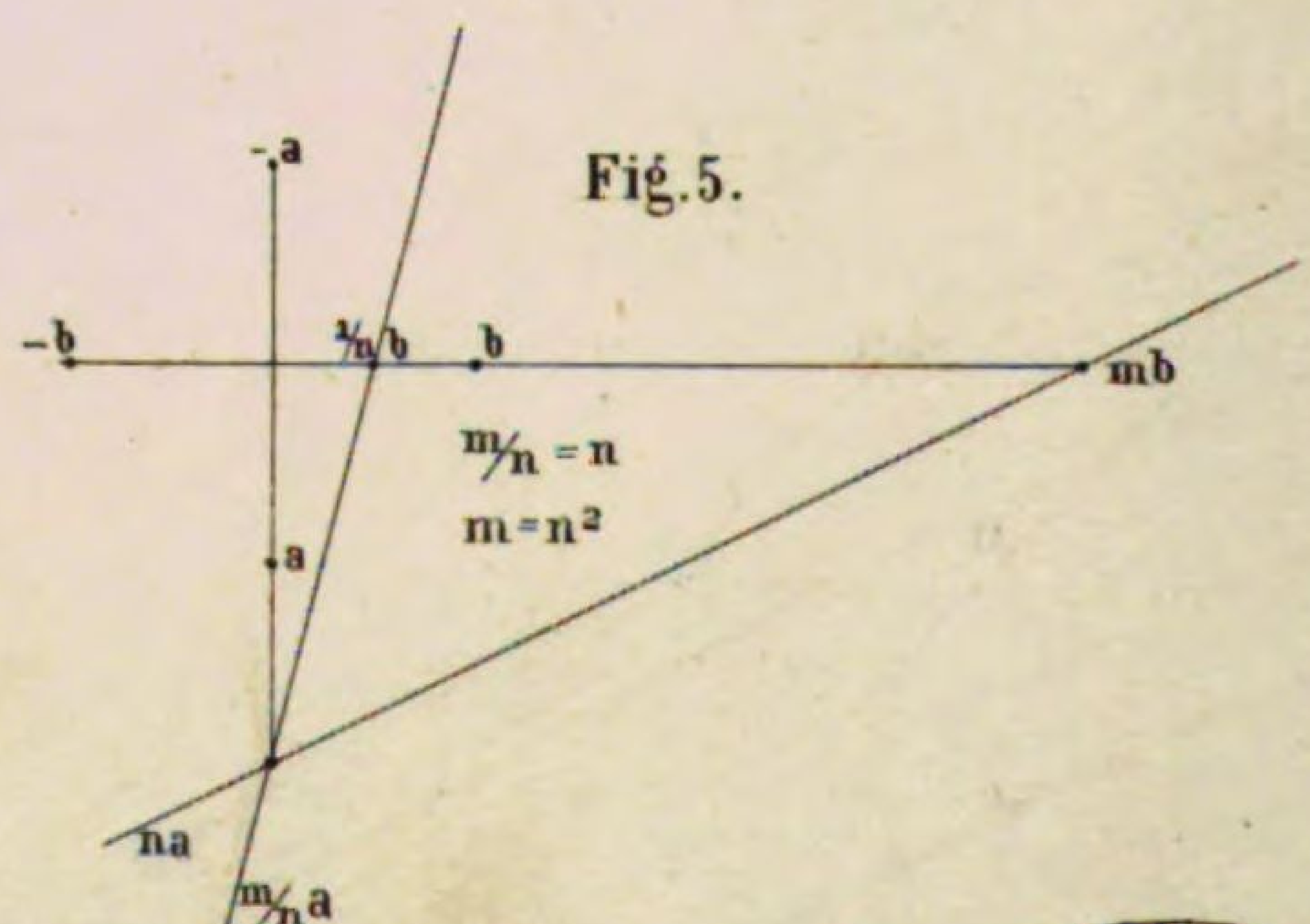


Fig. 6

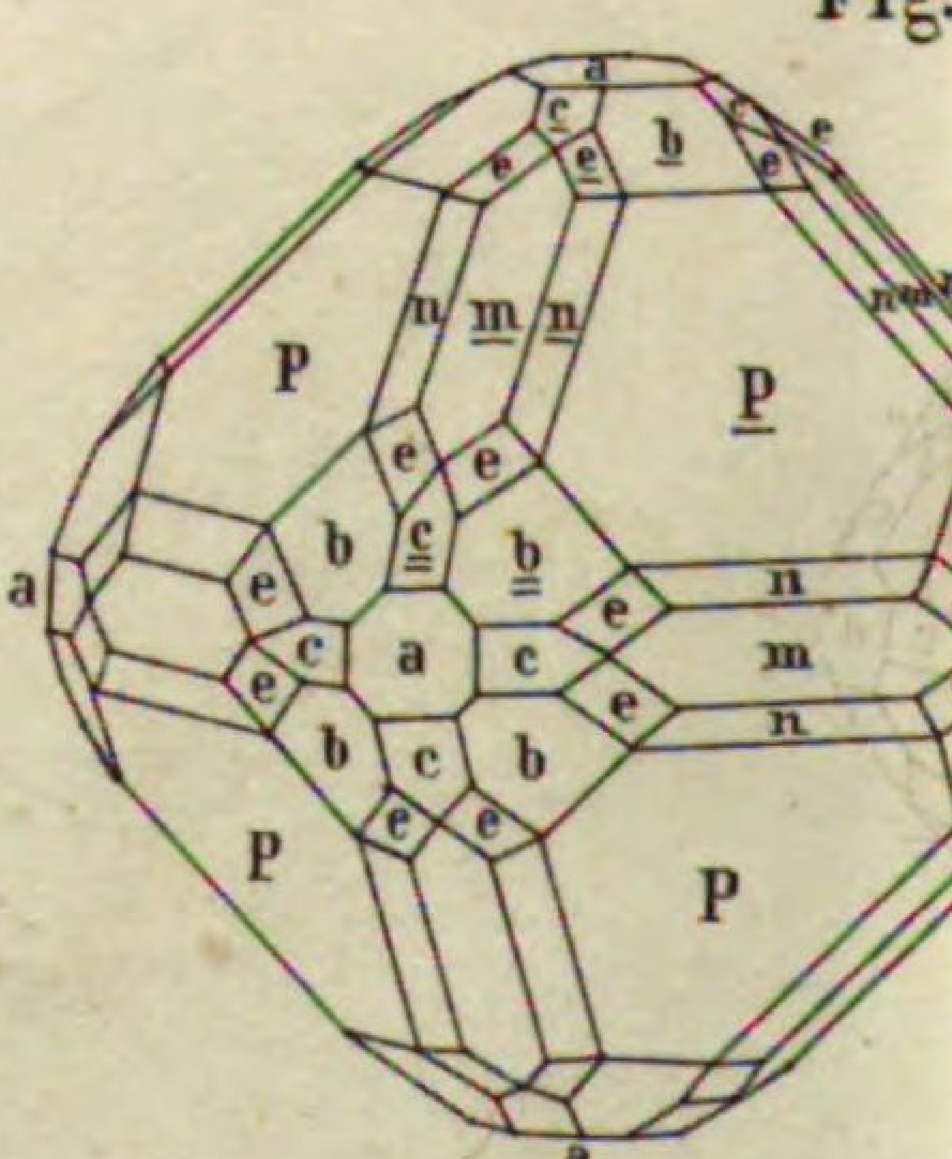


Fig. 8.

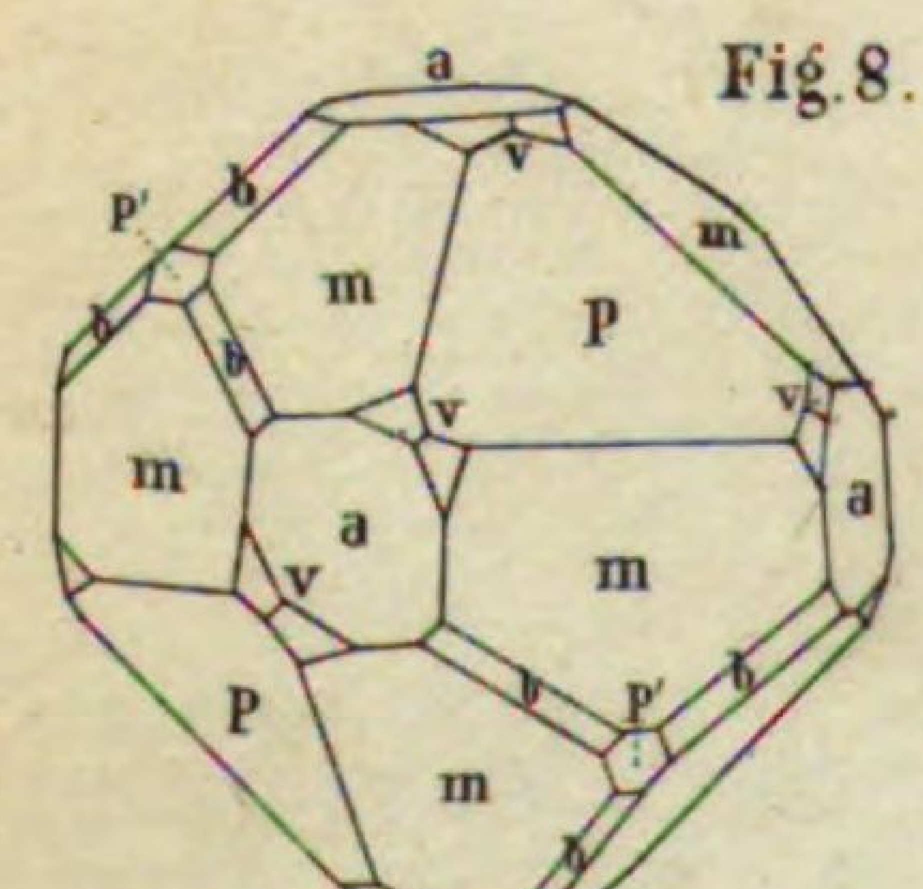
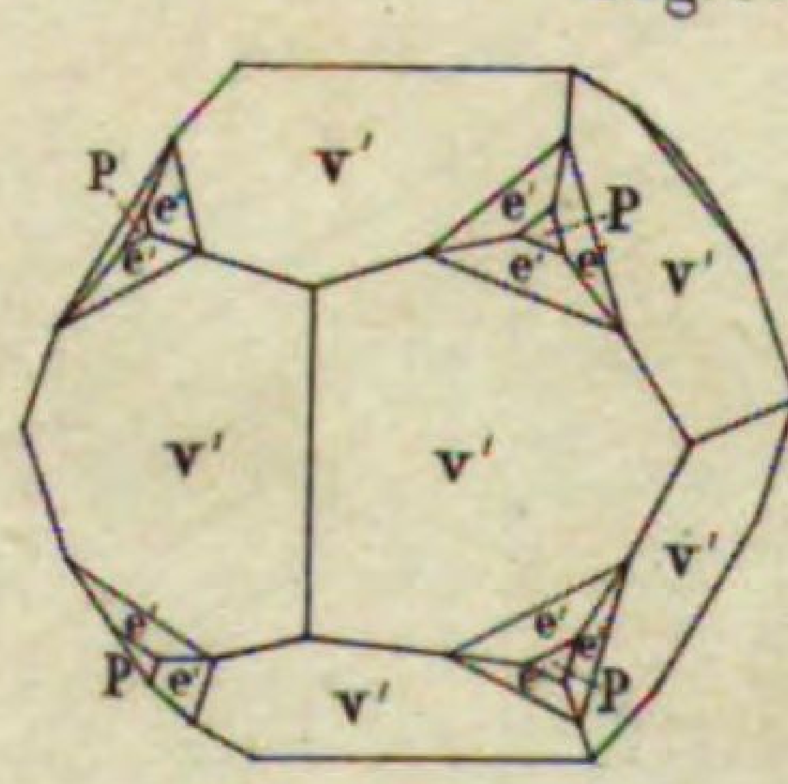


Fig. 9.



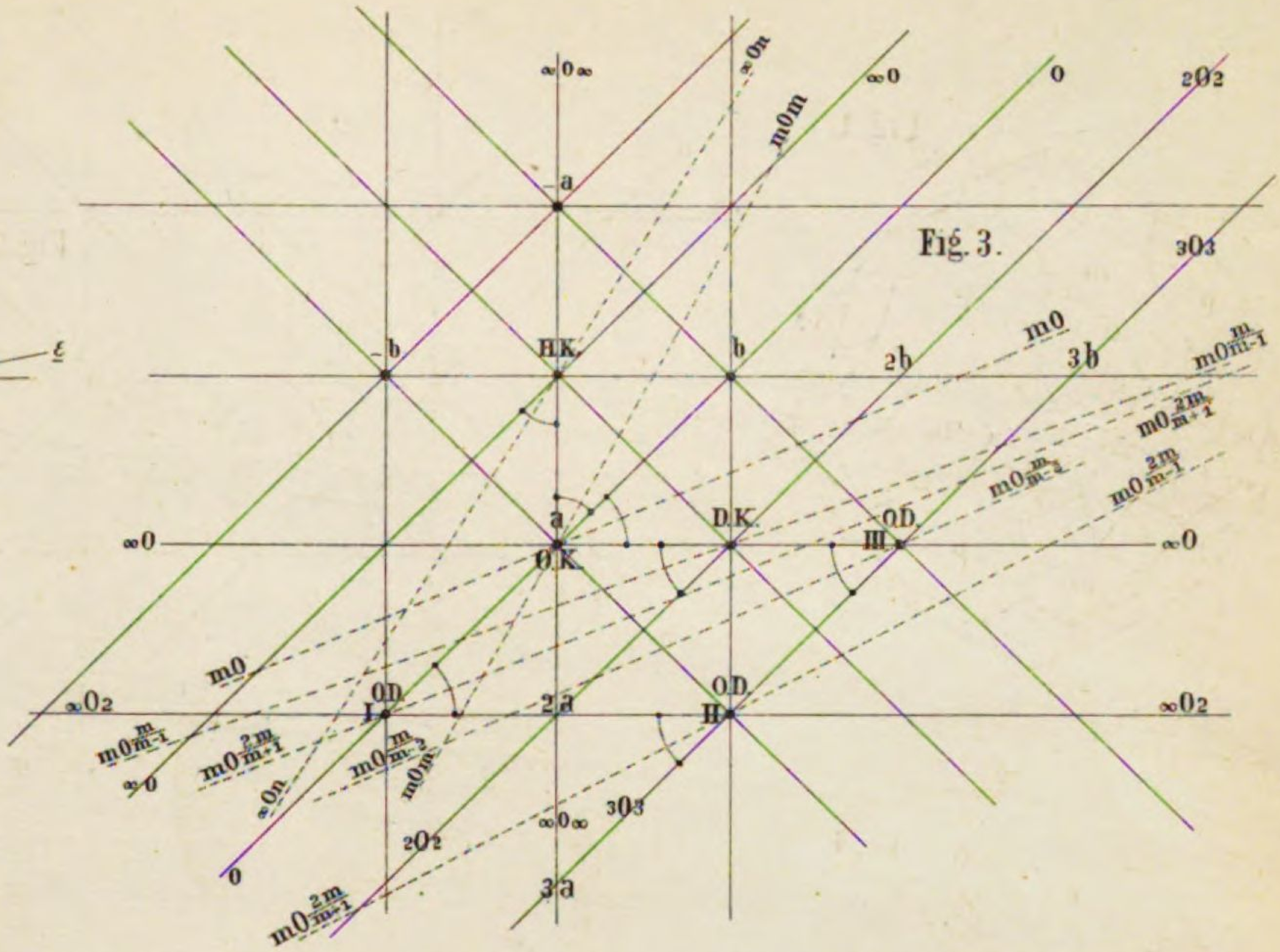


Fig. 3.

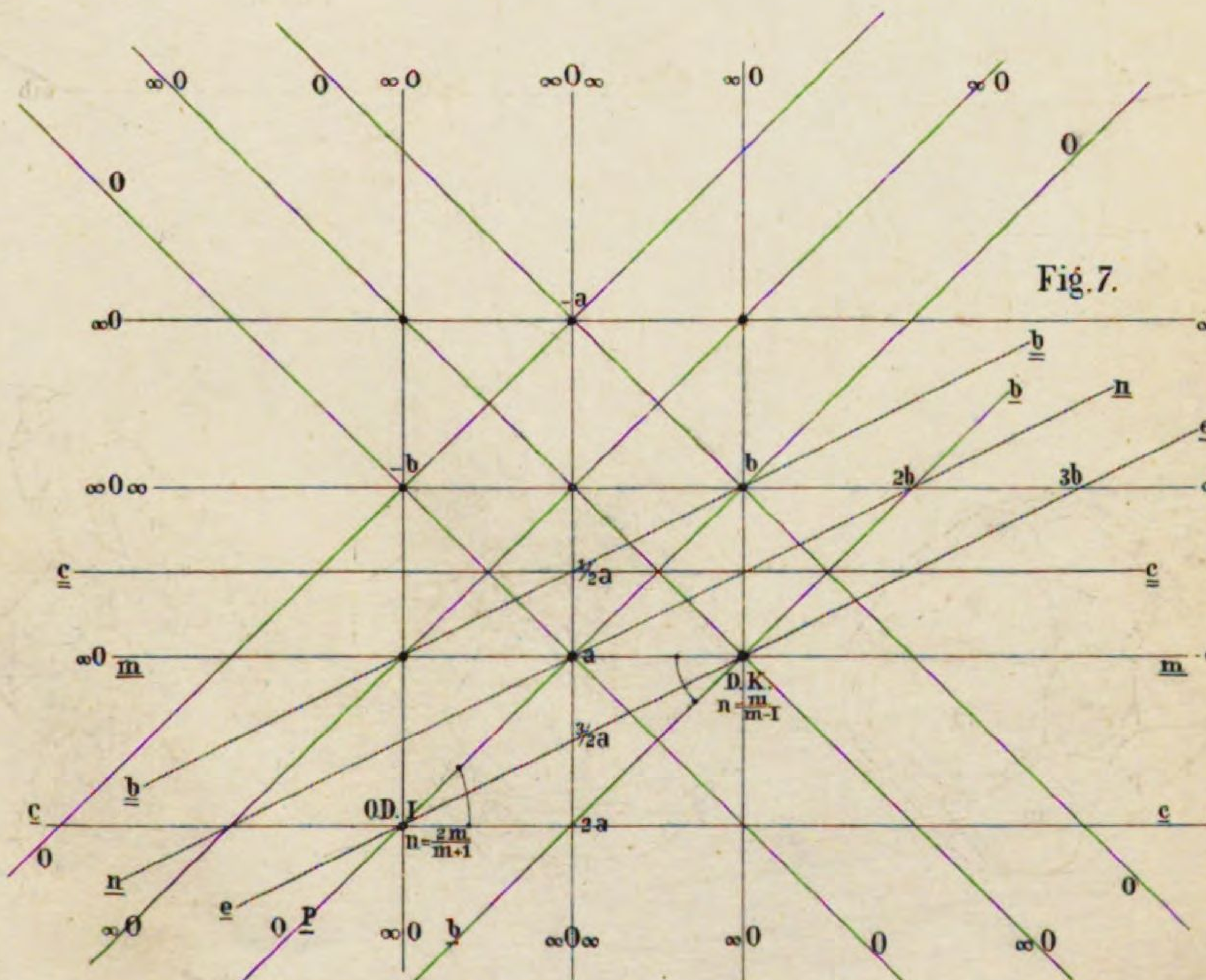


Fig. 7.

Lit. G. Ebenhusen, vorm. W.G. Baisch, Stuttgart.

Fig. 1.

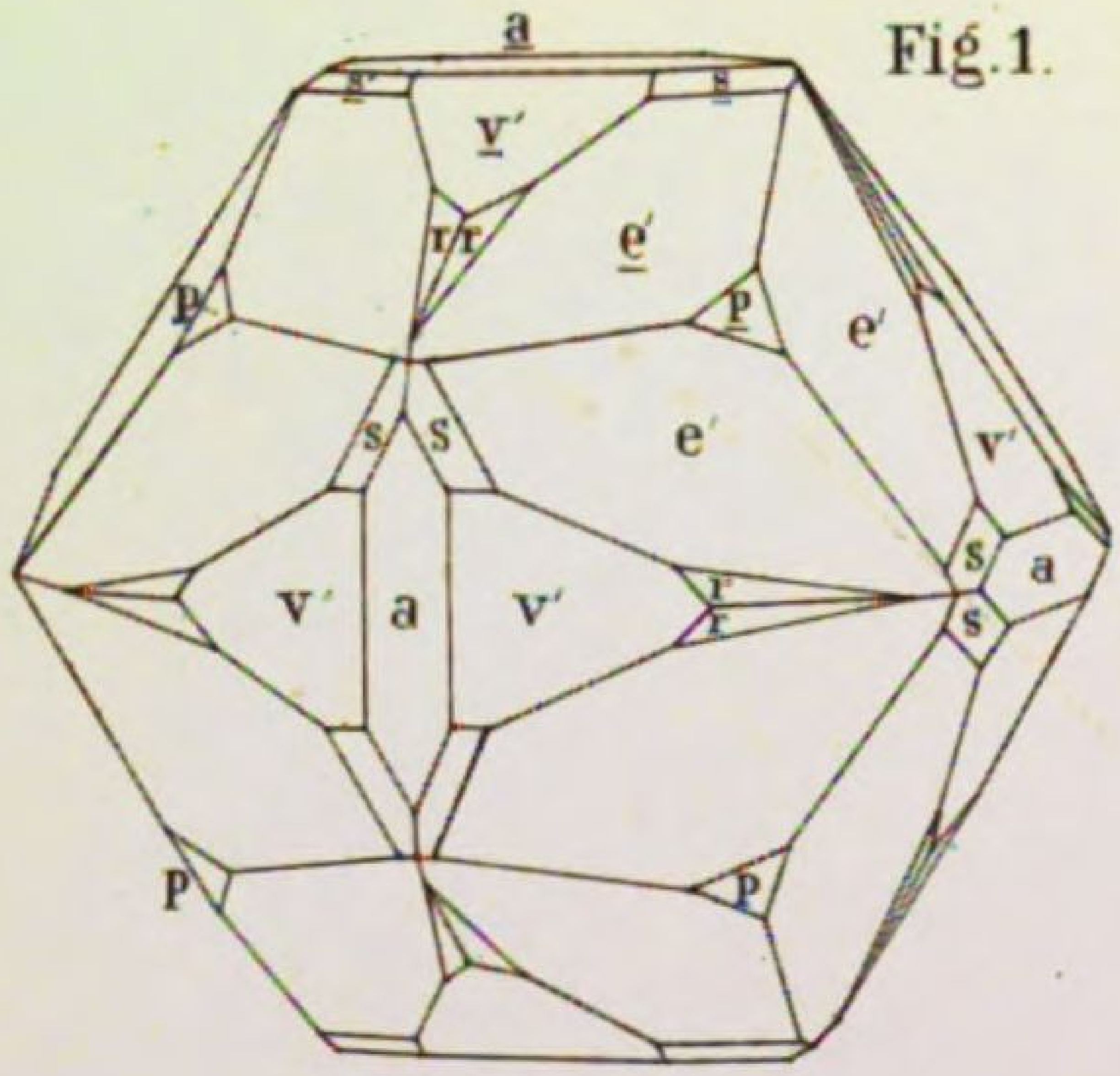


Fig. 3.

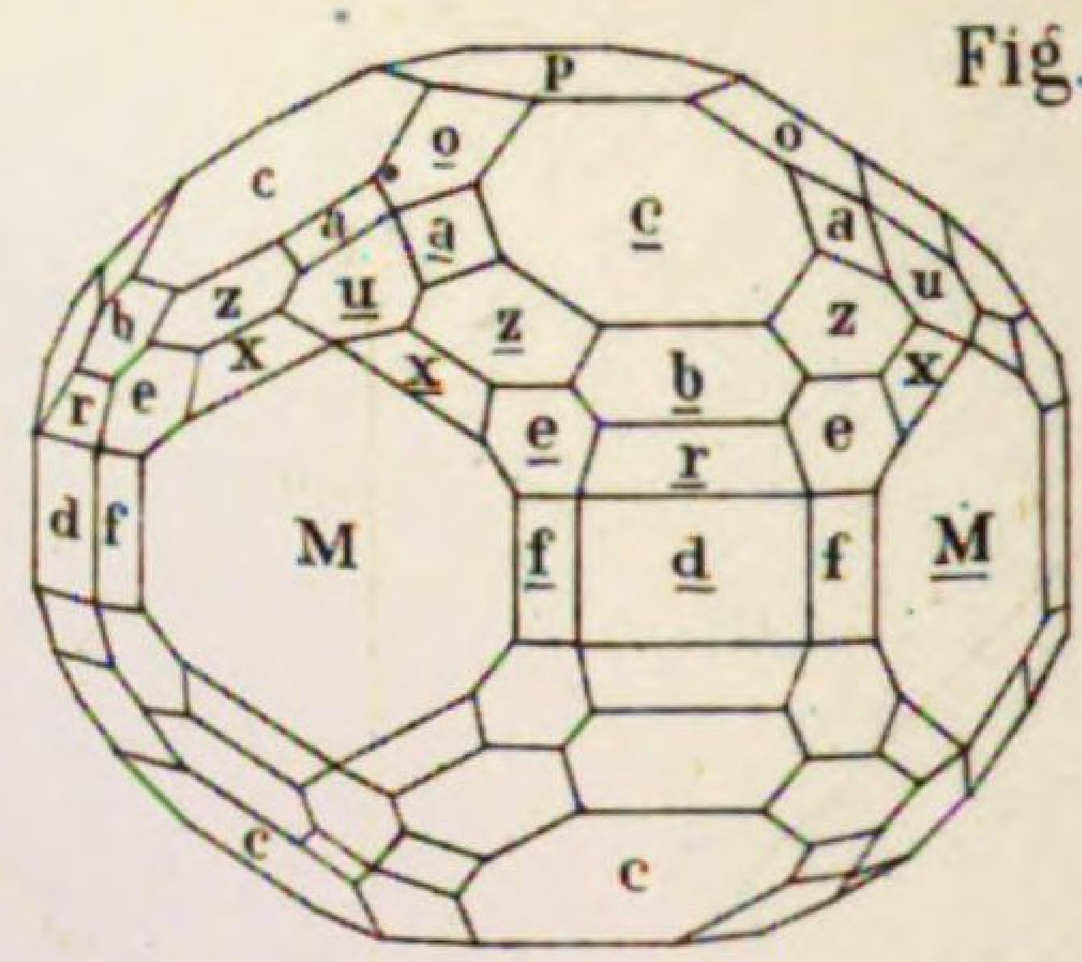
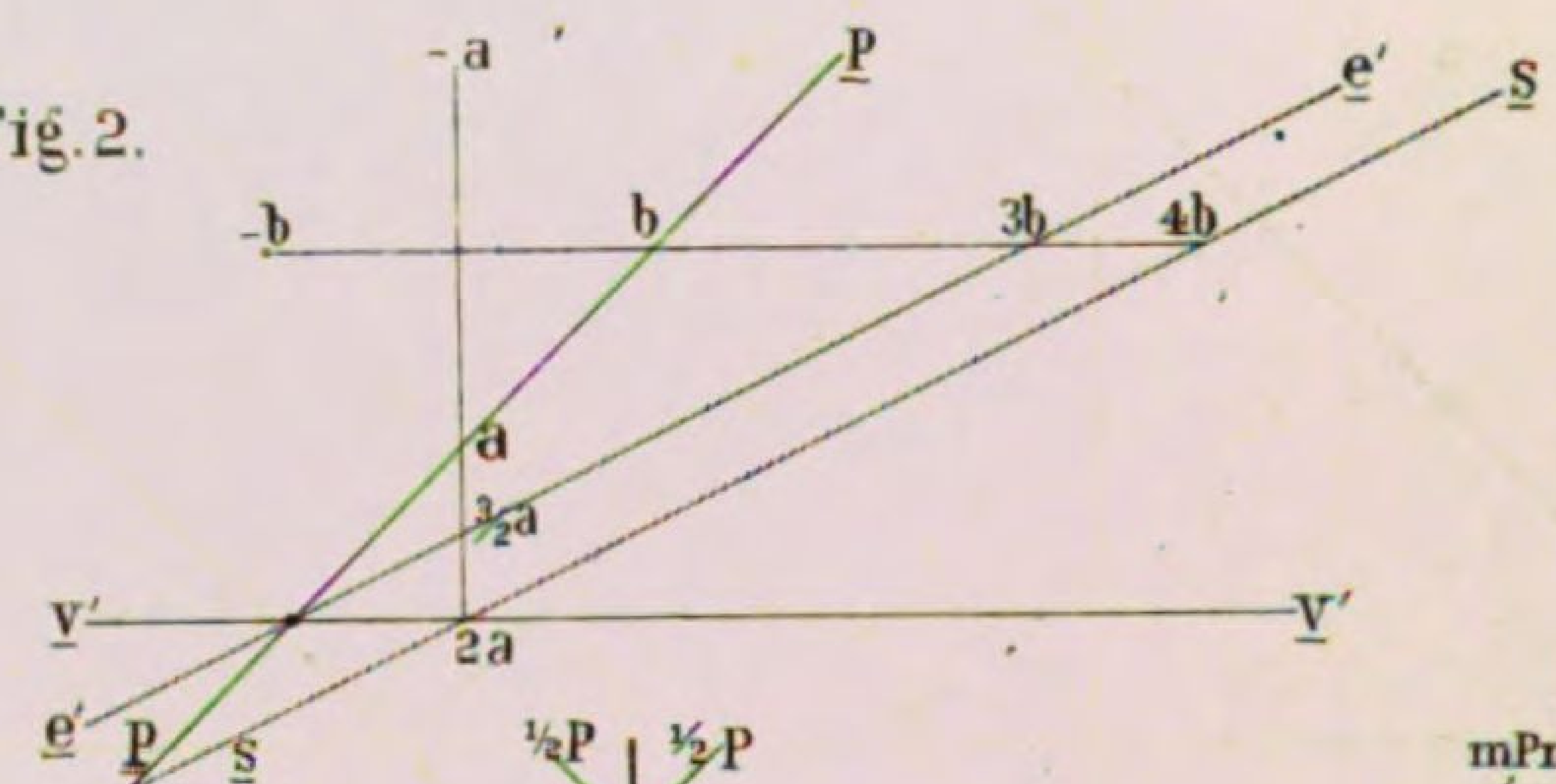


Fig. 2.



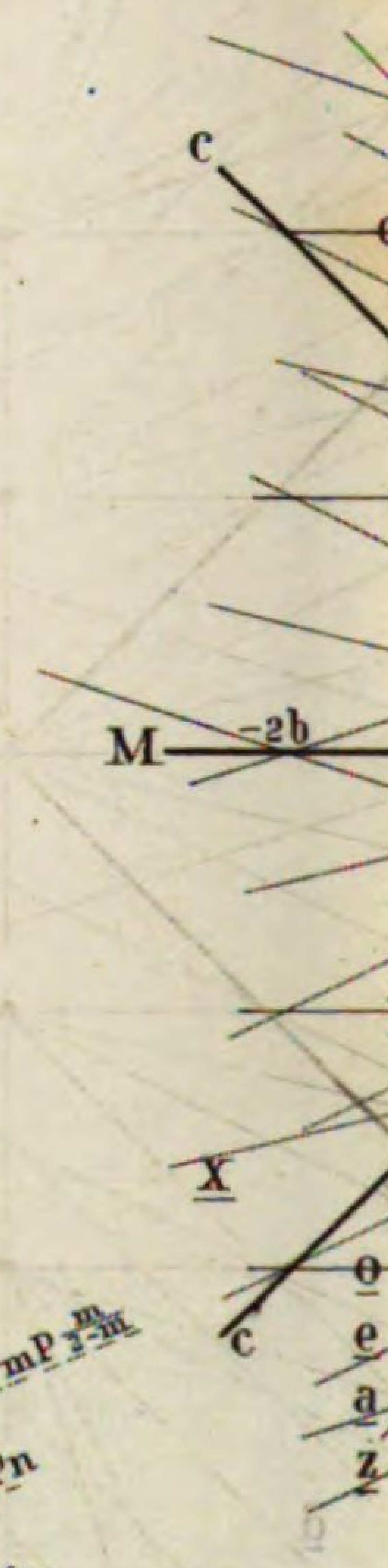


Fig. 5.

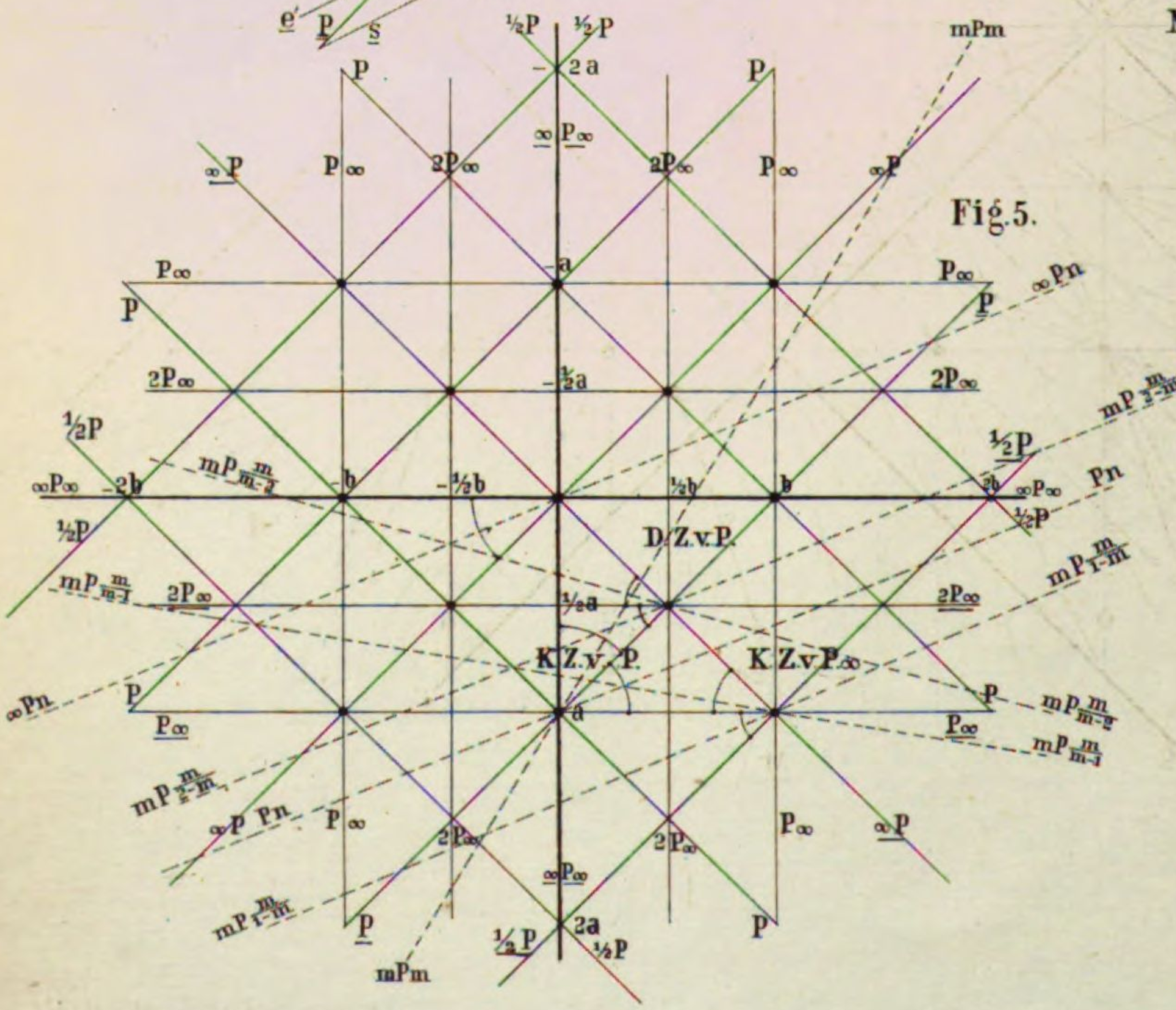
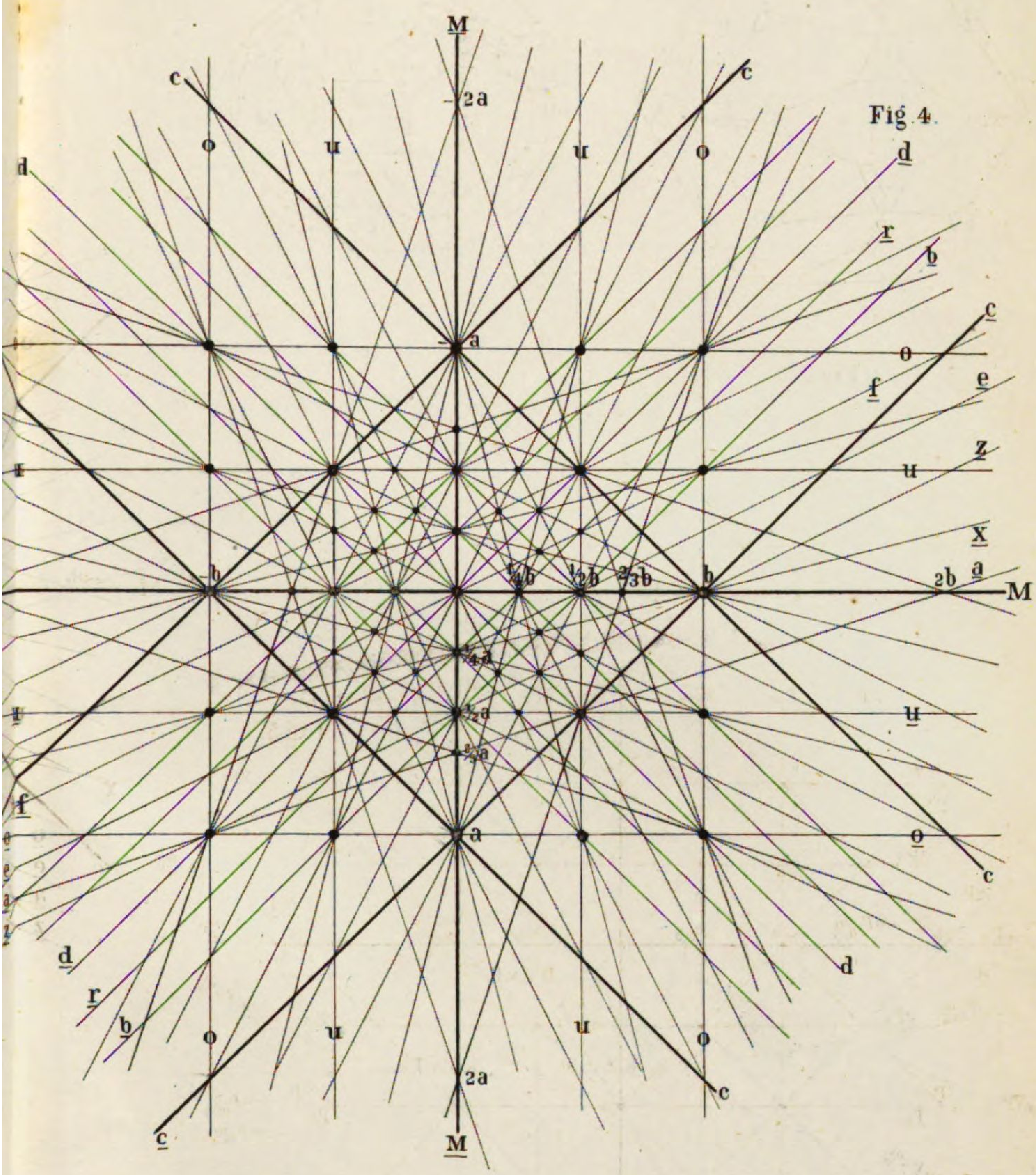


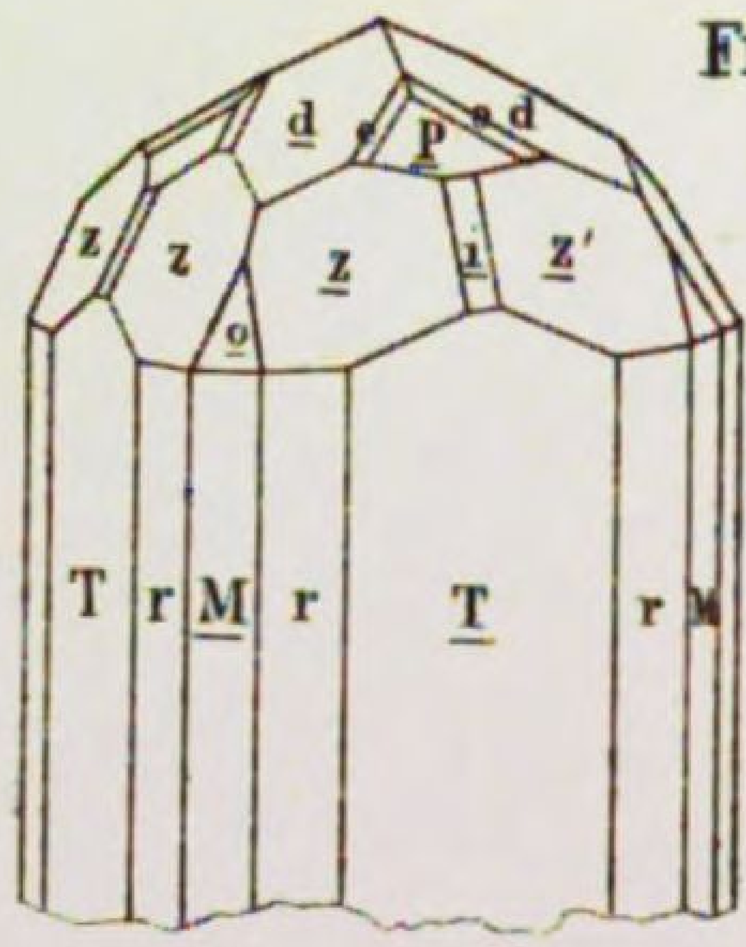
Fig. 4.



Lit. G. Ebenhusen, vorm. W. C. Baisch, Stuttgart.



Fig. 1.



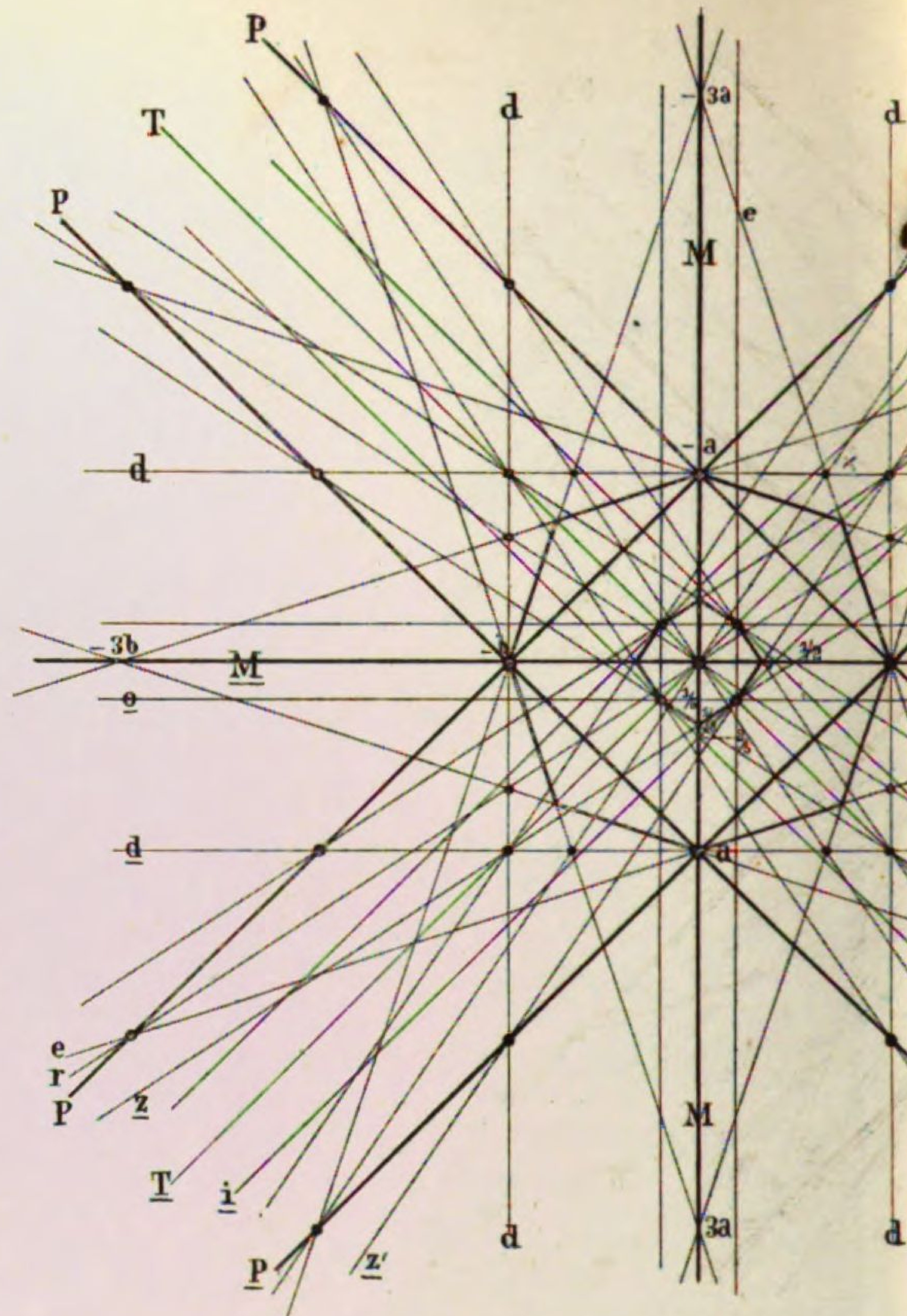


Fig. 5.

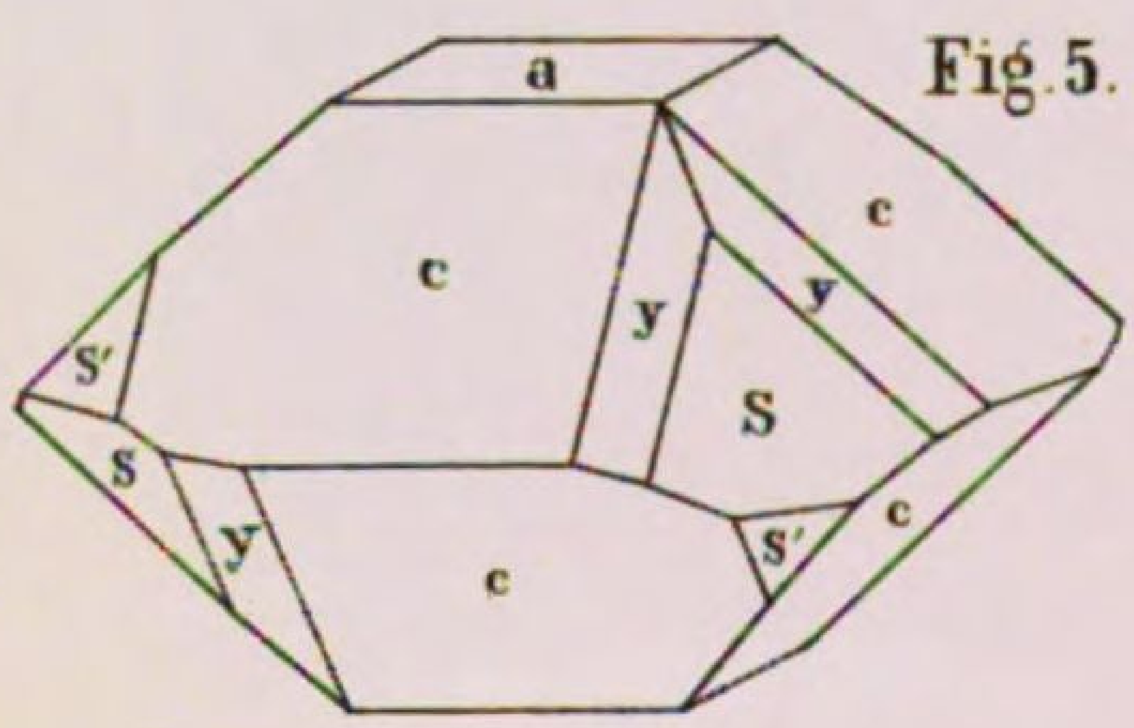
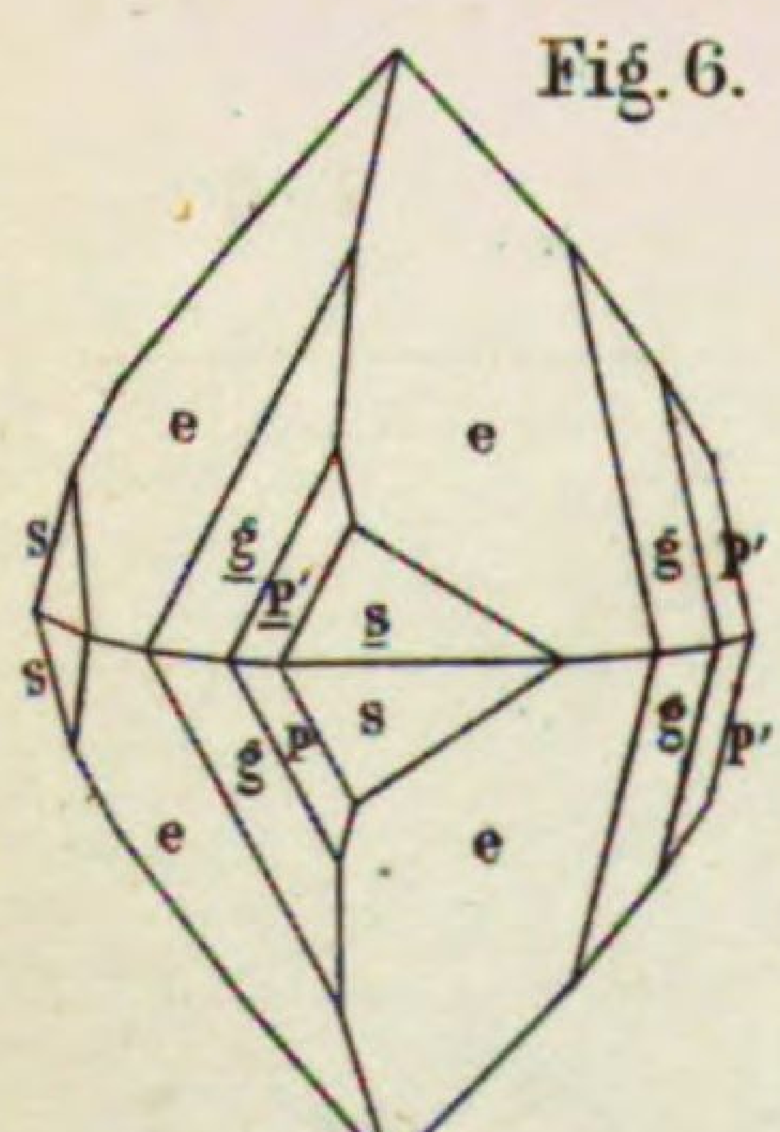


Fig. 6.



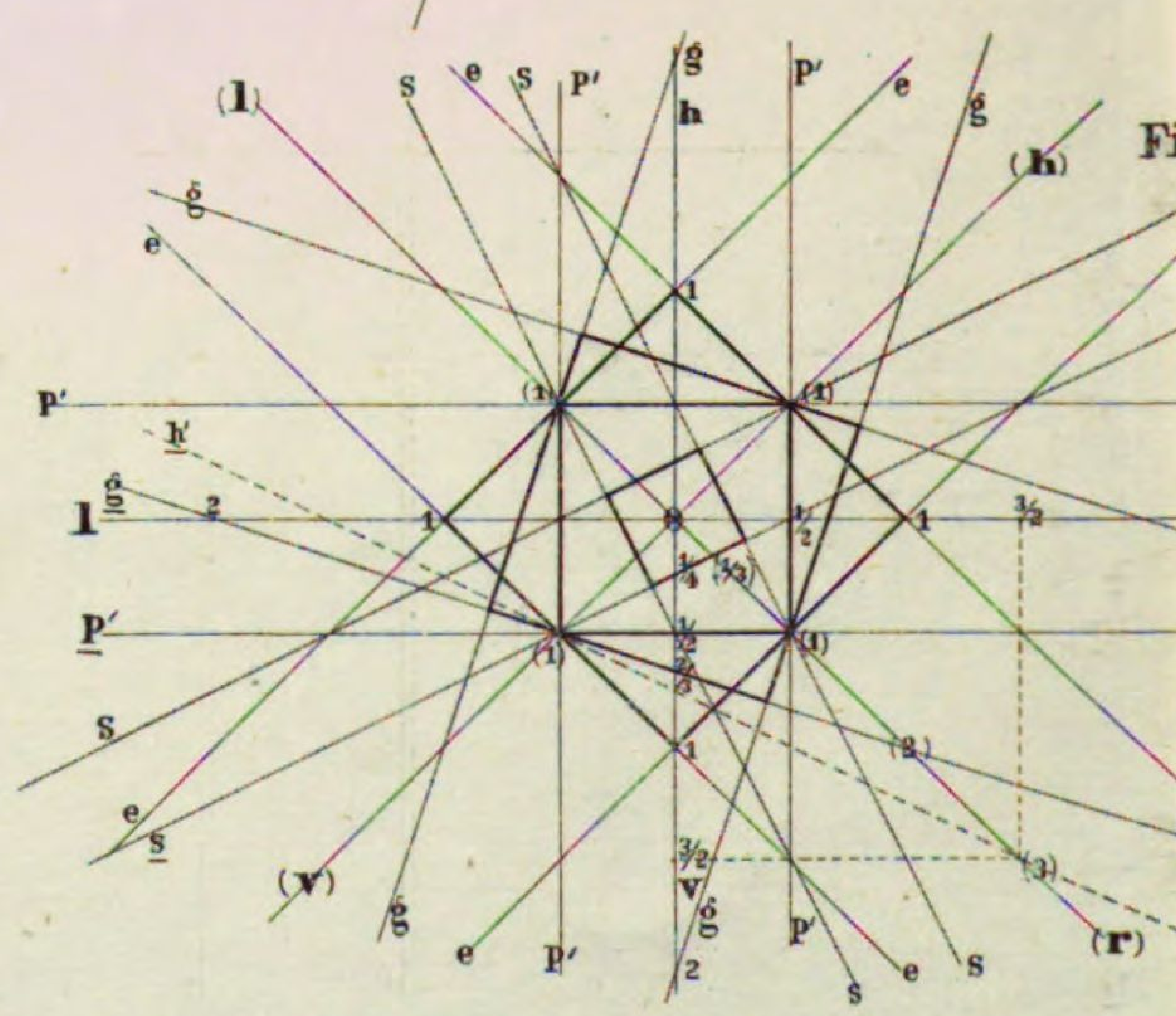


Fig. 2.

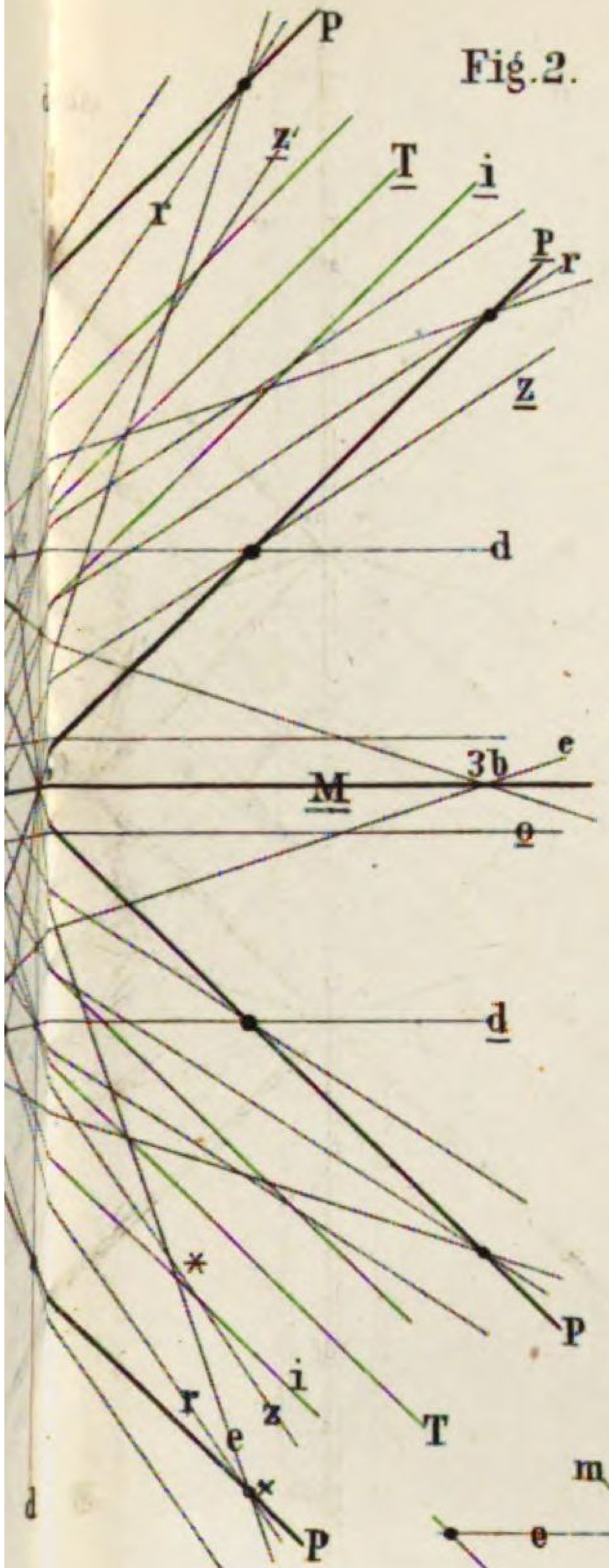


Fig 3

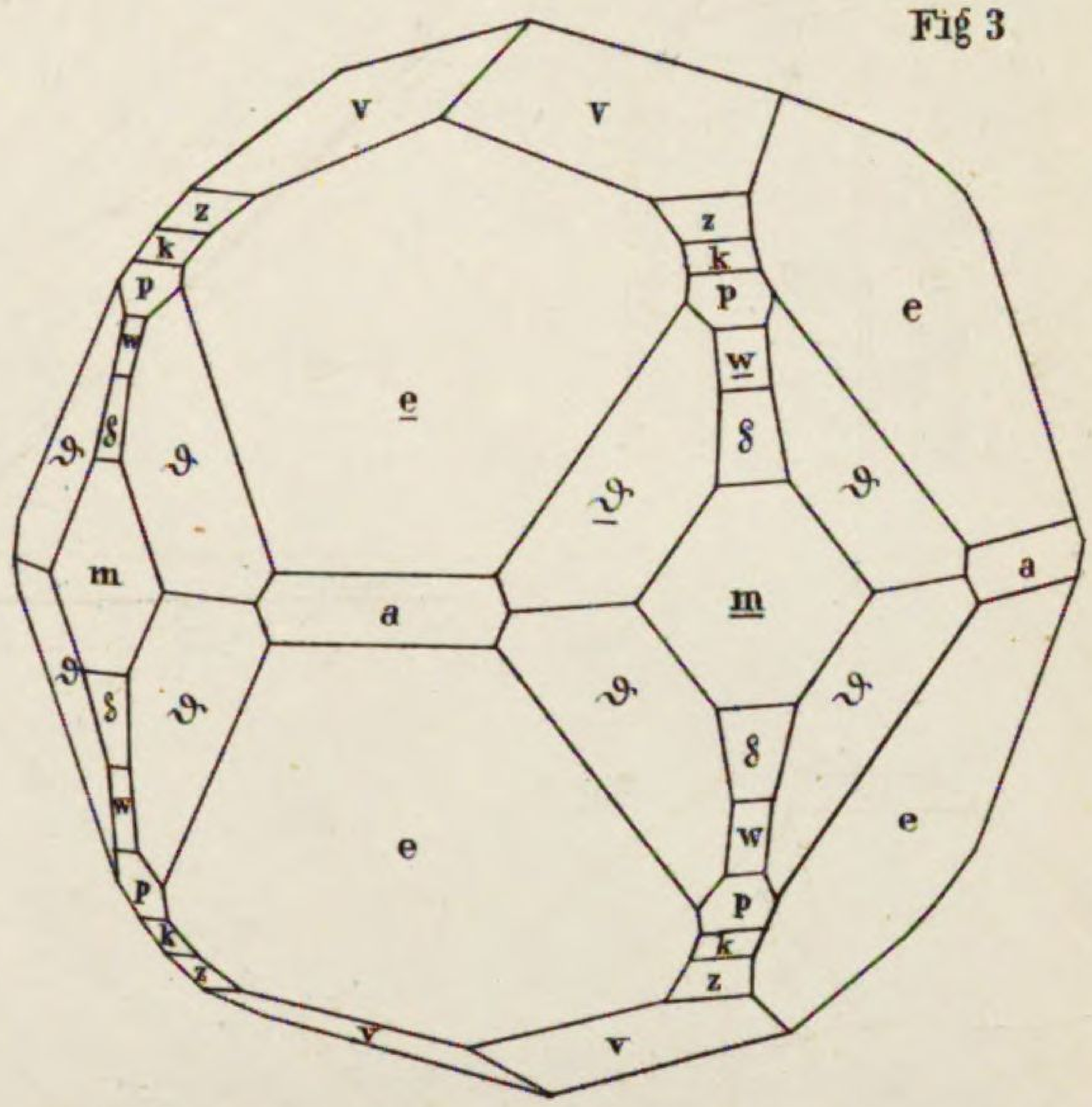


Fig 4.

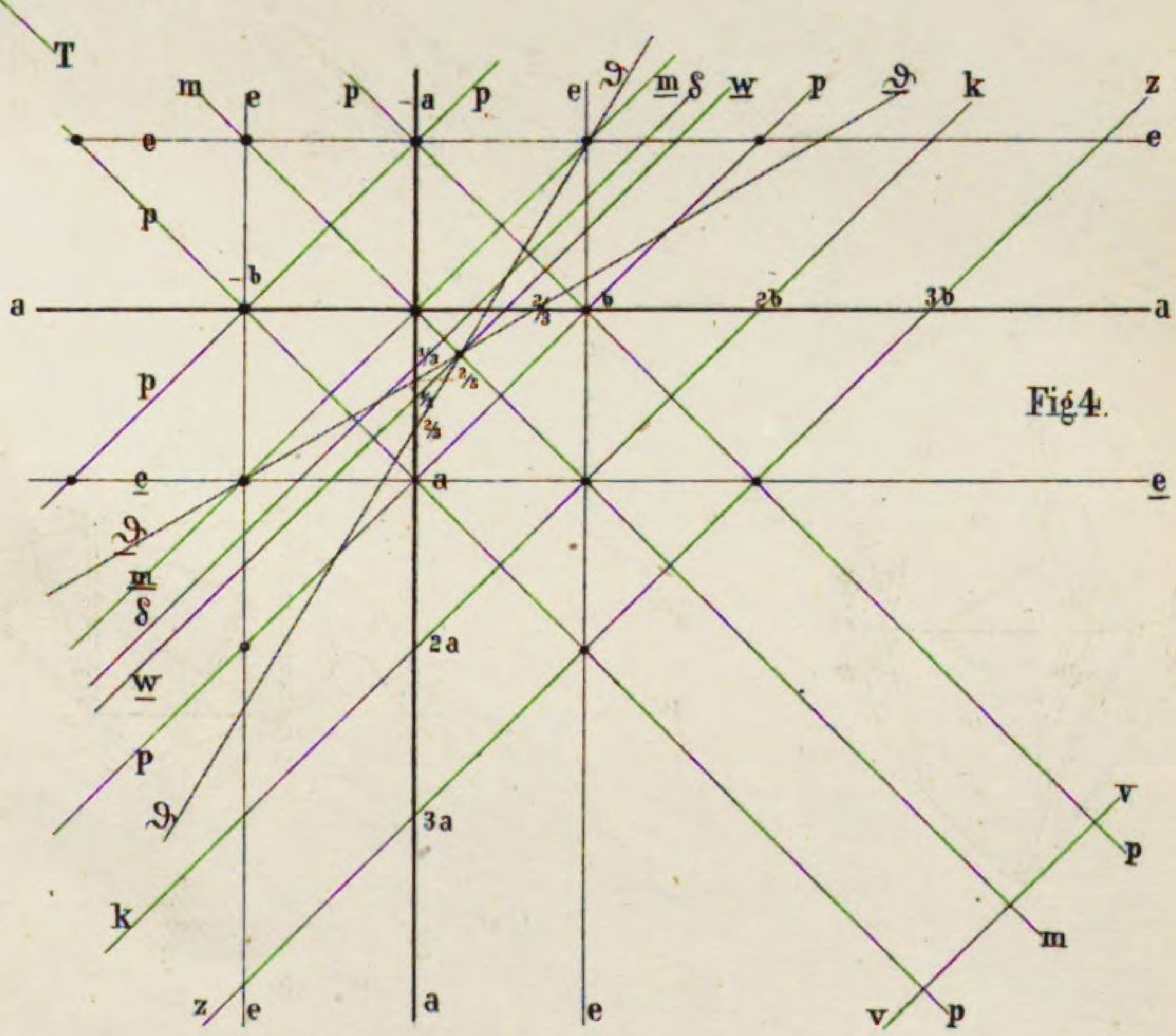
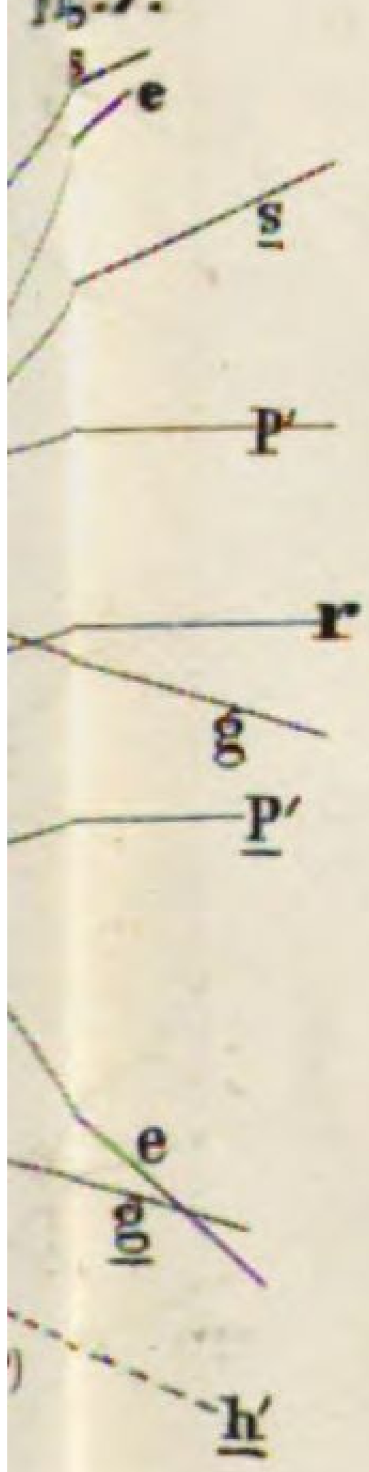
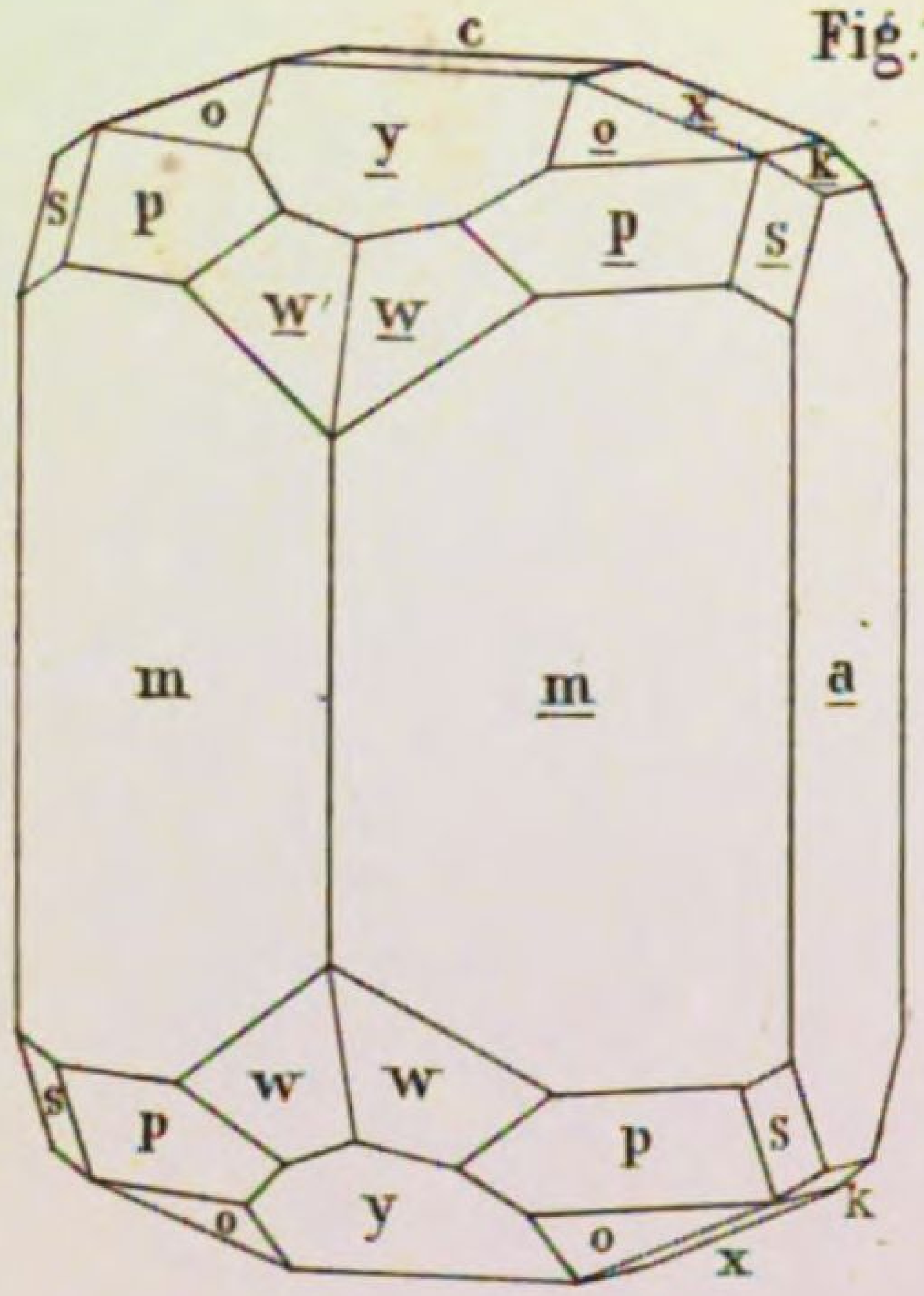


Fig. 7.



Lit. G. Ebenhusen, vorm. W. G. Baisch, Stuttgart.

Fig. 1.



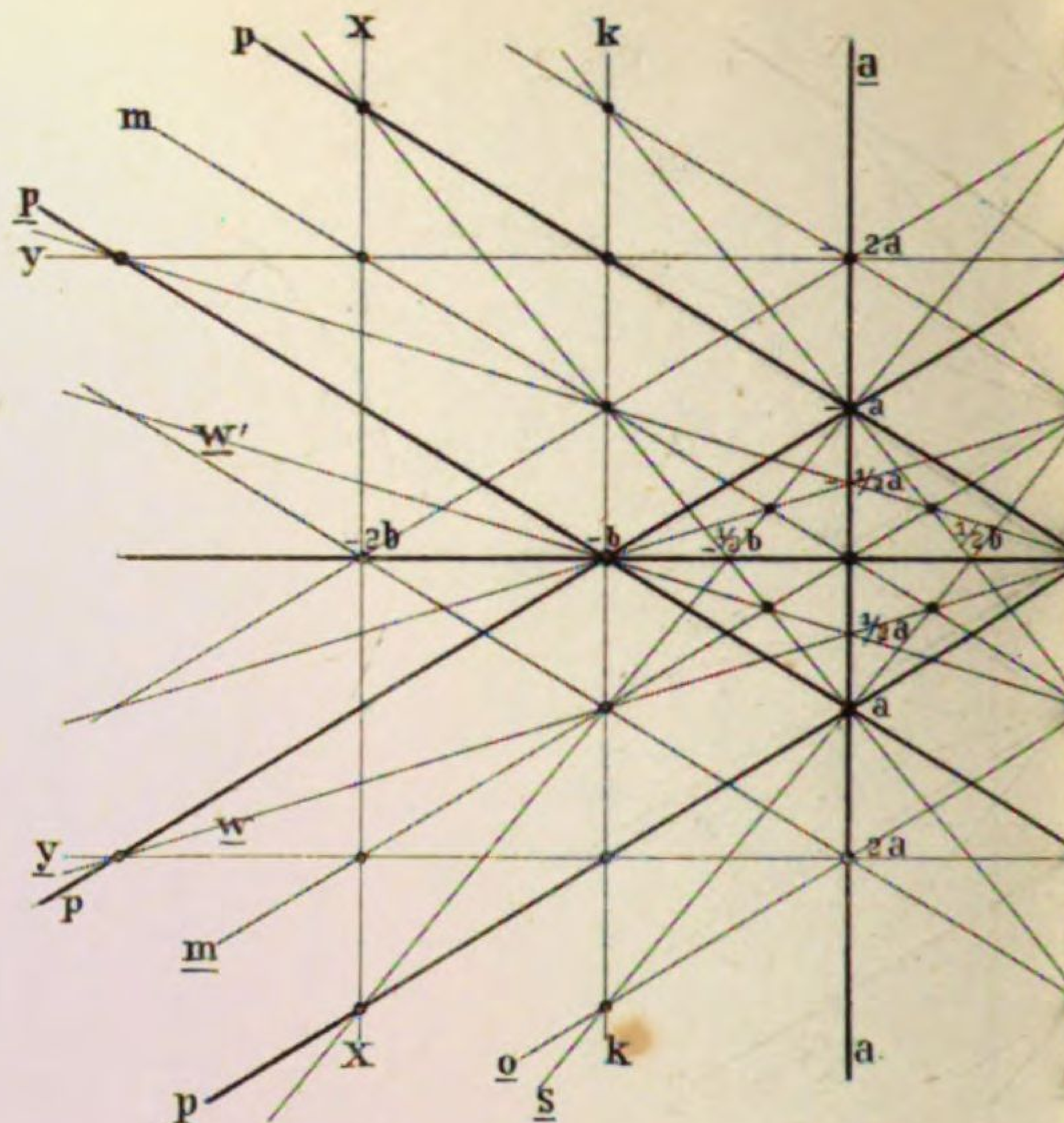
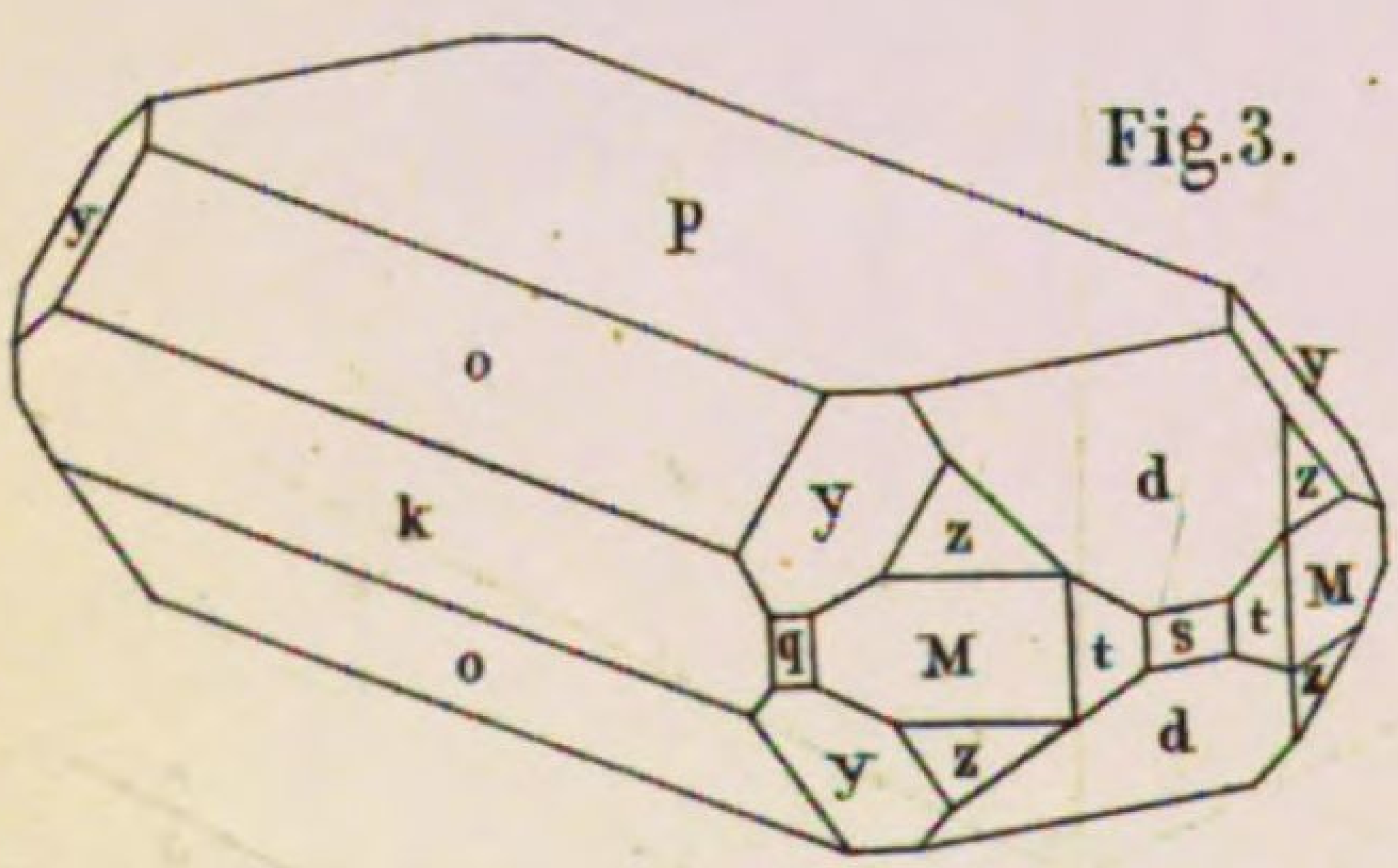


Fig. 3.



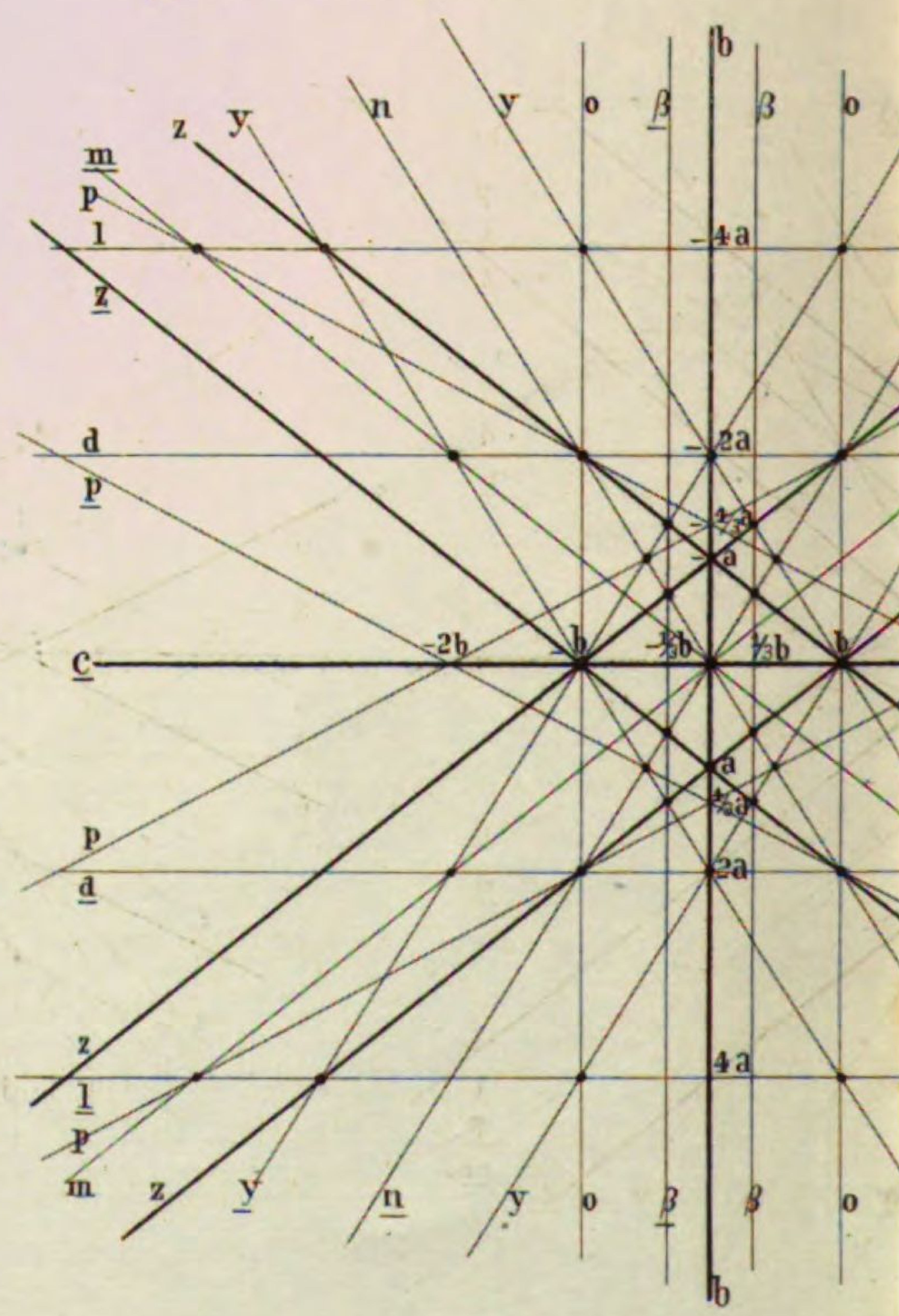


Fig. 6.

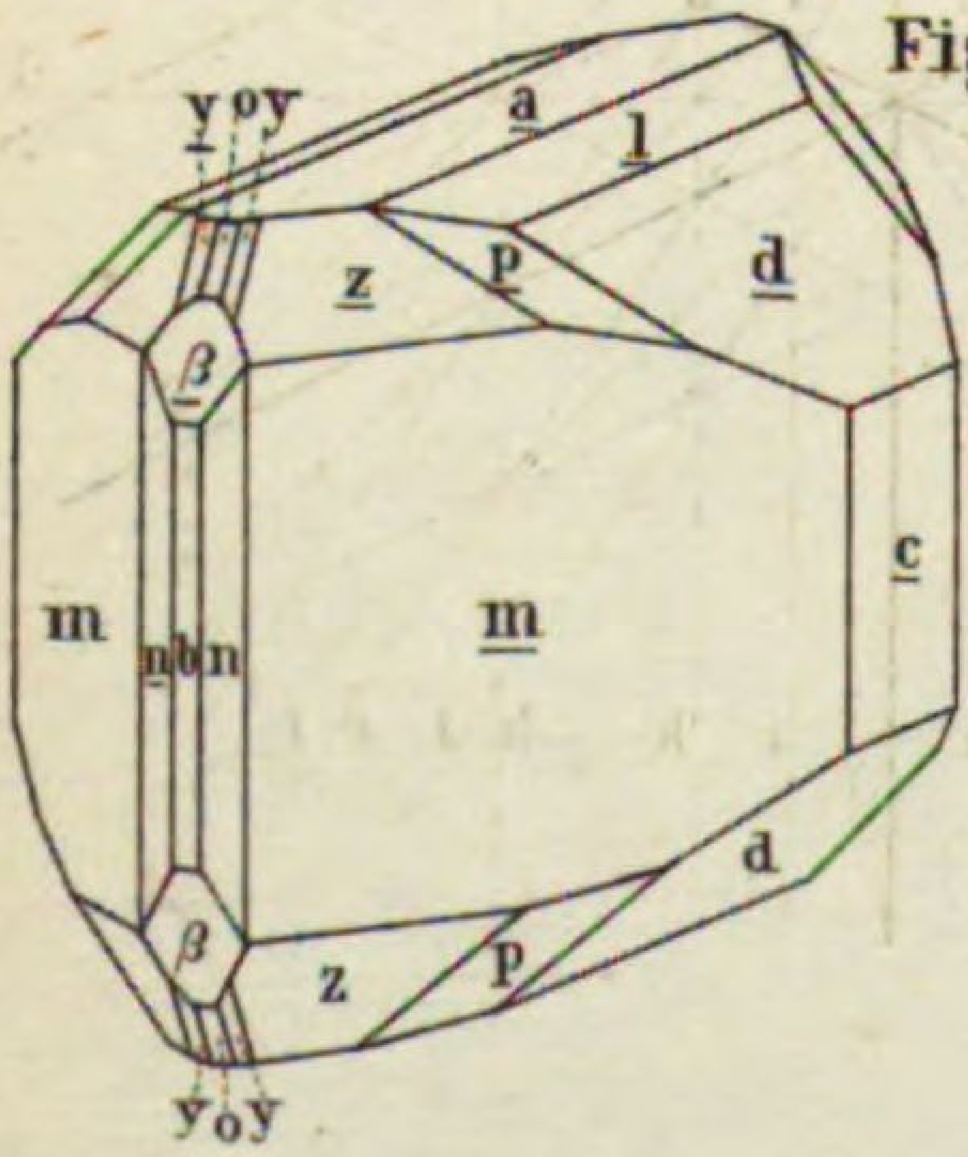


Fig. 2.

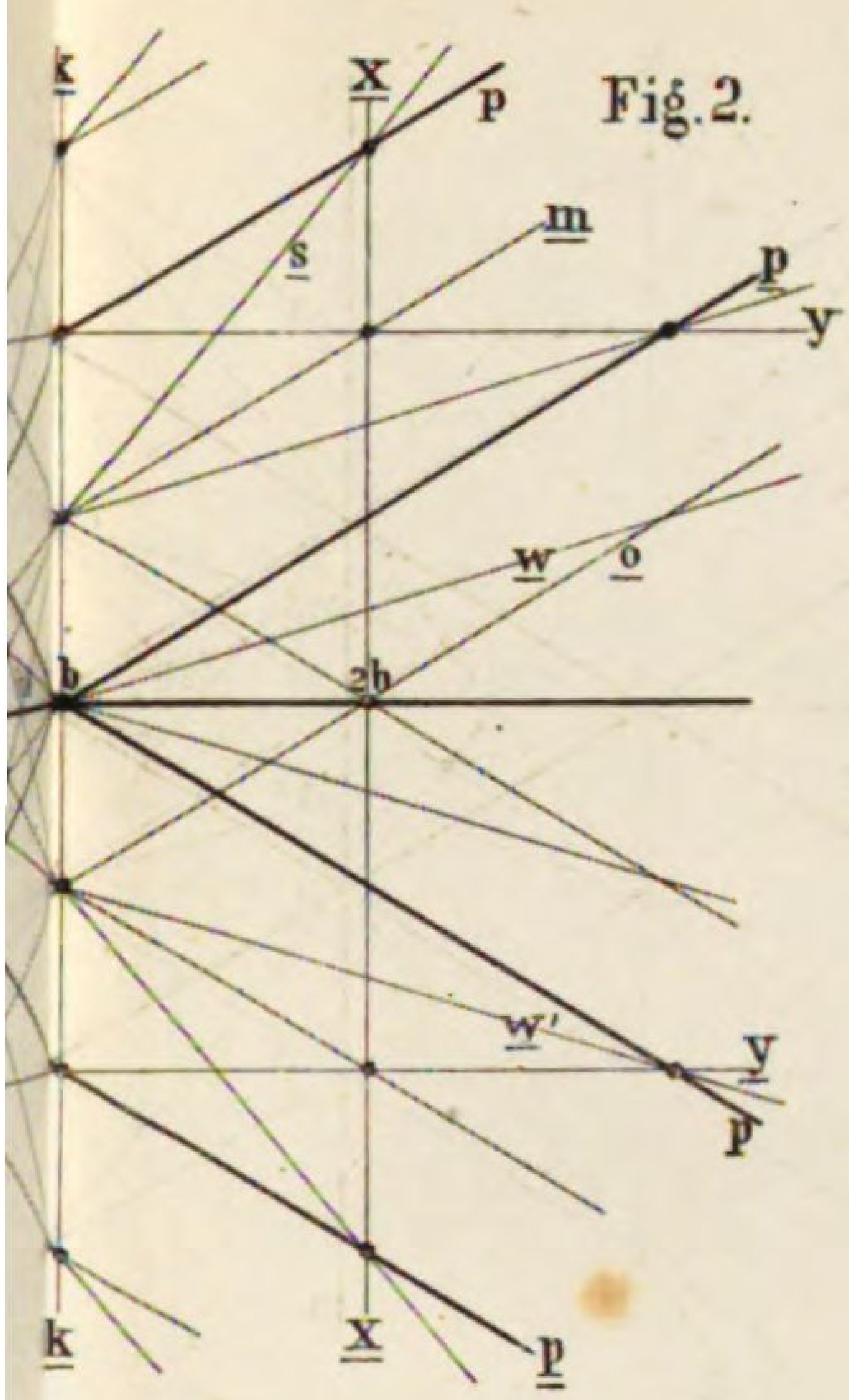


Fig. 4.

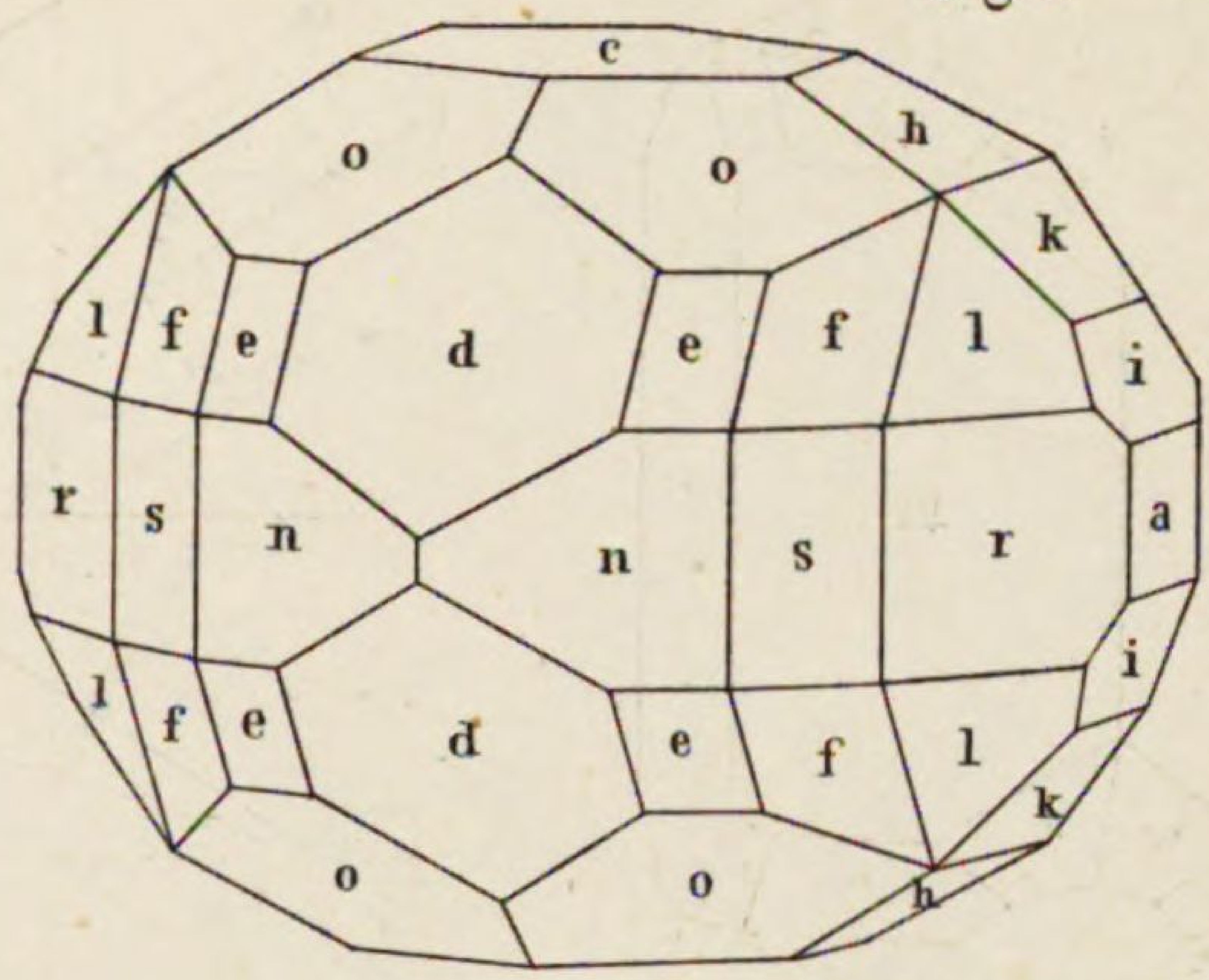


Fig. 7.

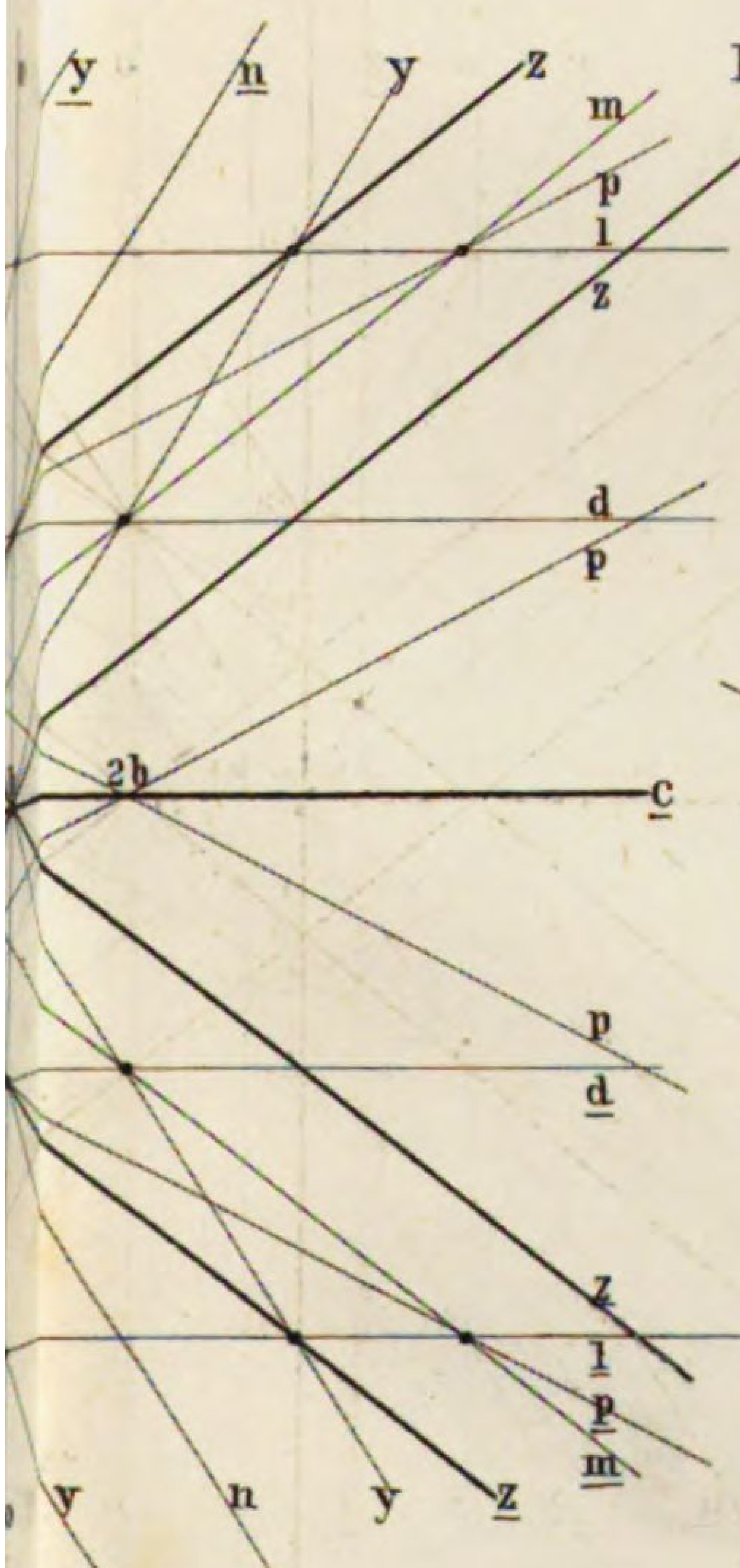
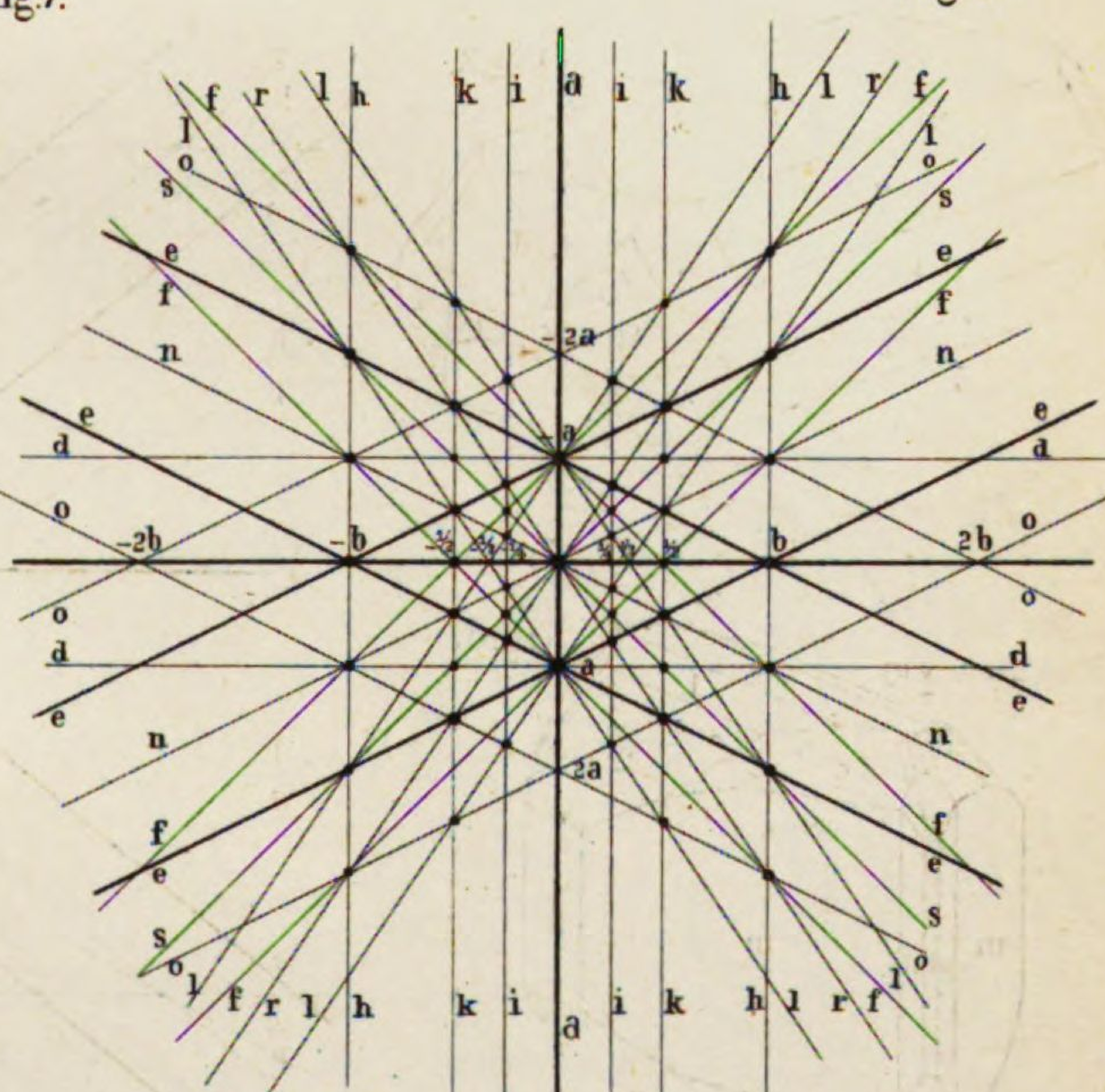
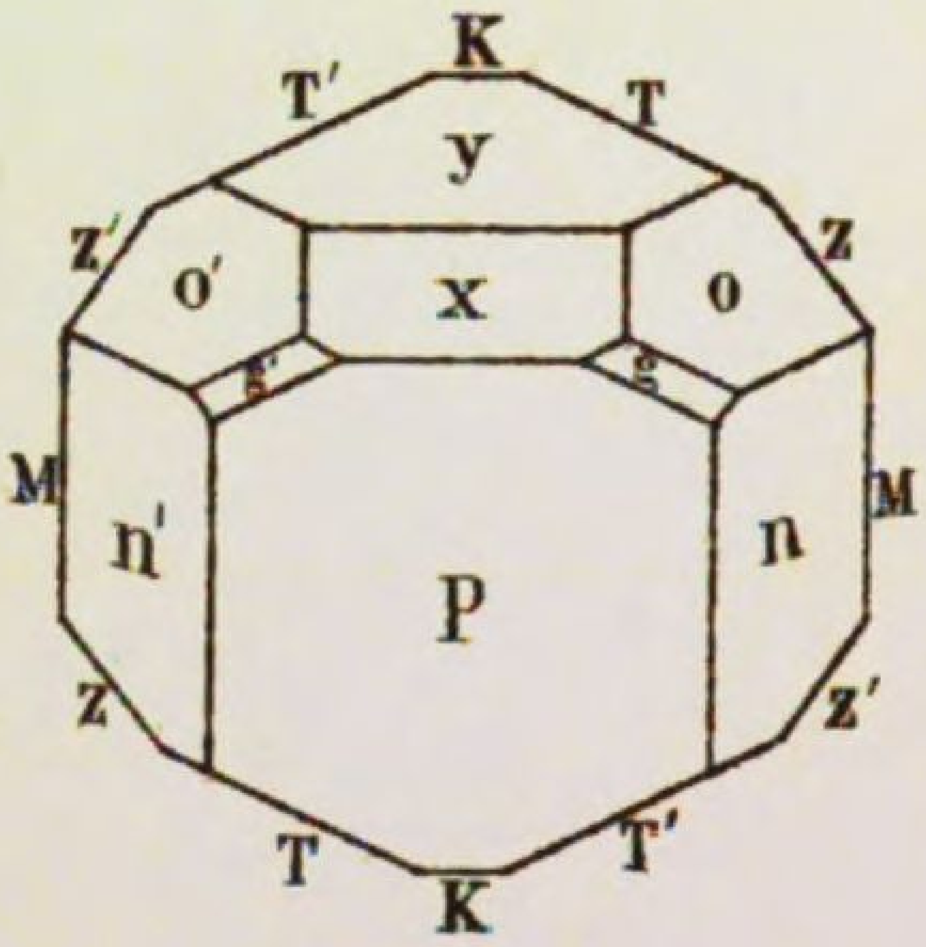


Fig. 5.



Lit. G. Ebenhusen, vorm. W. G. Baisch, Stuttgart.

Fig. 1.



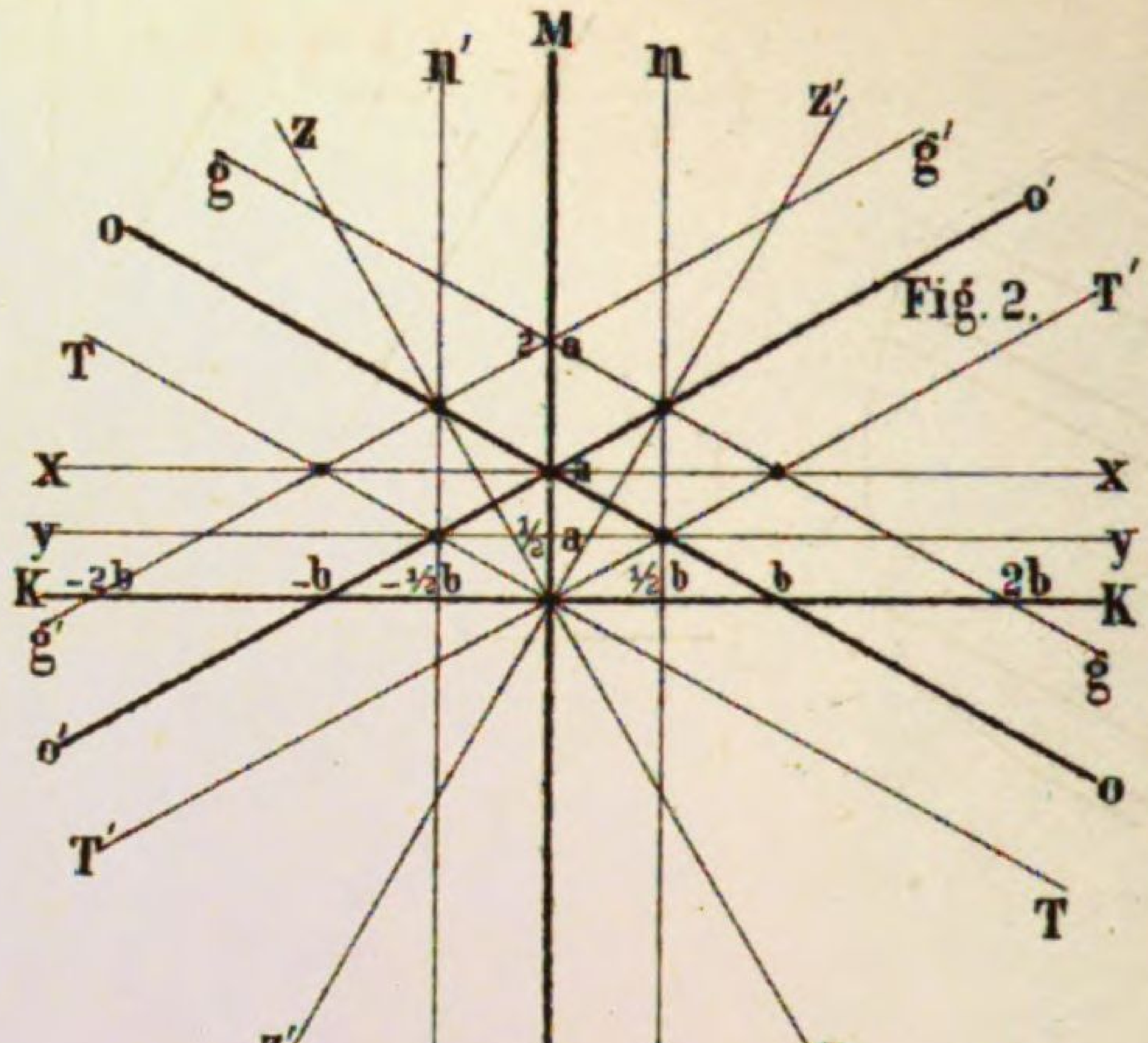
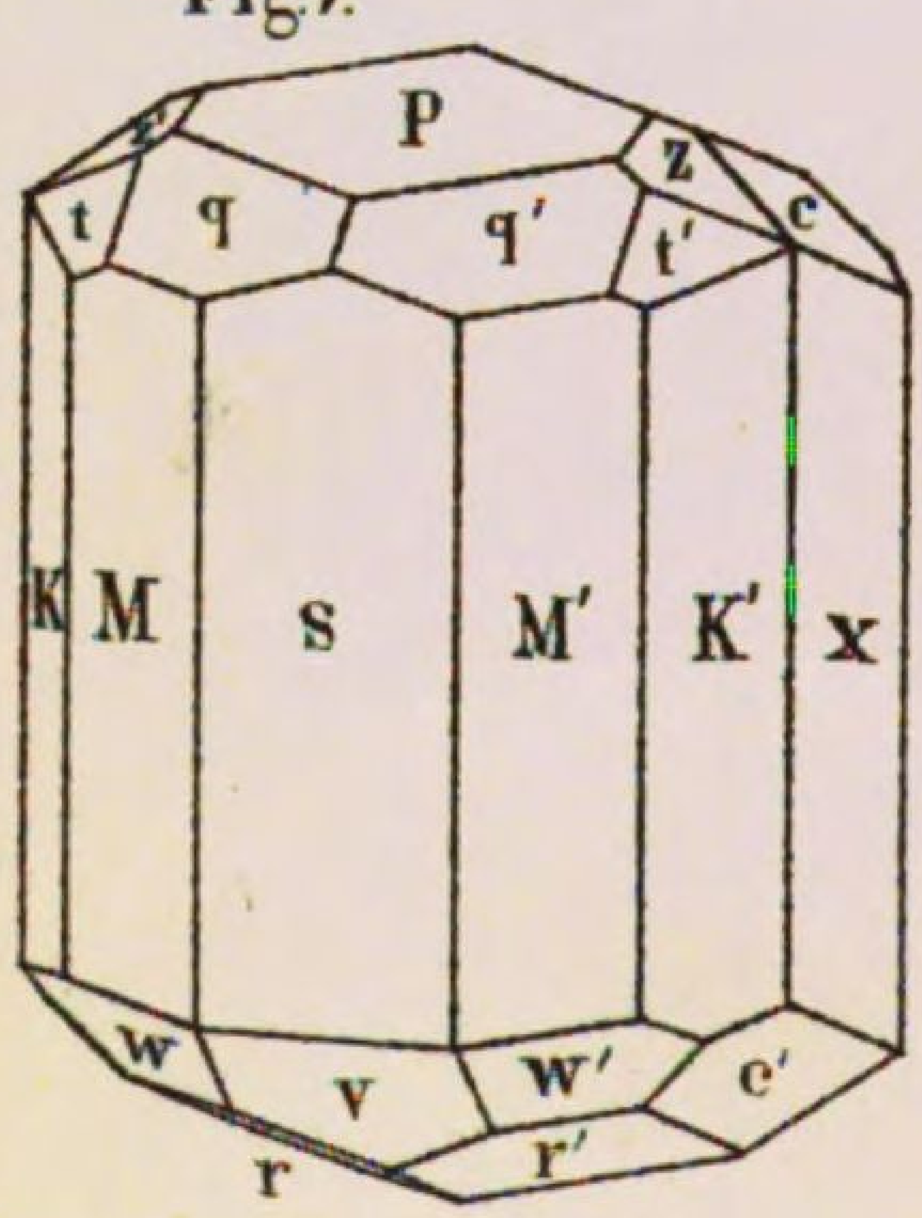


Fig. 2.

Fig. 7.



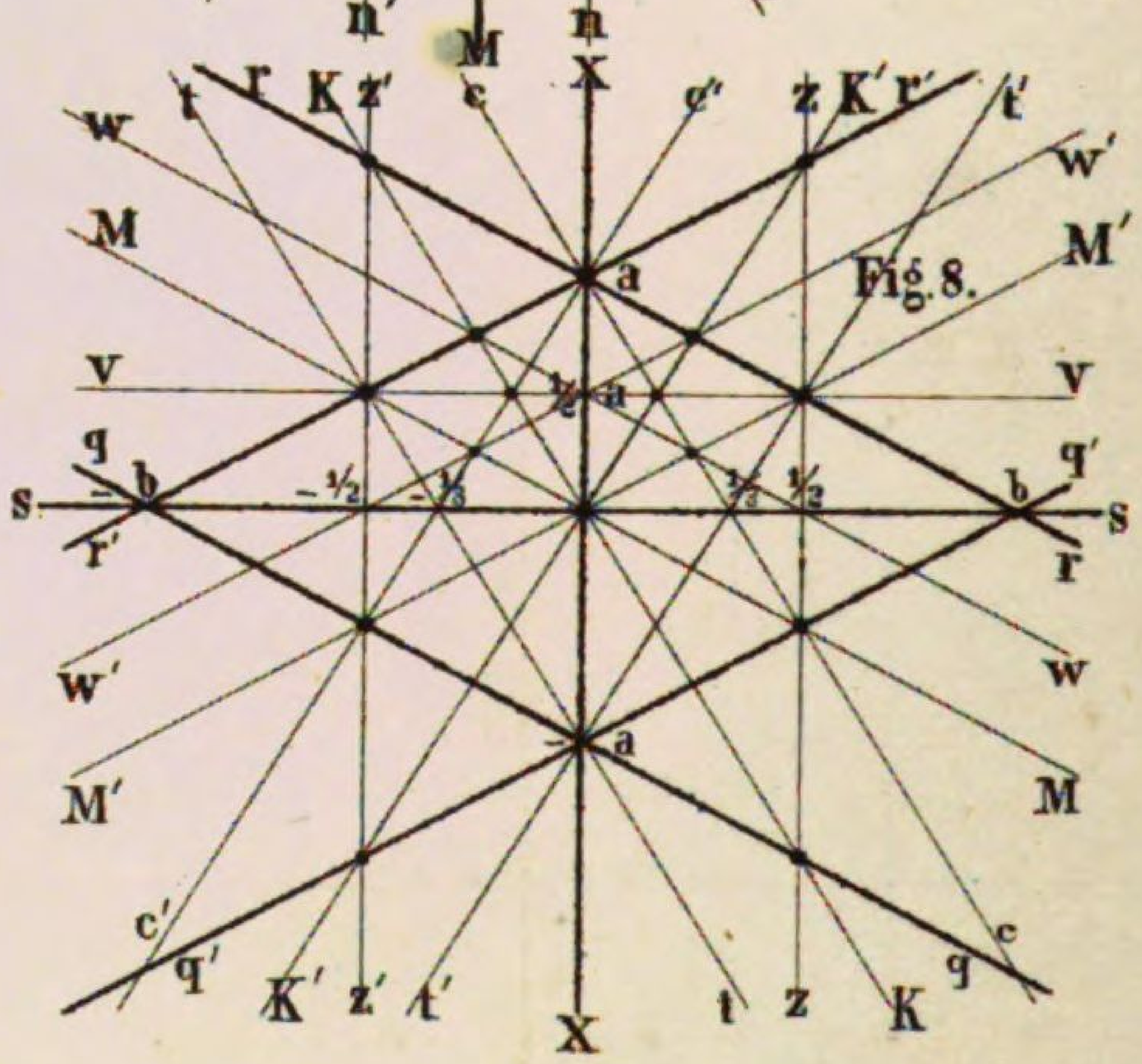
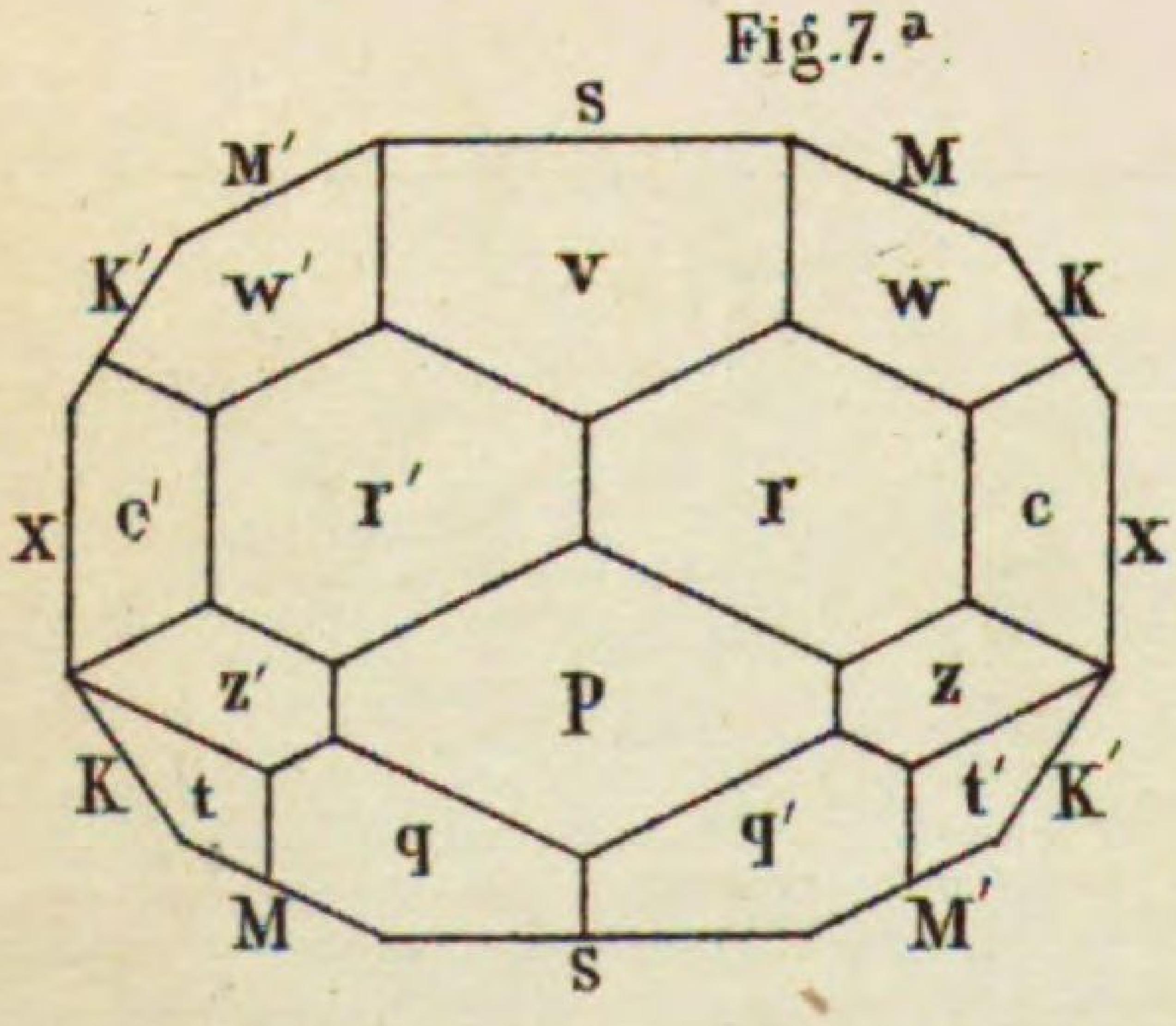


Fig. 8.

Fig. 7.ª



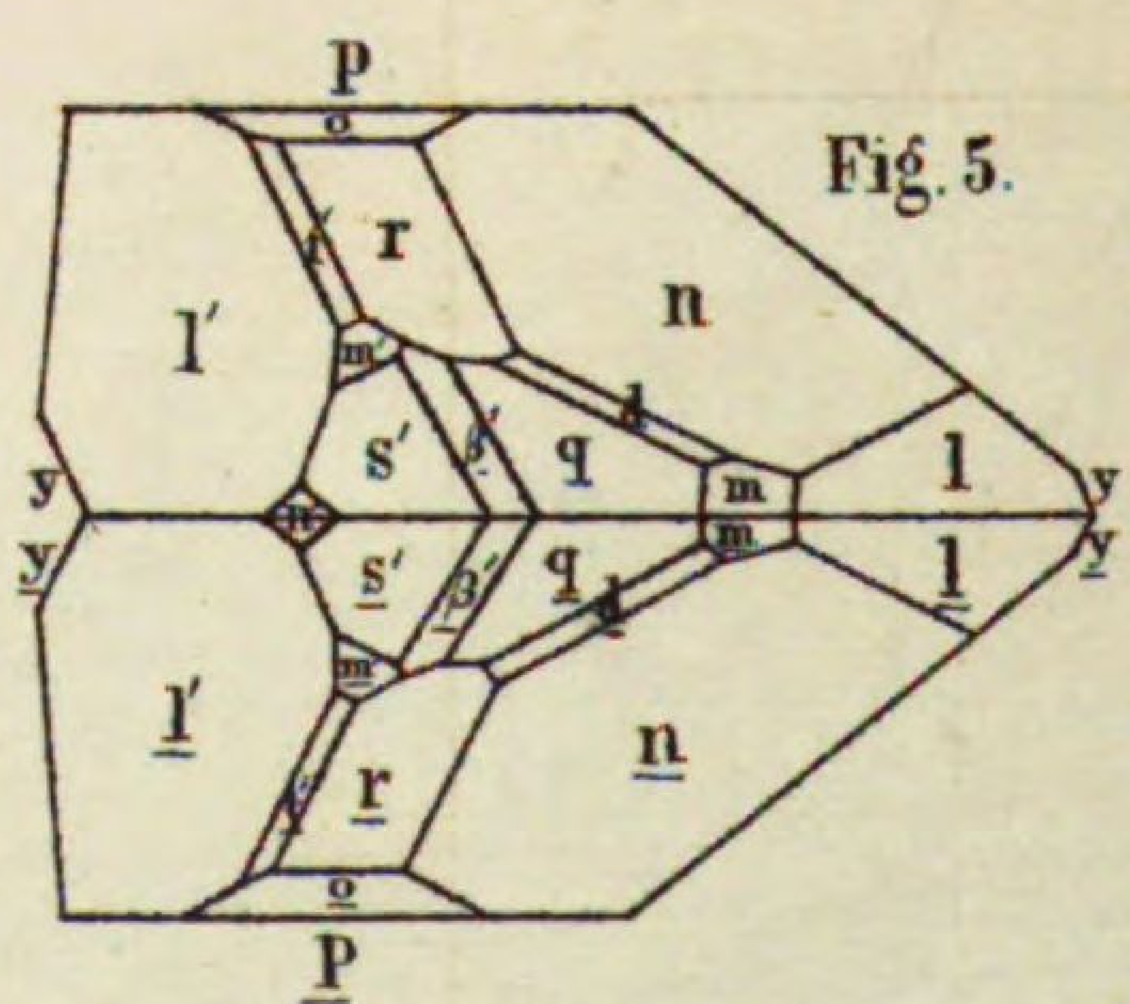


Fig. 5.



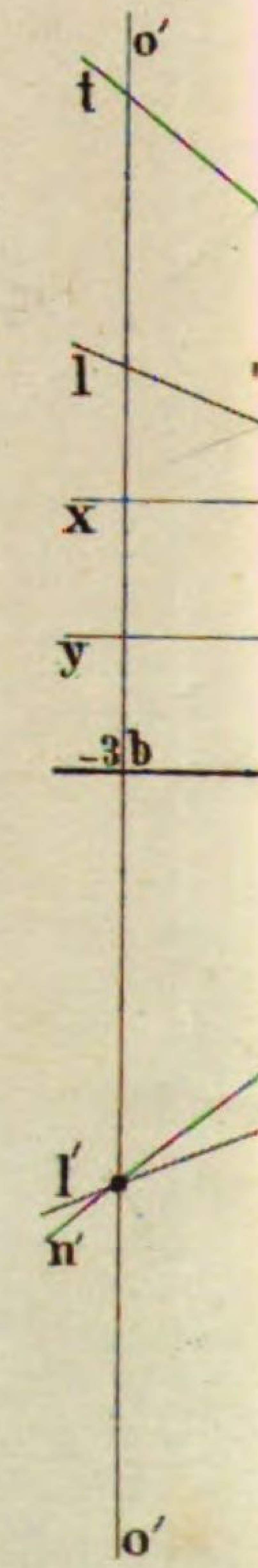


Fig. 3.

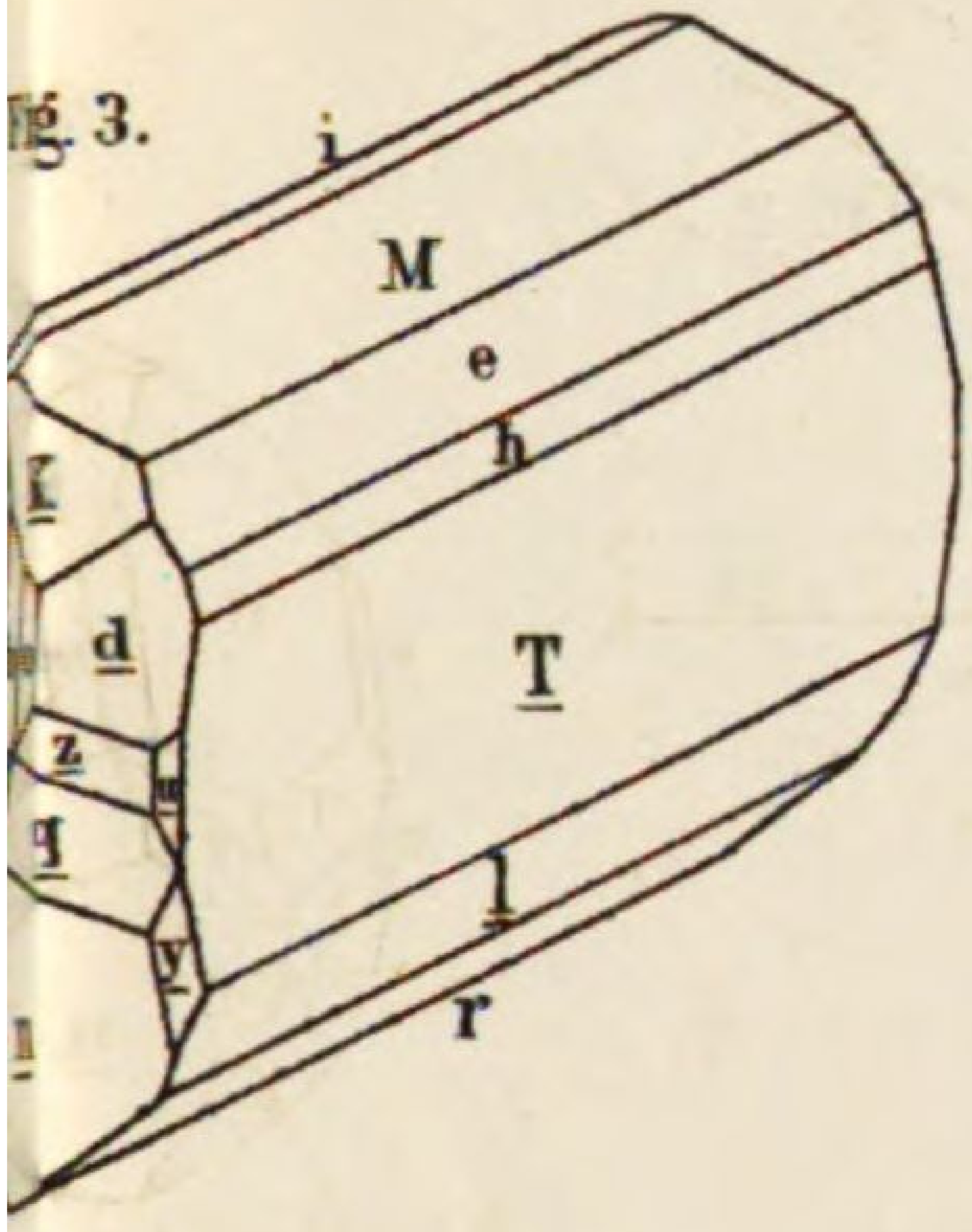


Fig. 4.

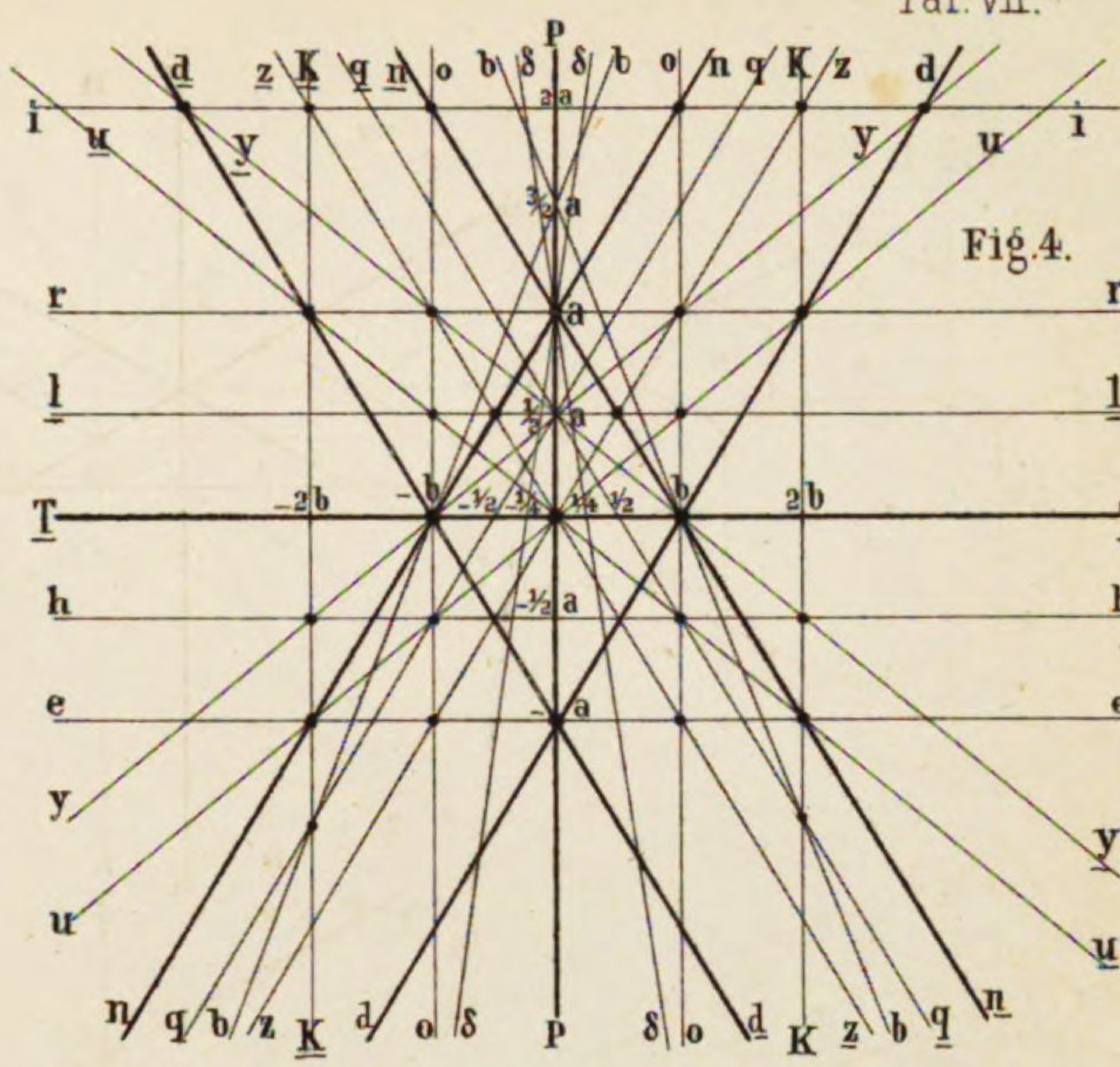
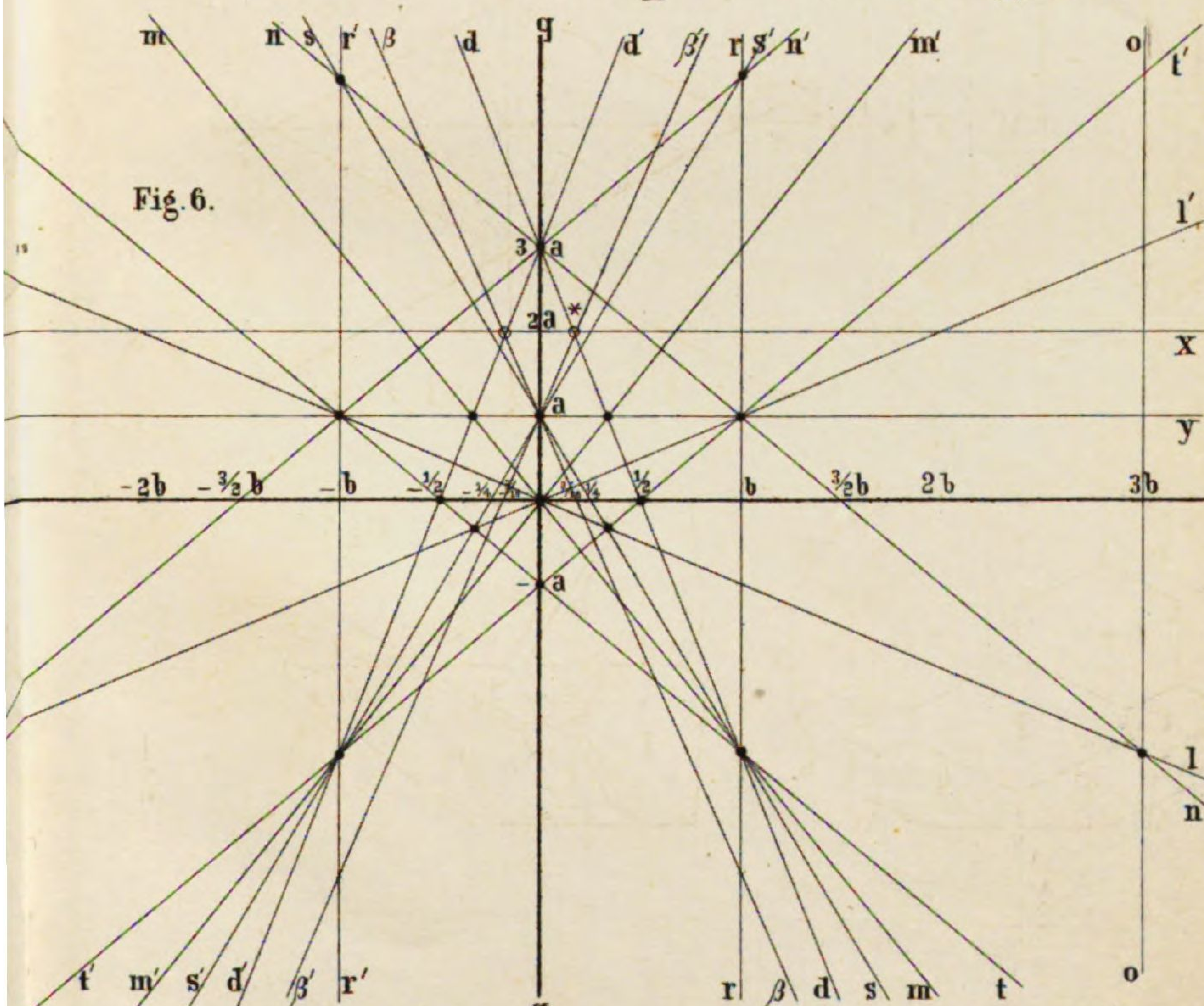


Fig. 6.



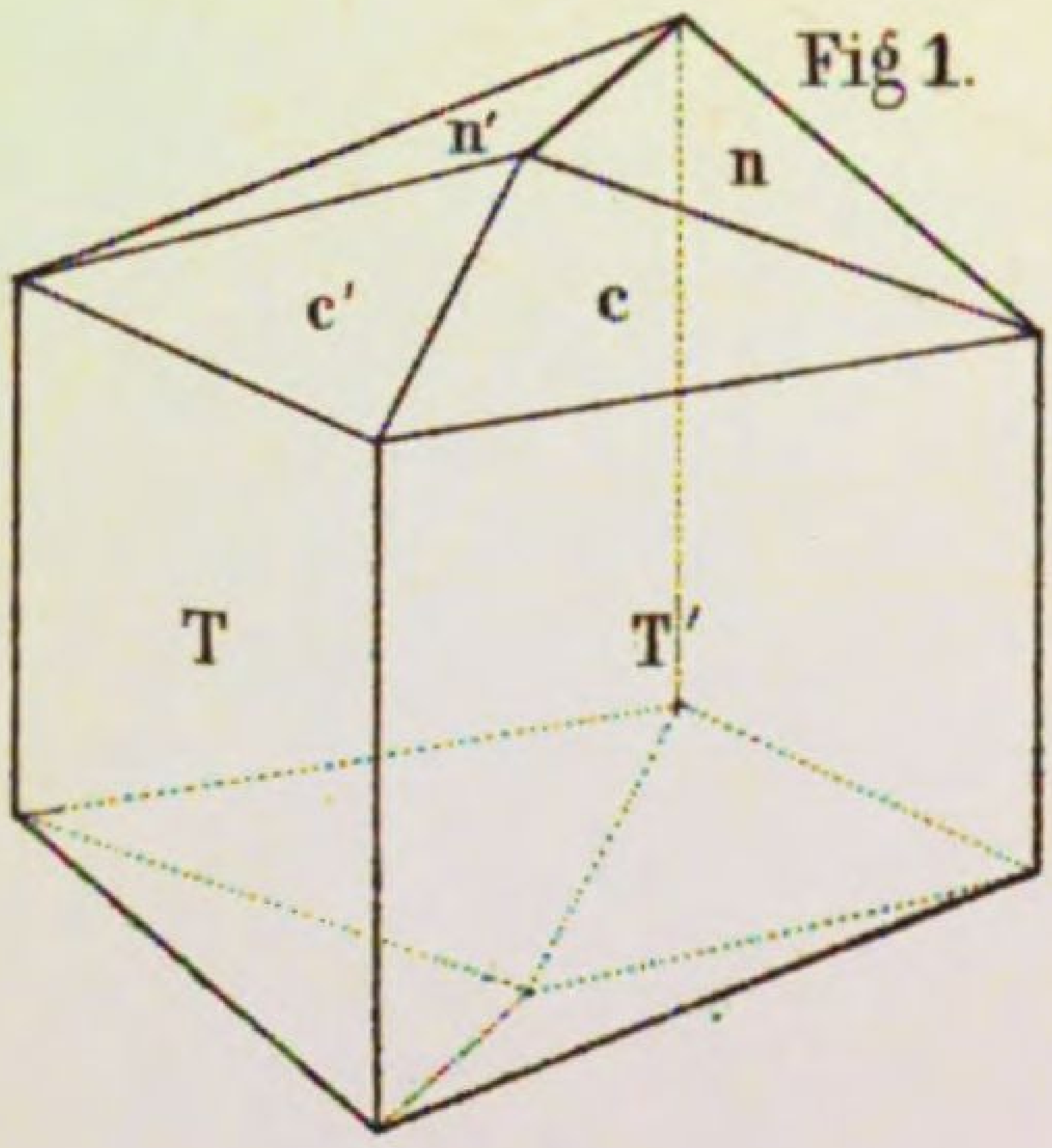


Fig 1.

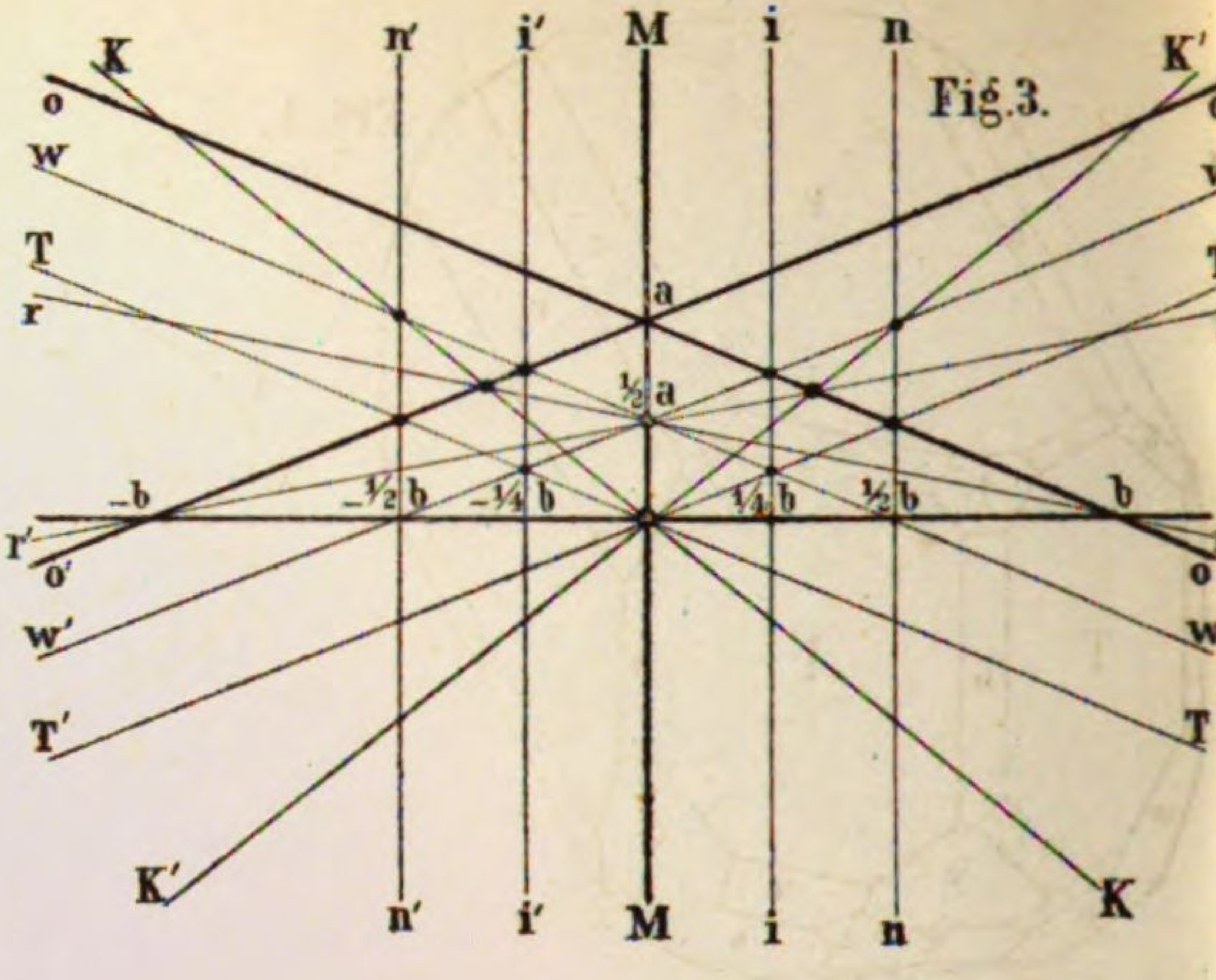


Fig. 3.

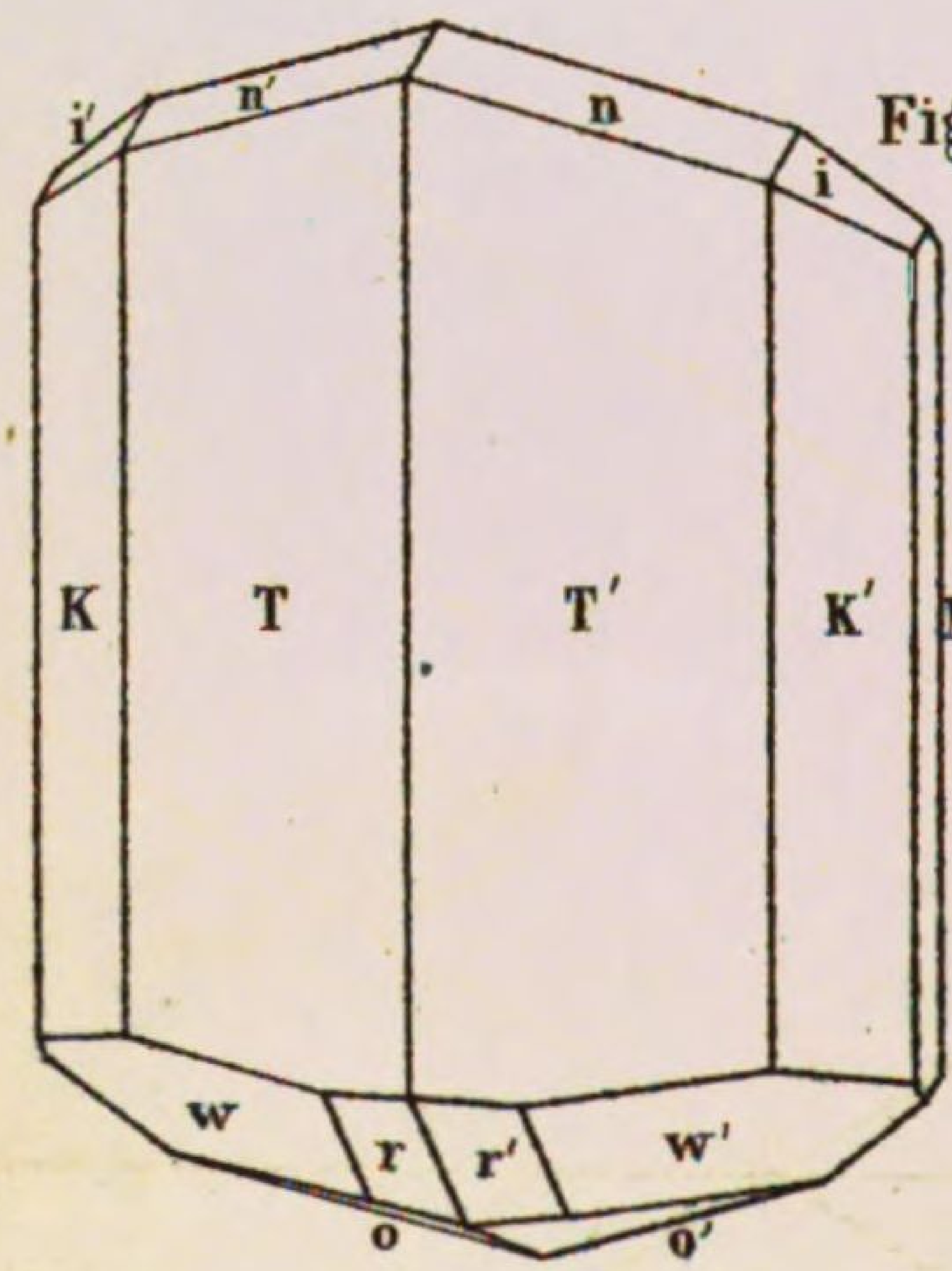


Fig. 2.

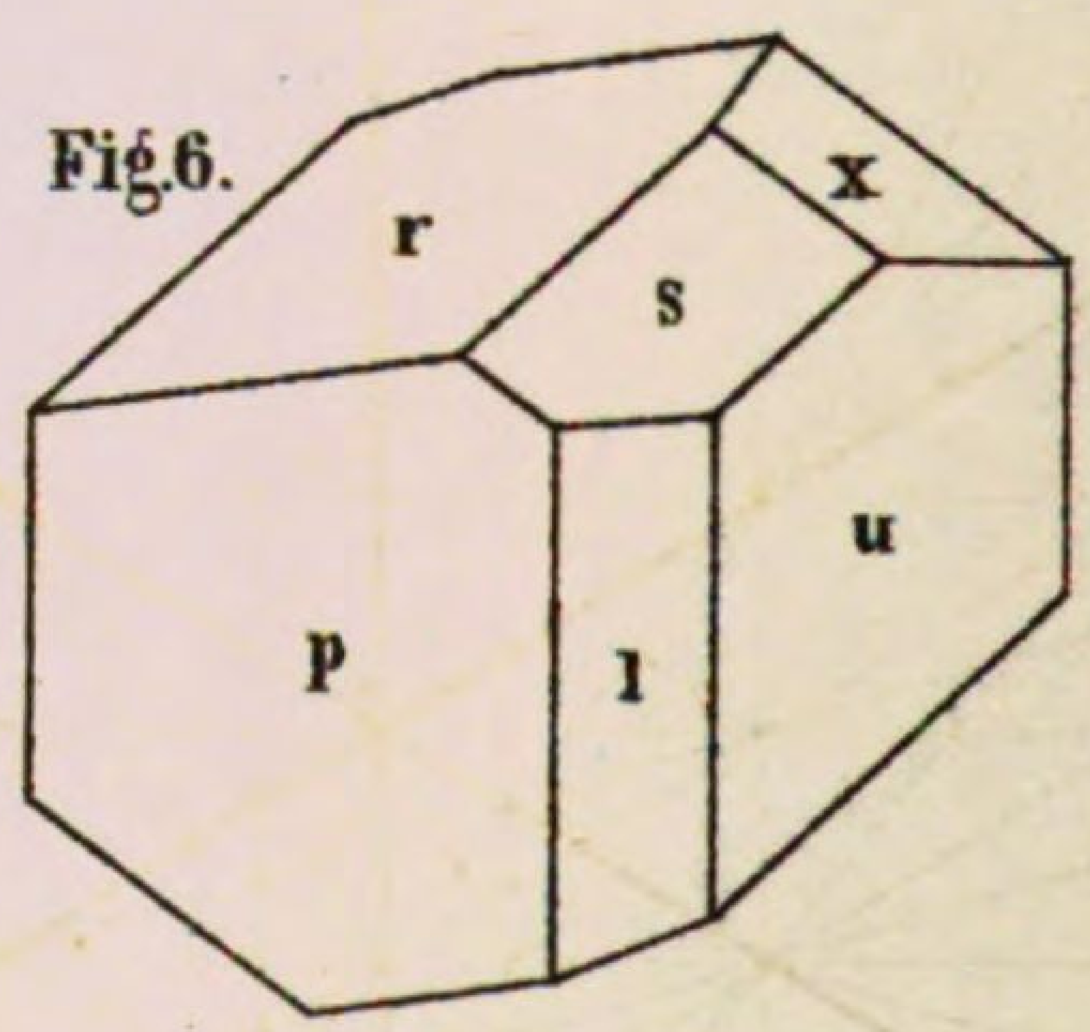


Fig. 6.

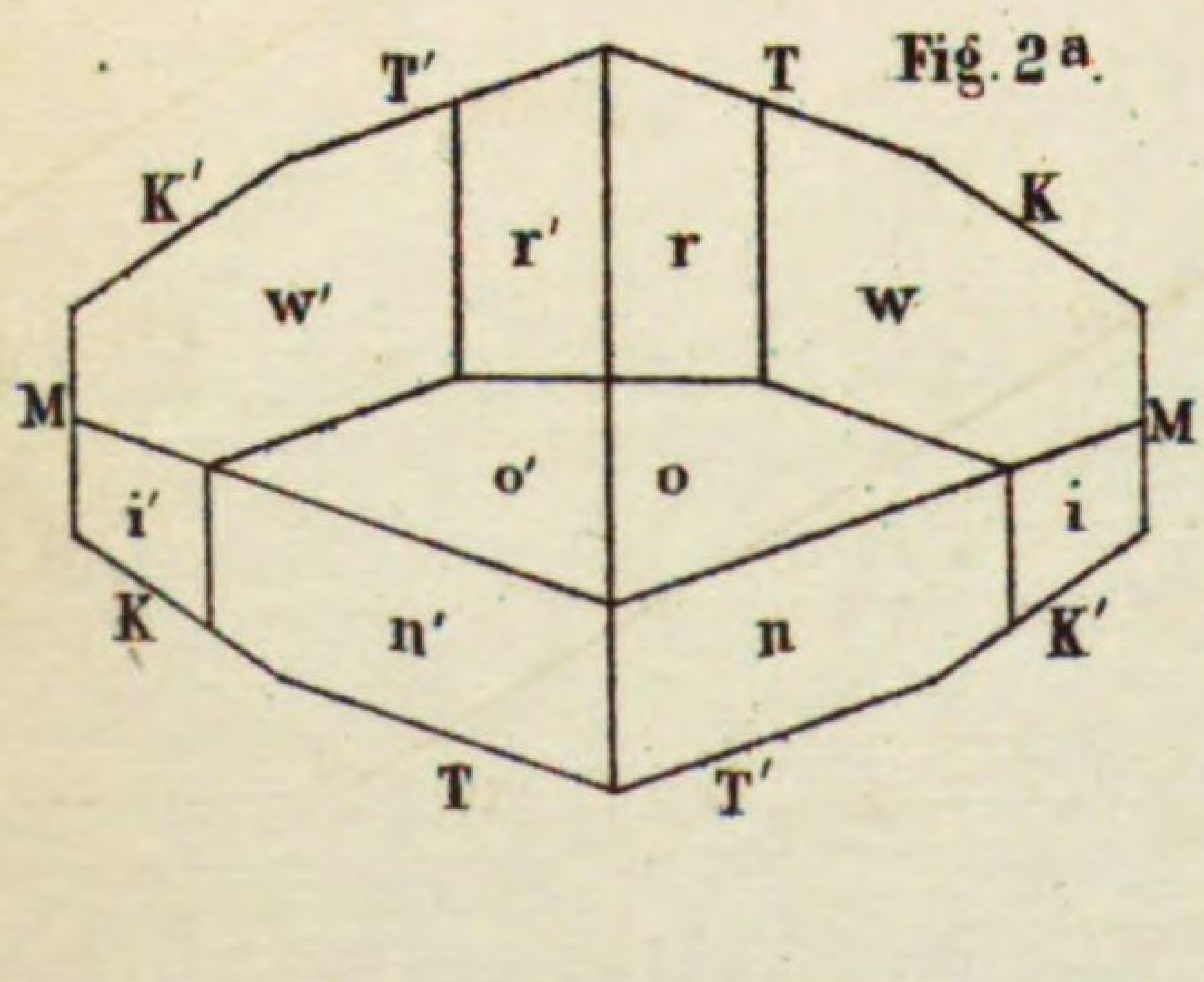


Fig. 2 a.

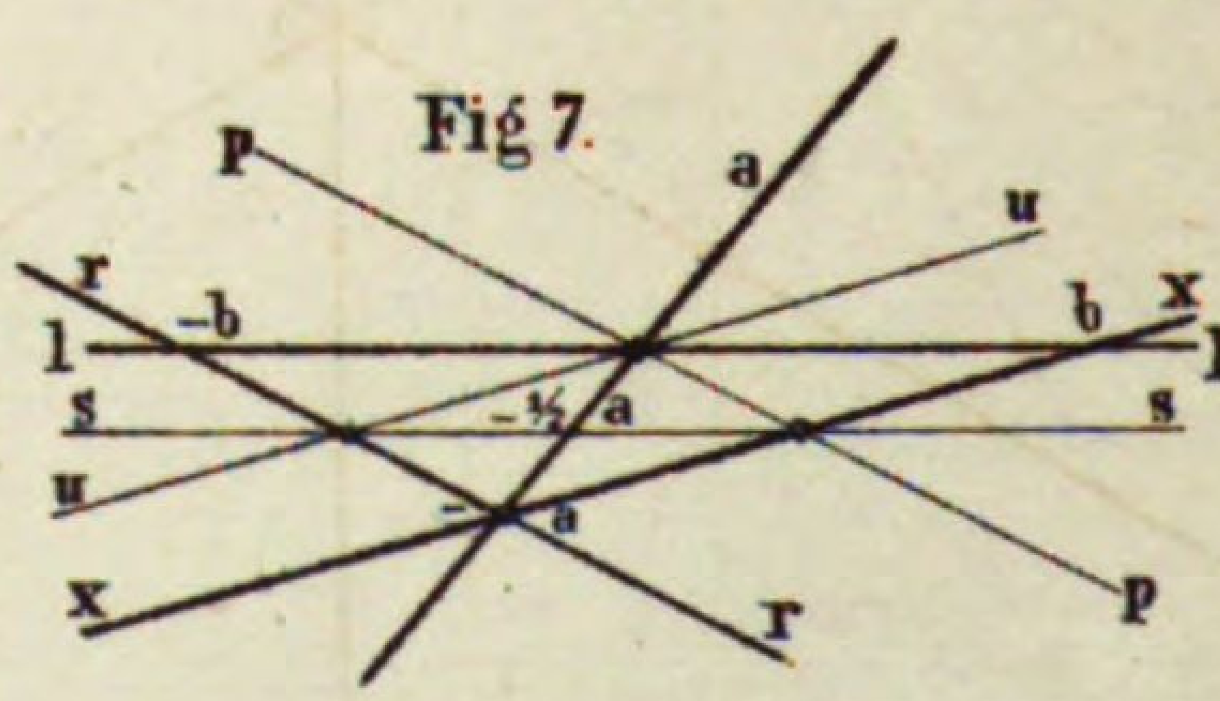


Fig 7.

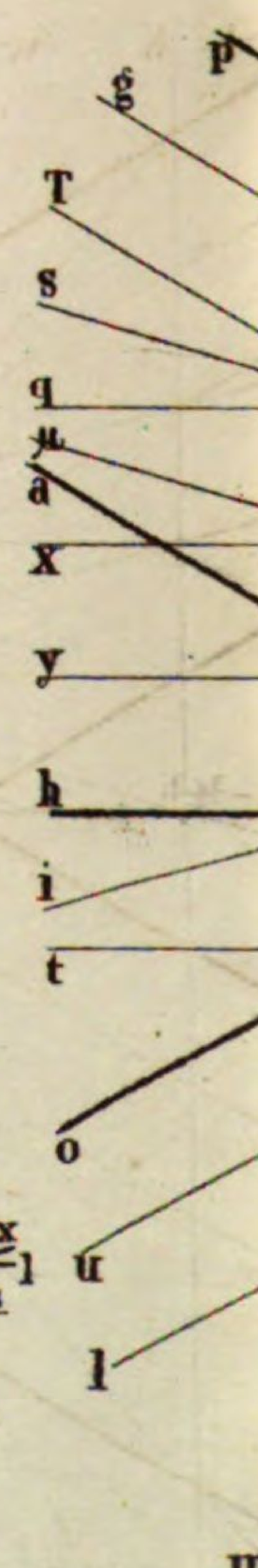


Fig. 4.

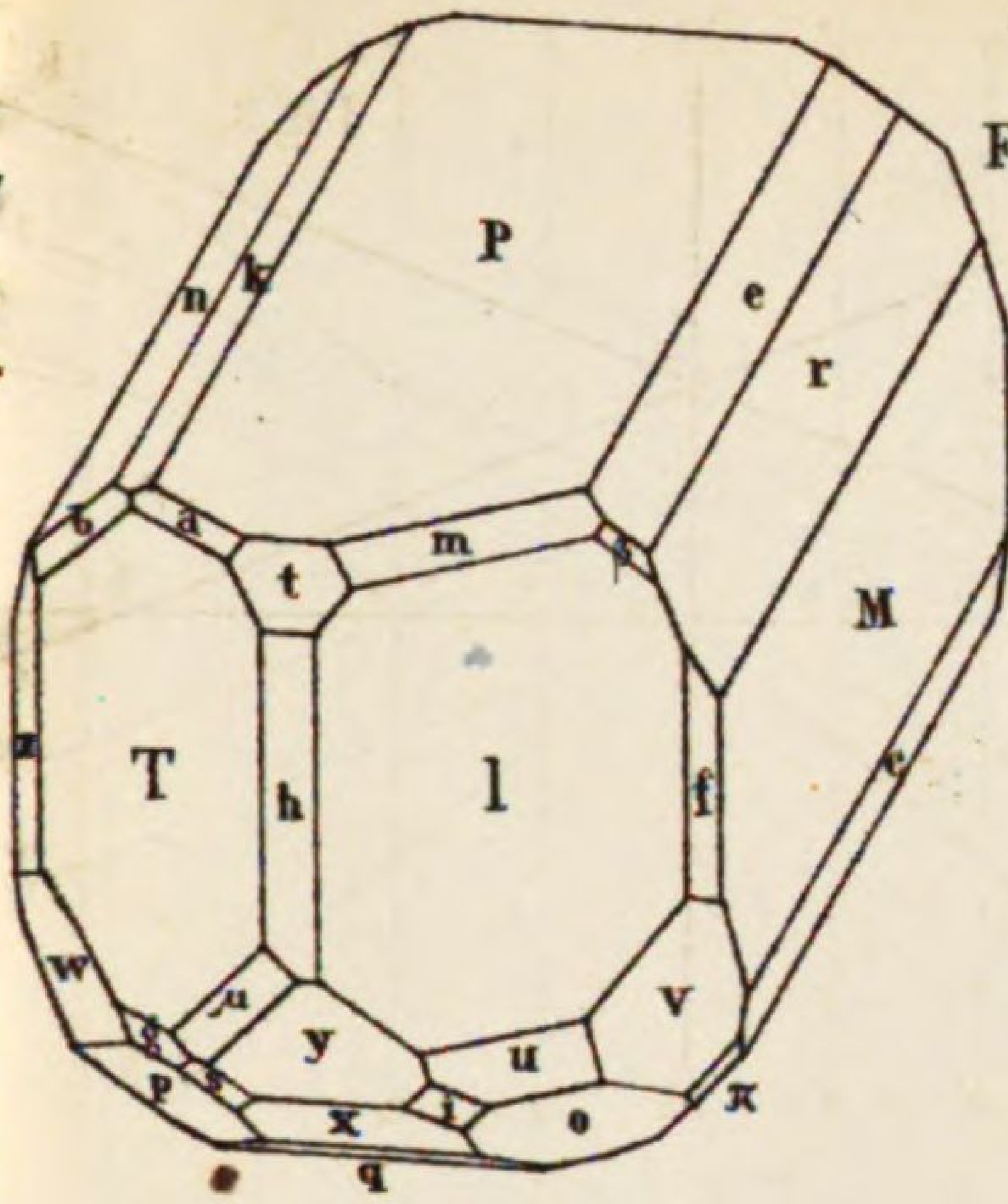


Fig. 4a.

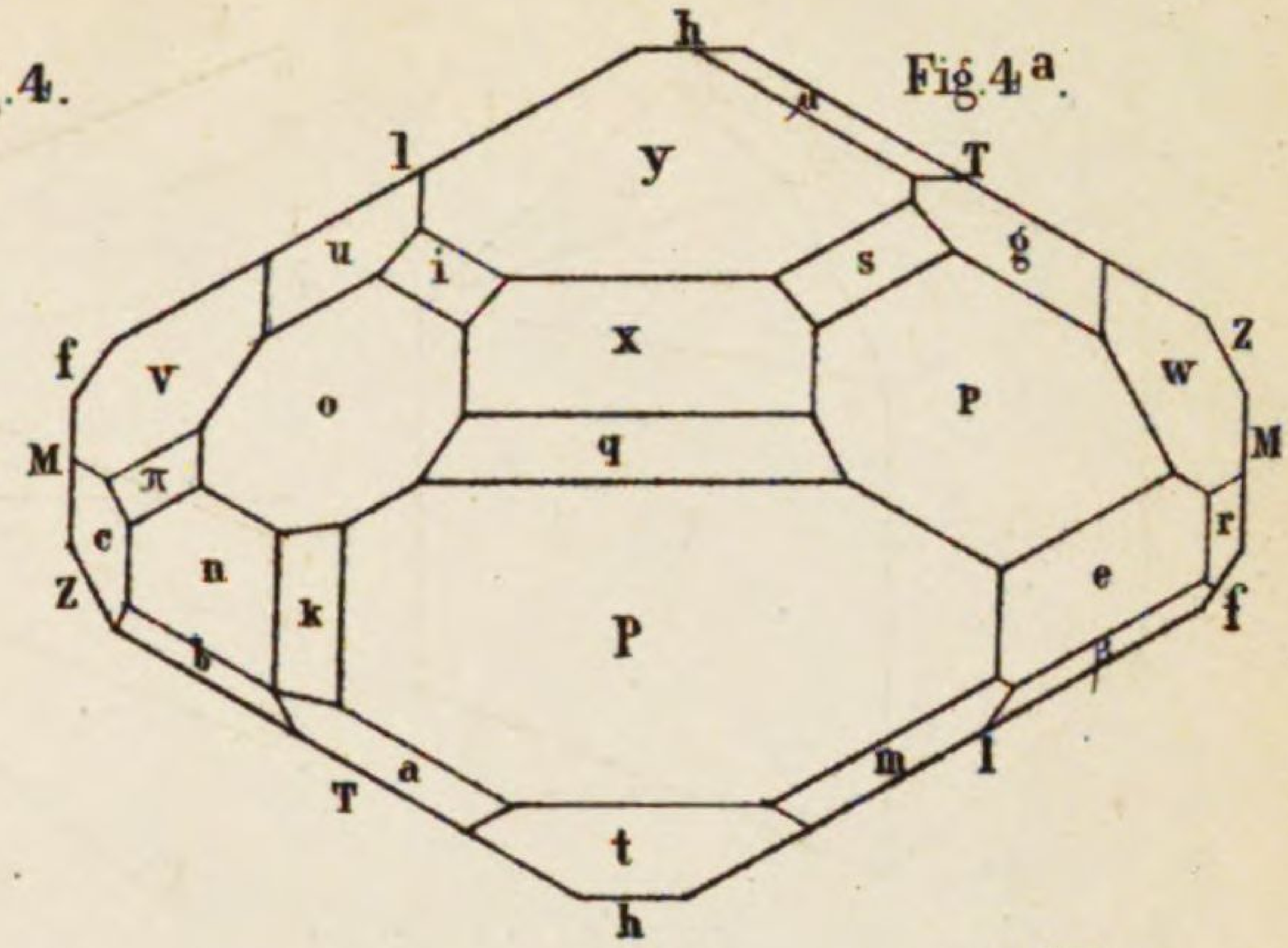


Fig. 5.

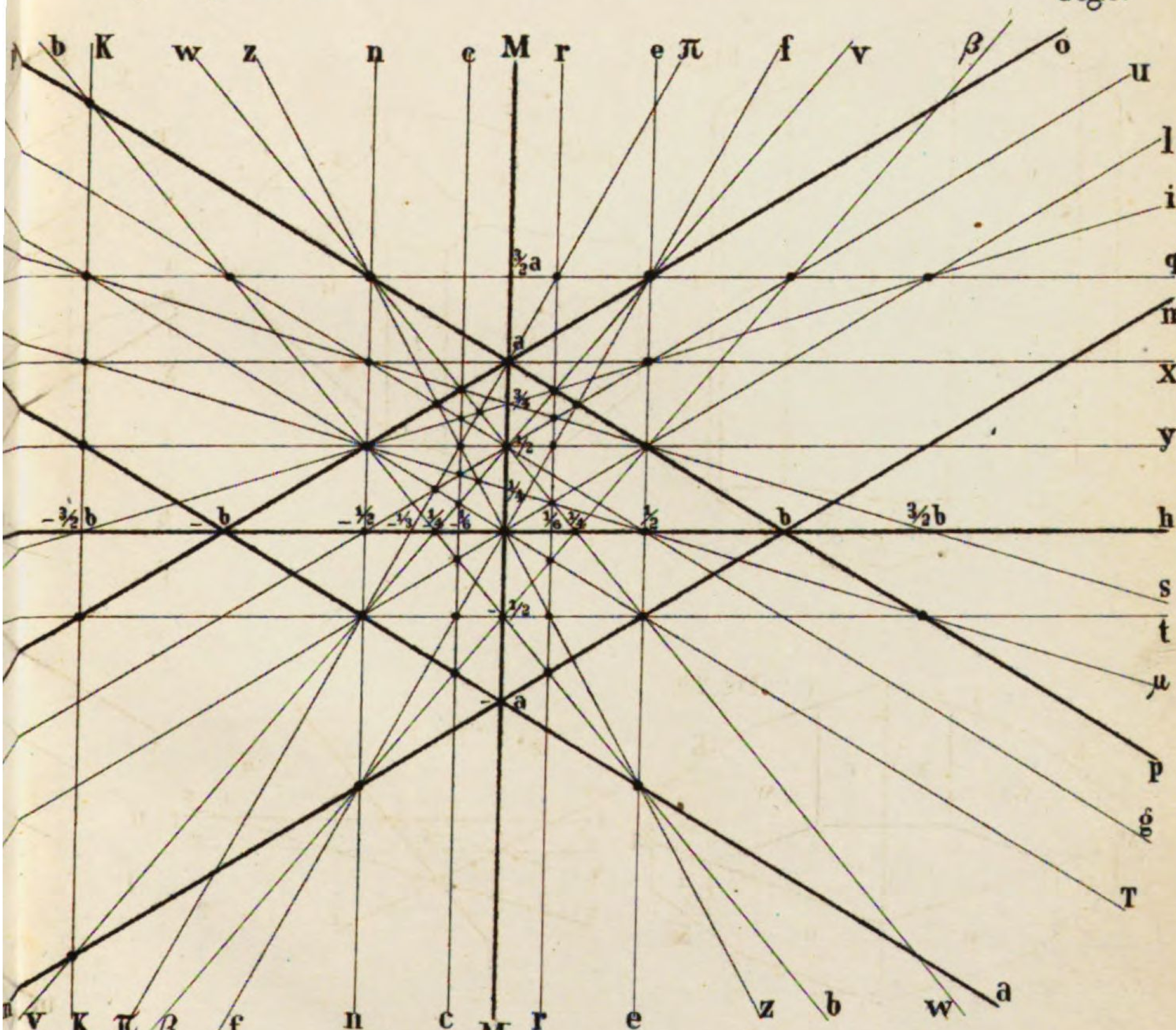
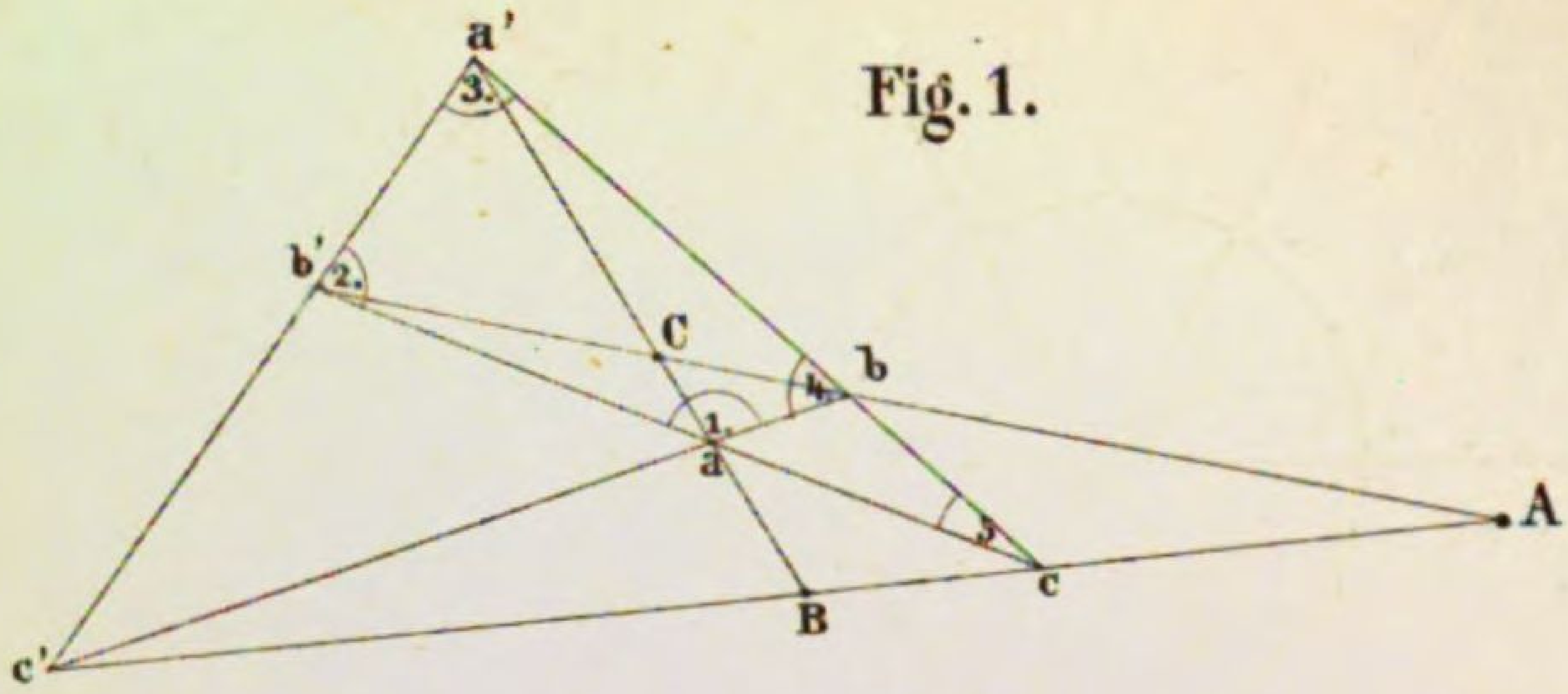


Fig. 1.



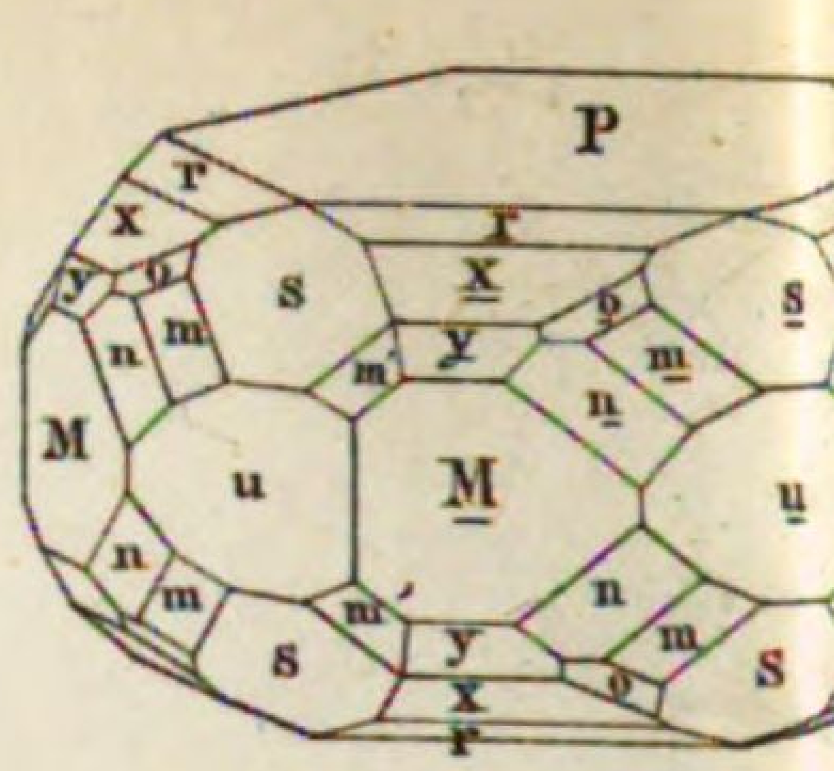
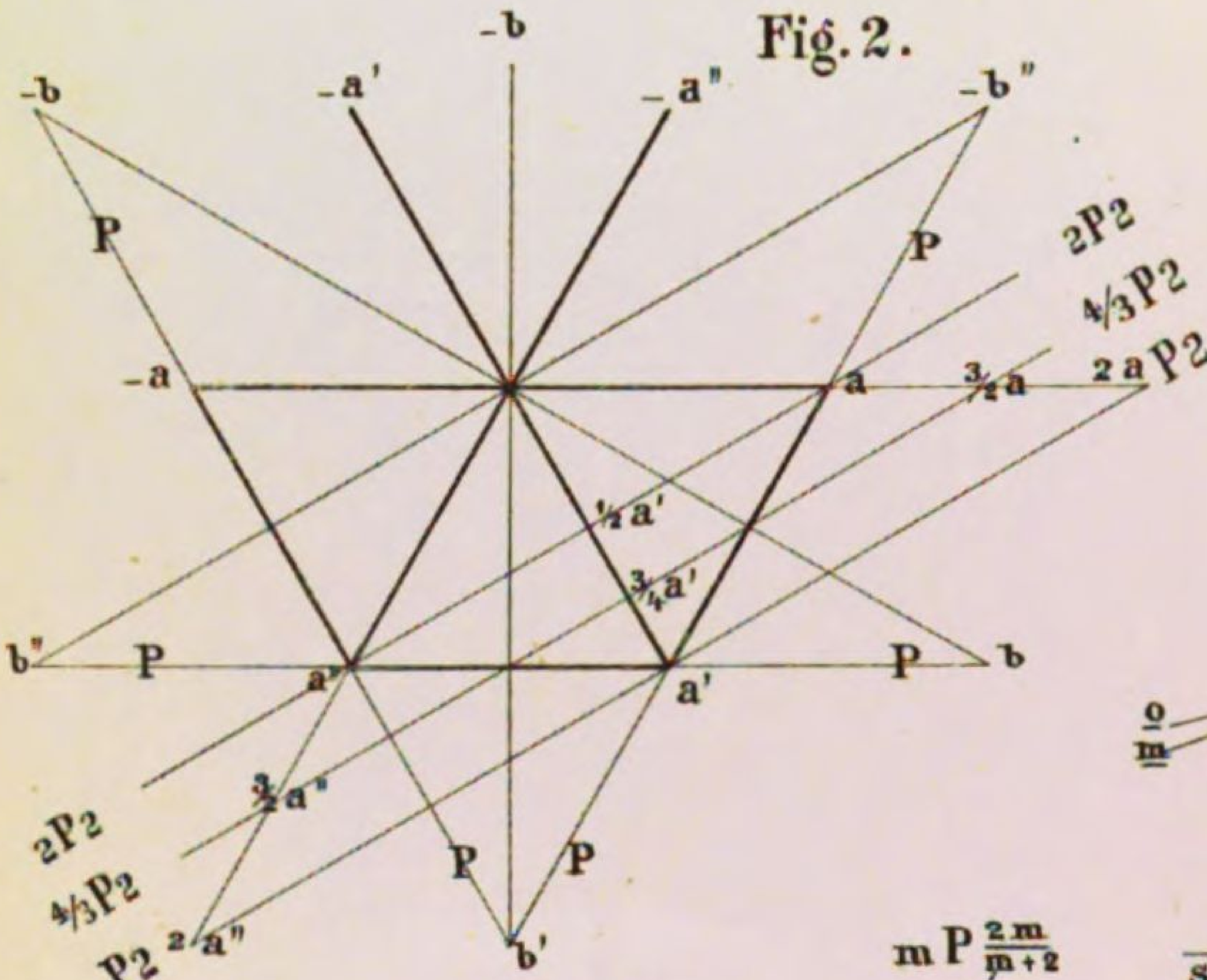


Fig. 2.



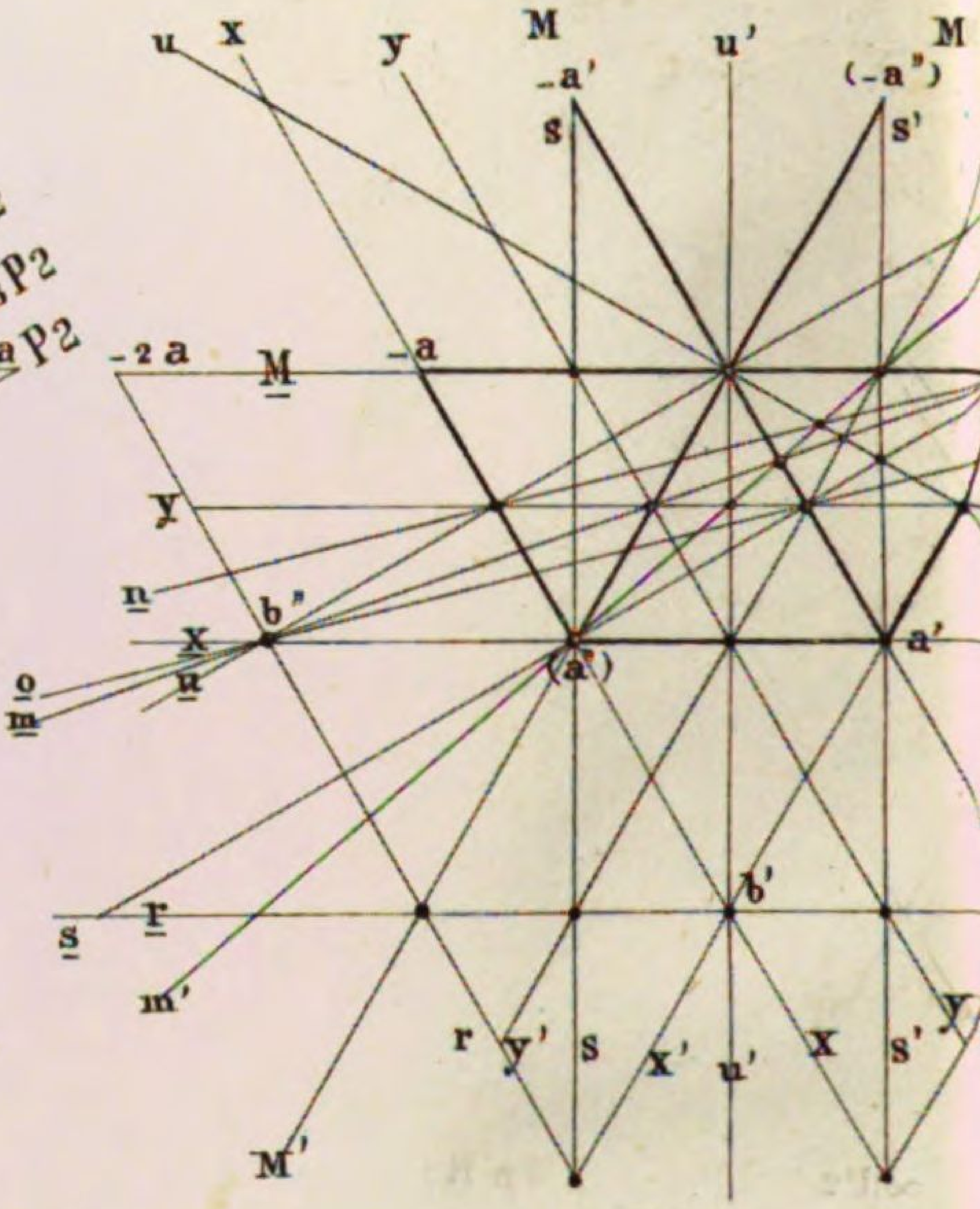


Fig 7.

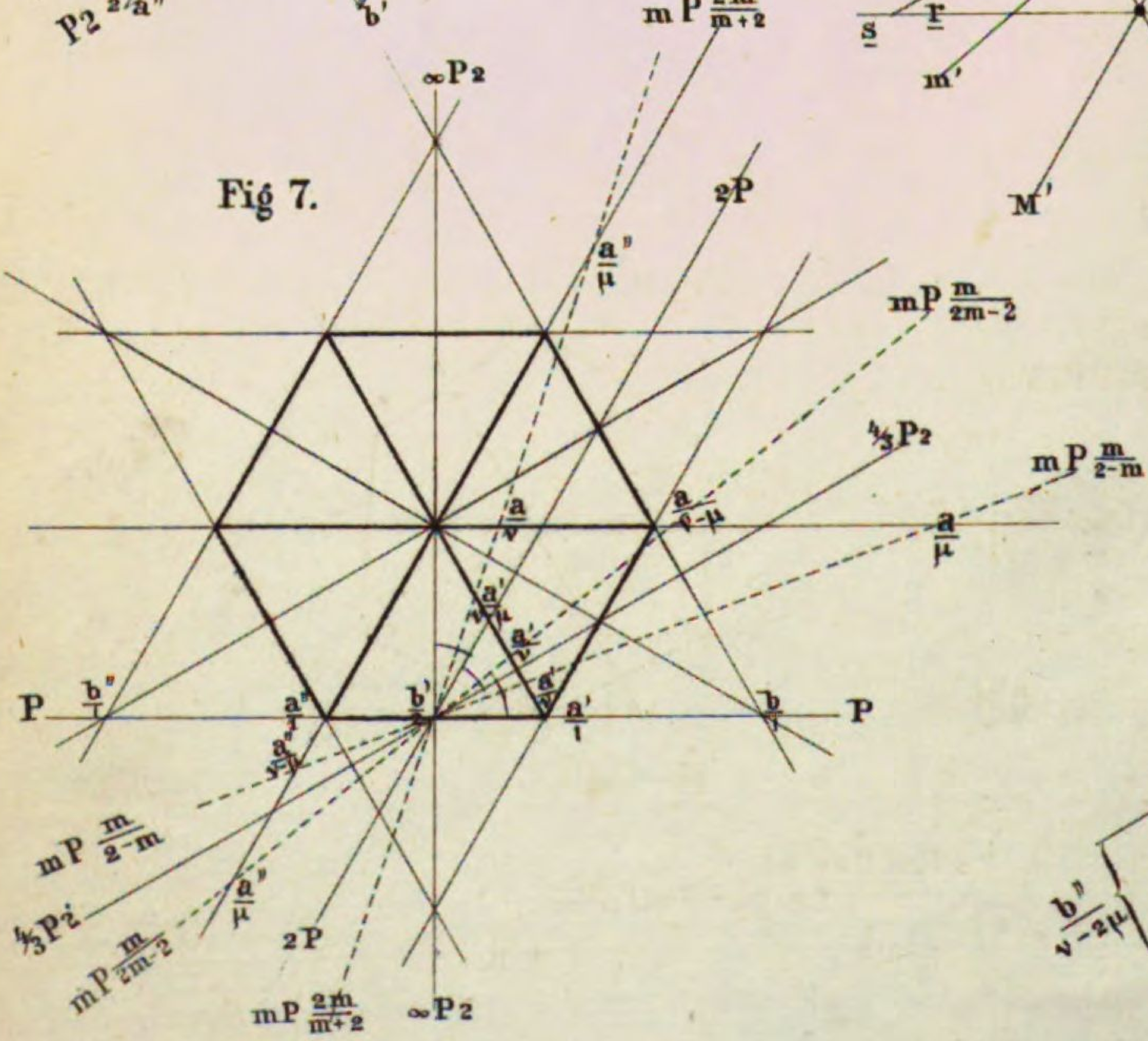


Fig. 8.

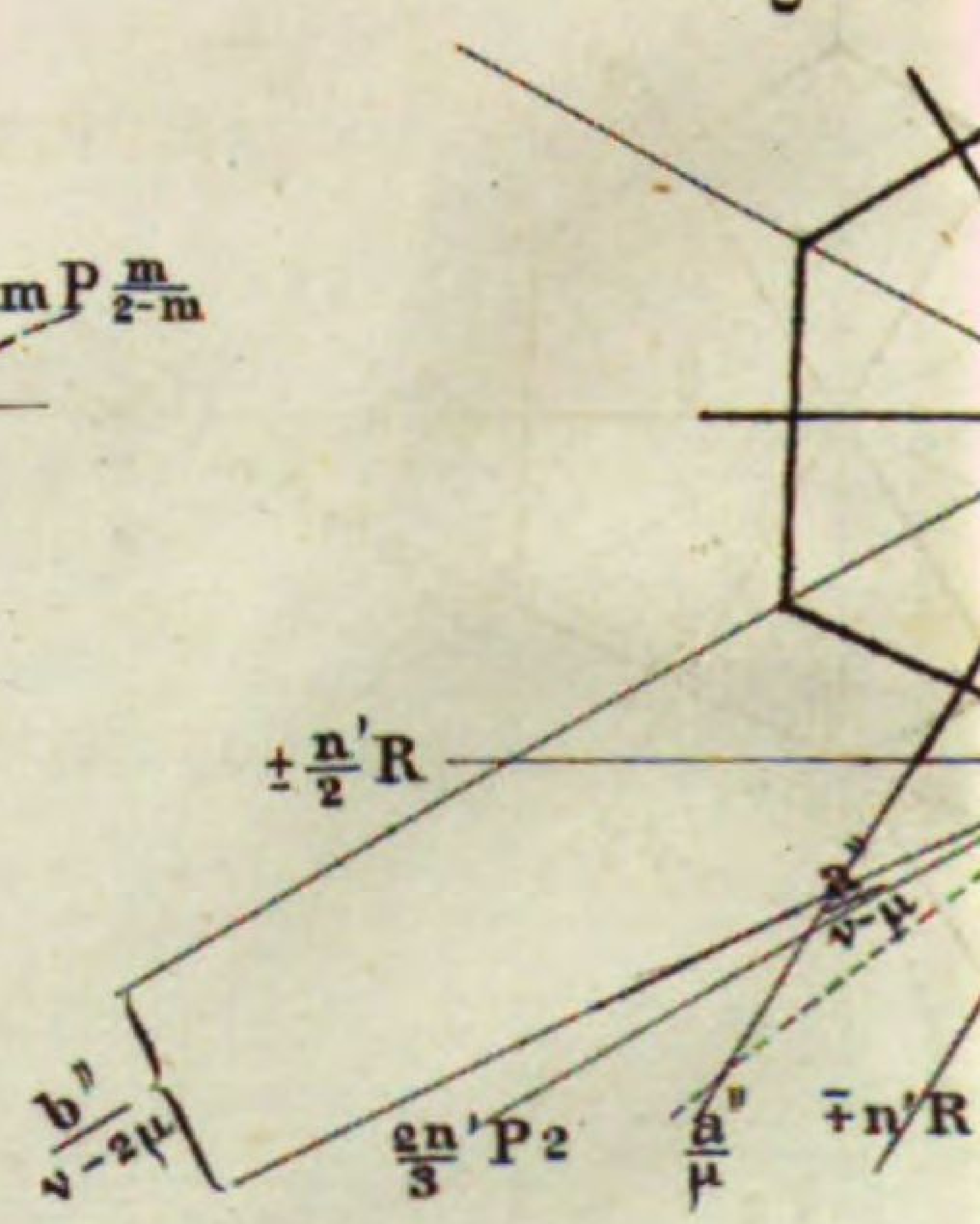


Fig. 3.

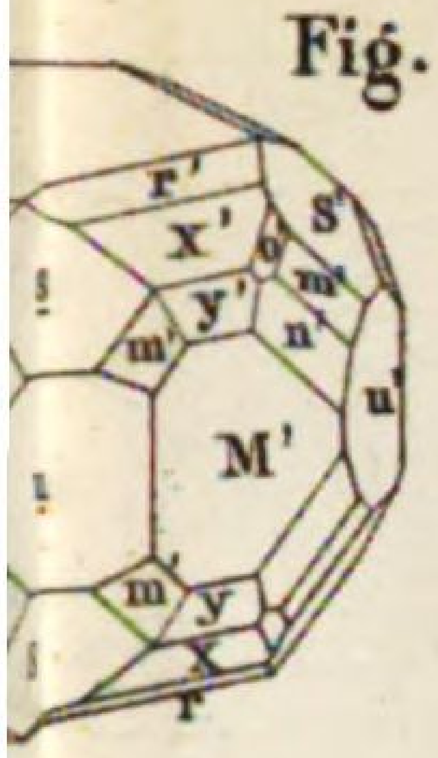


Fig. 4.

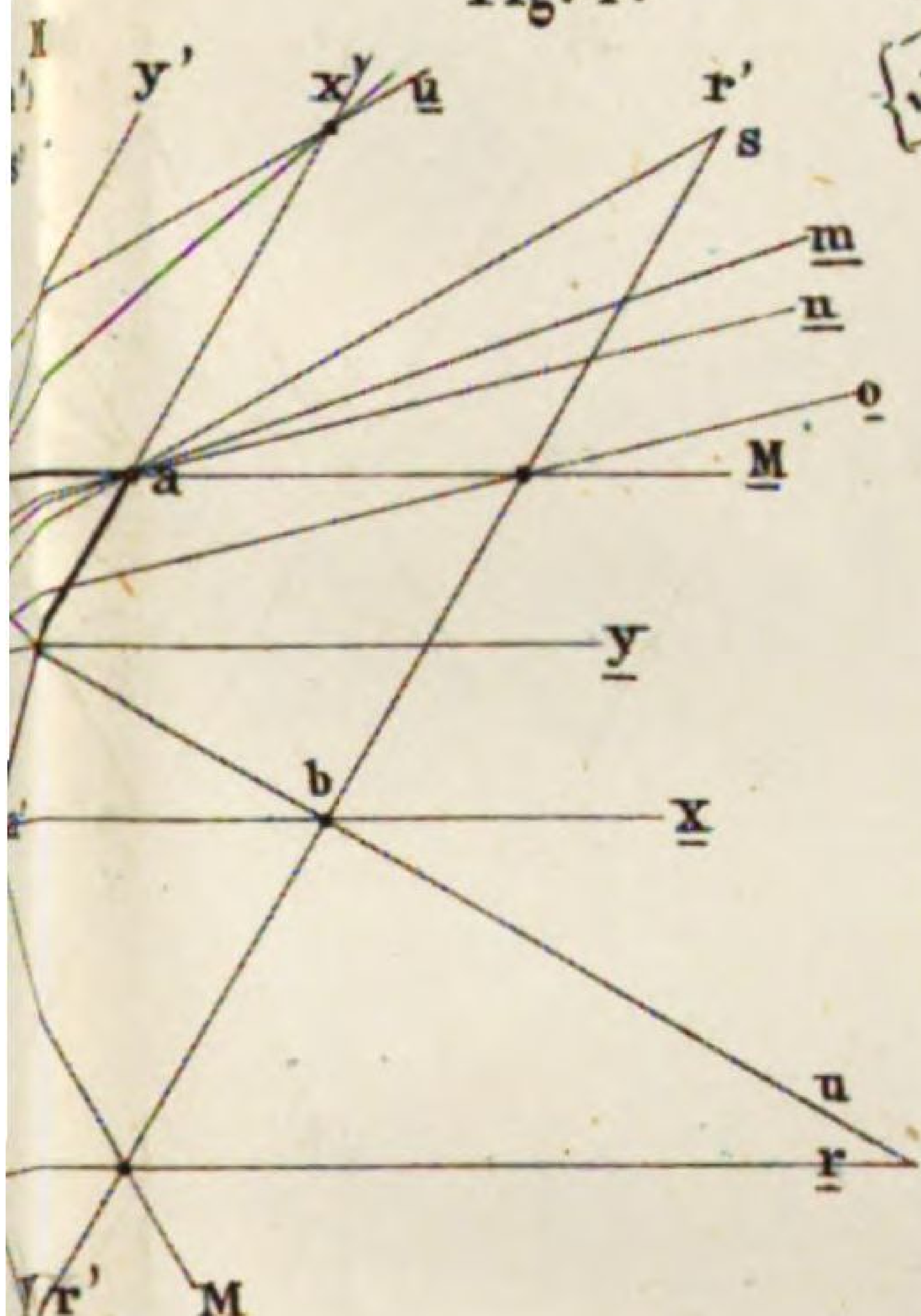


Fig. 5.

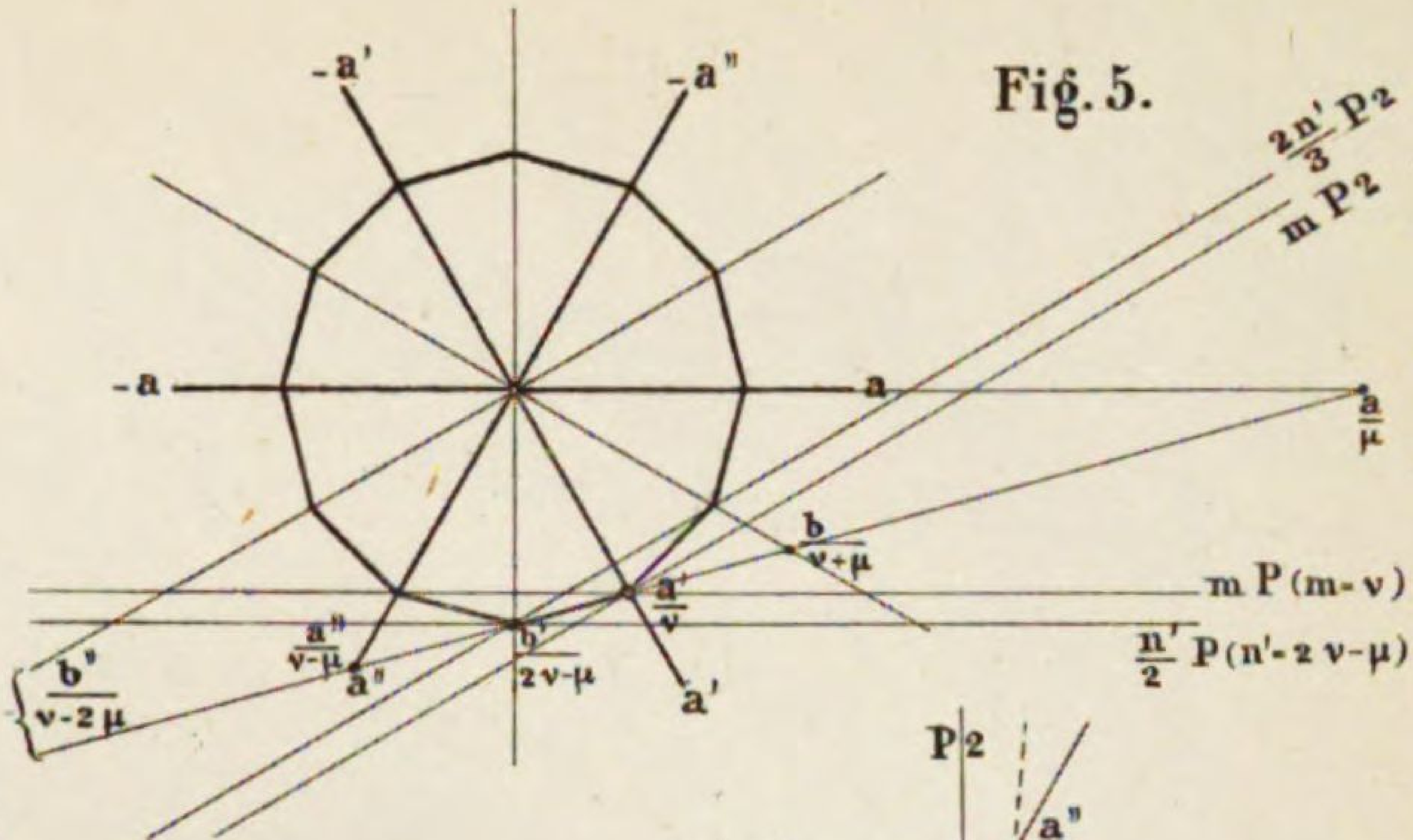
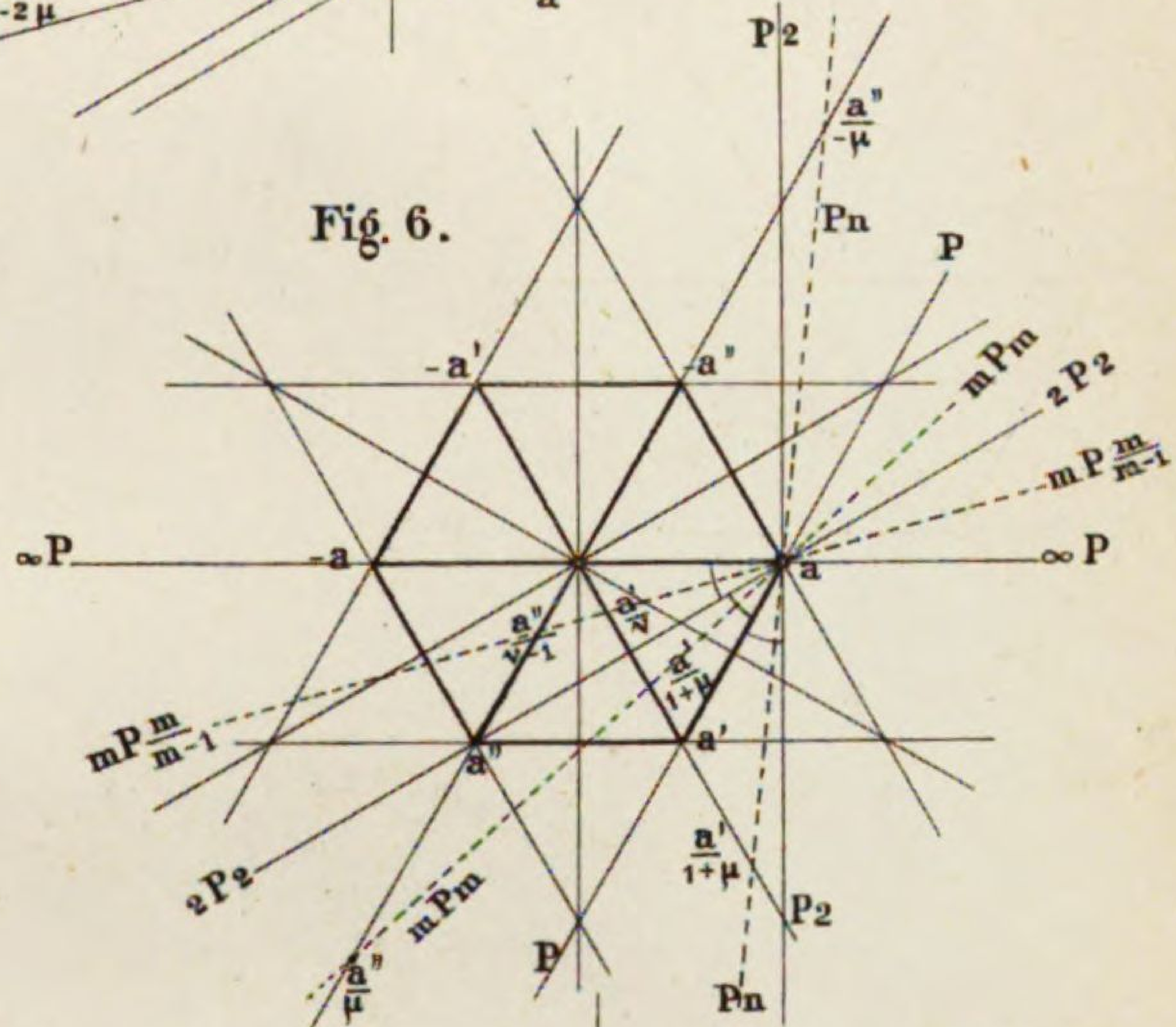


Fig. 6.



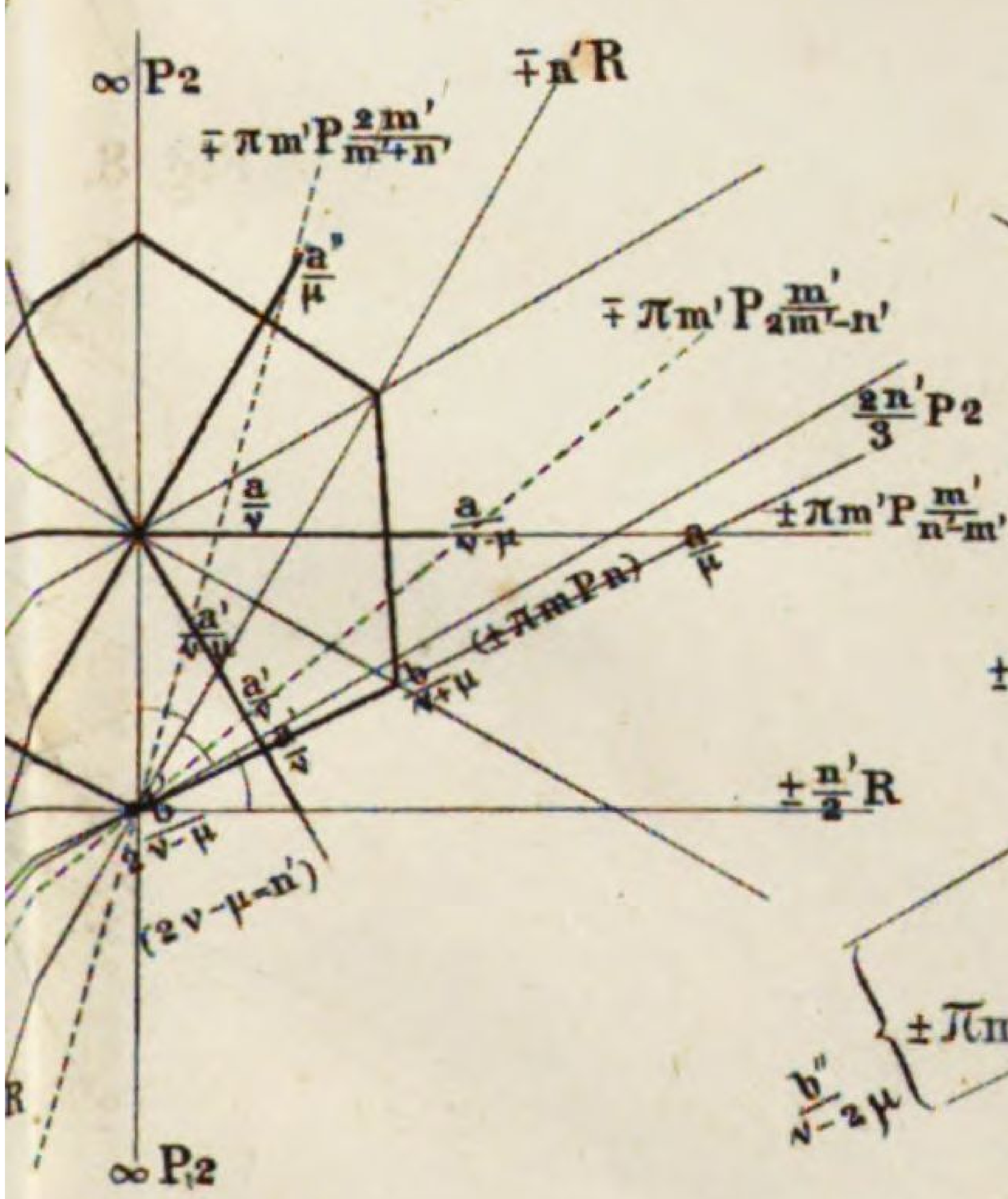
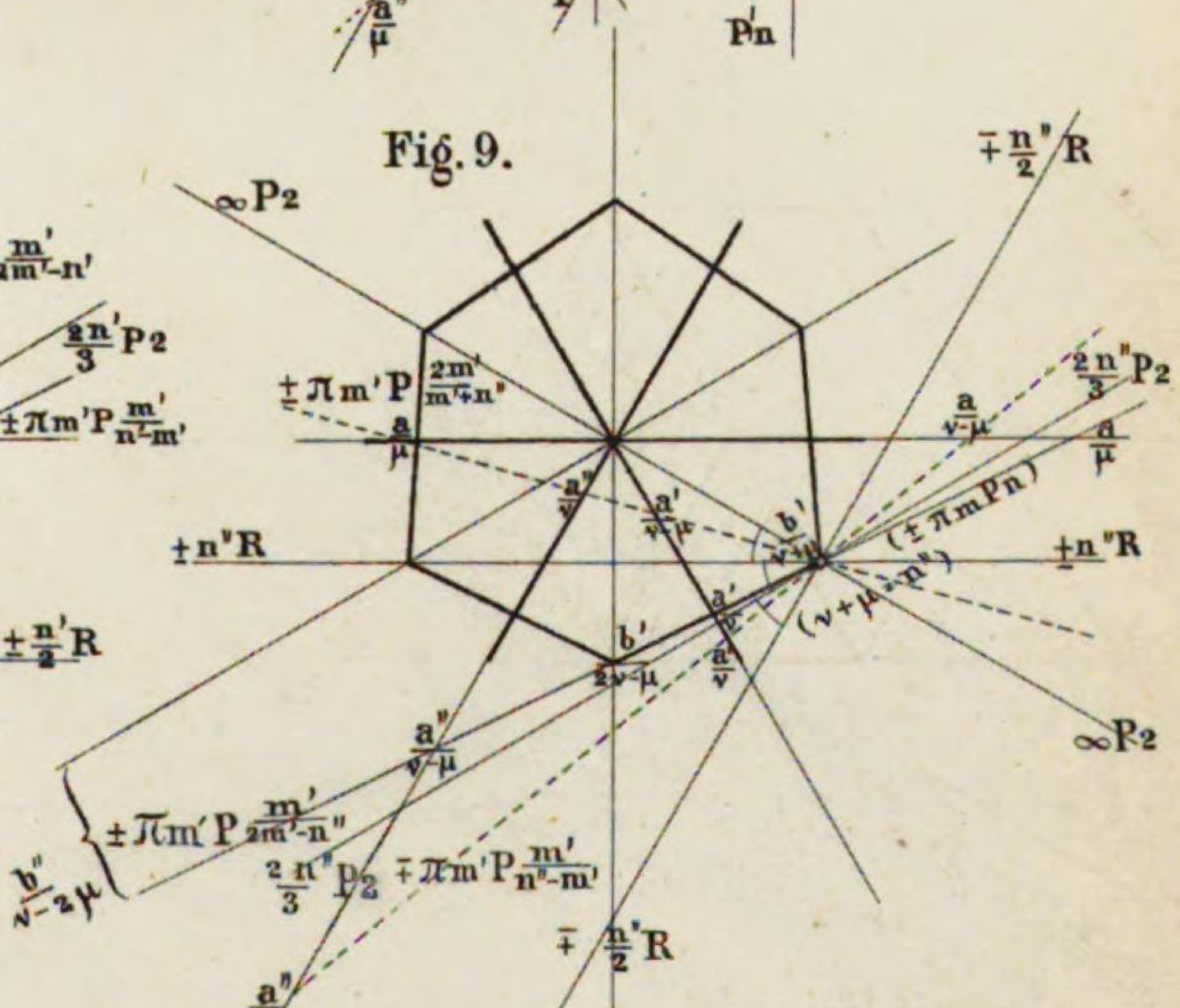
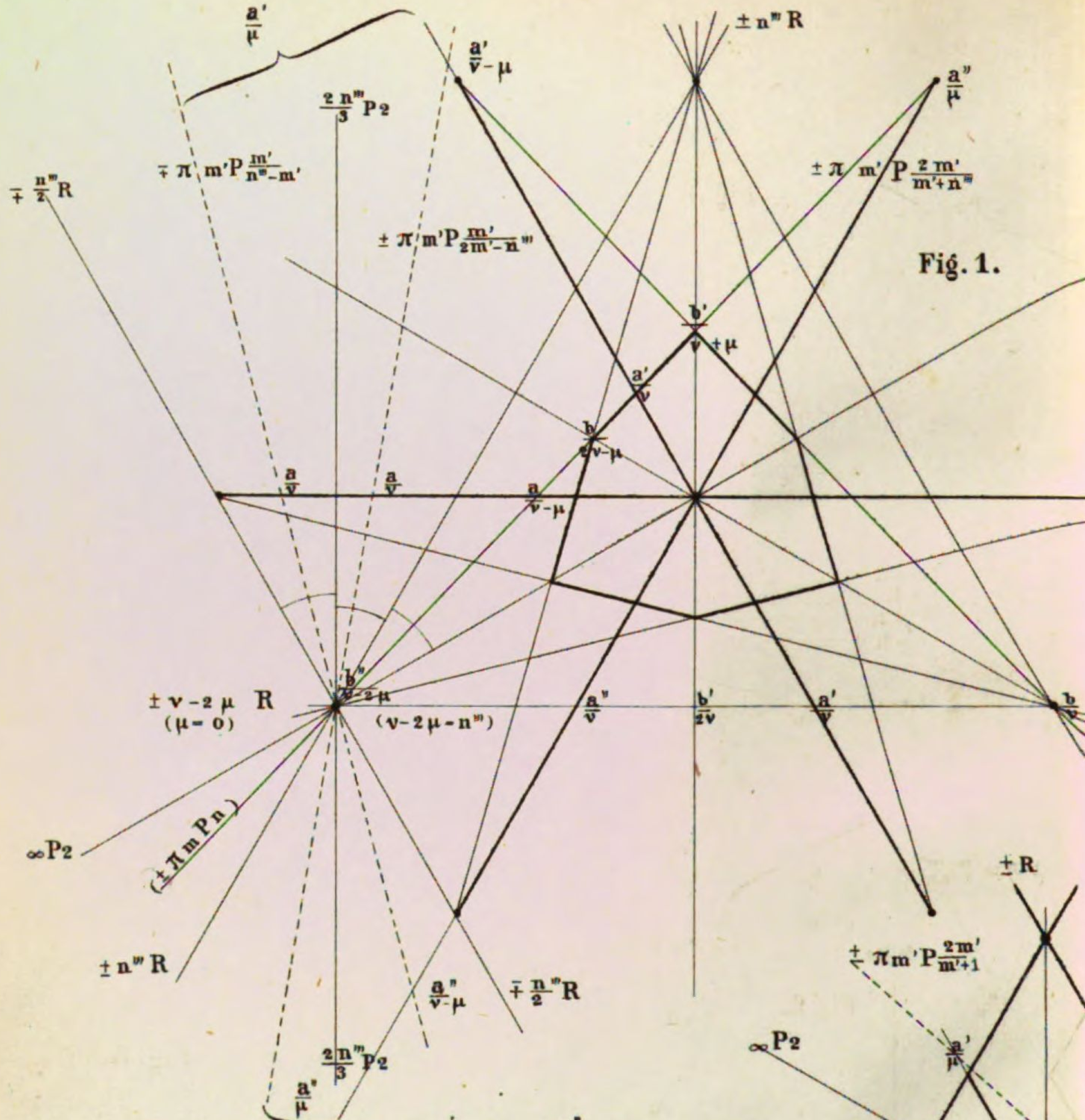


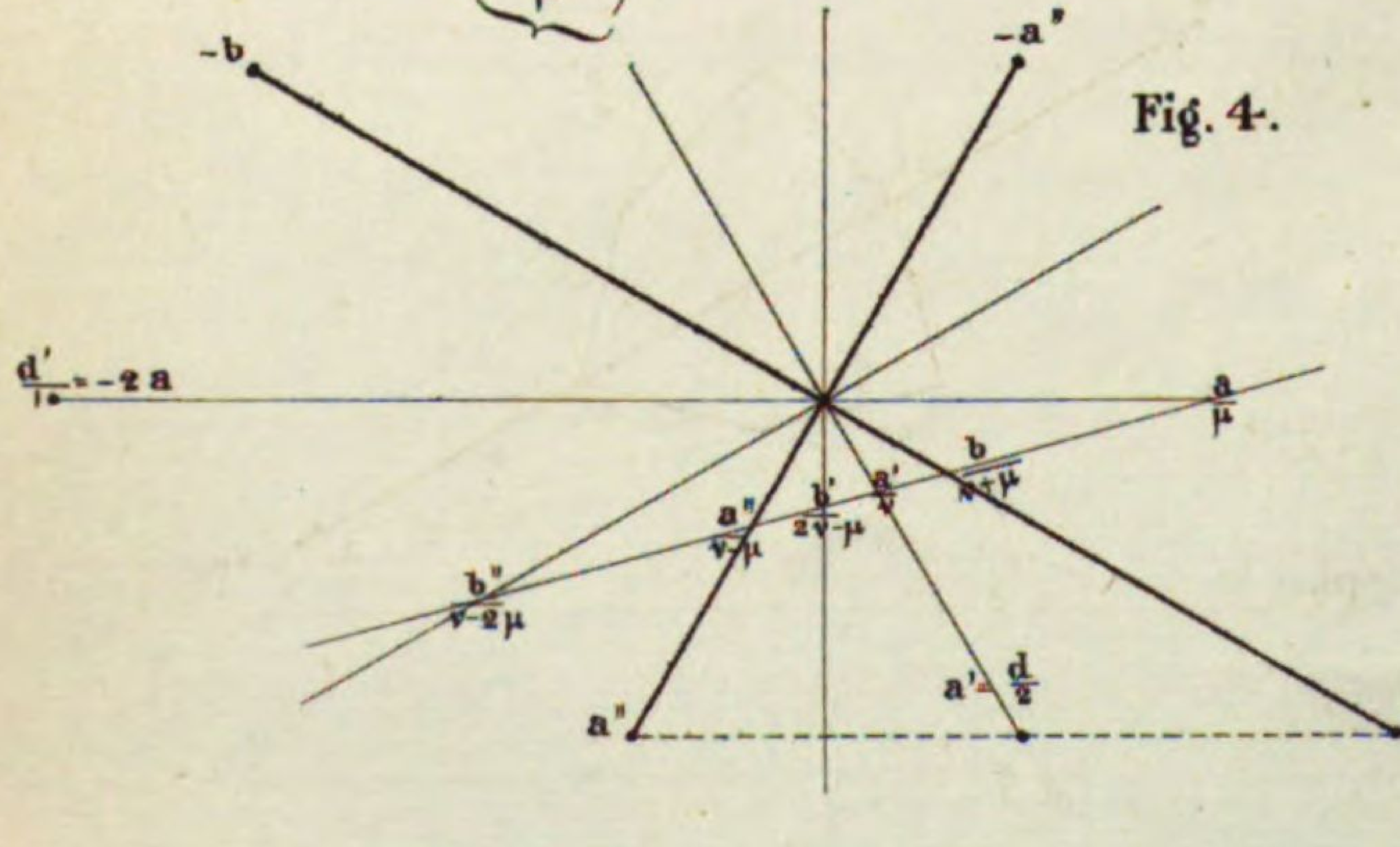
Fig. 9.





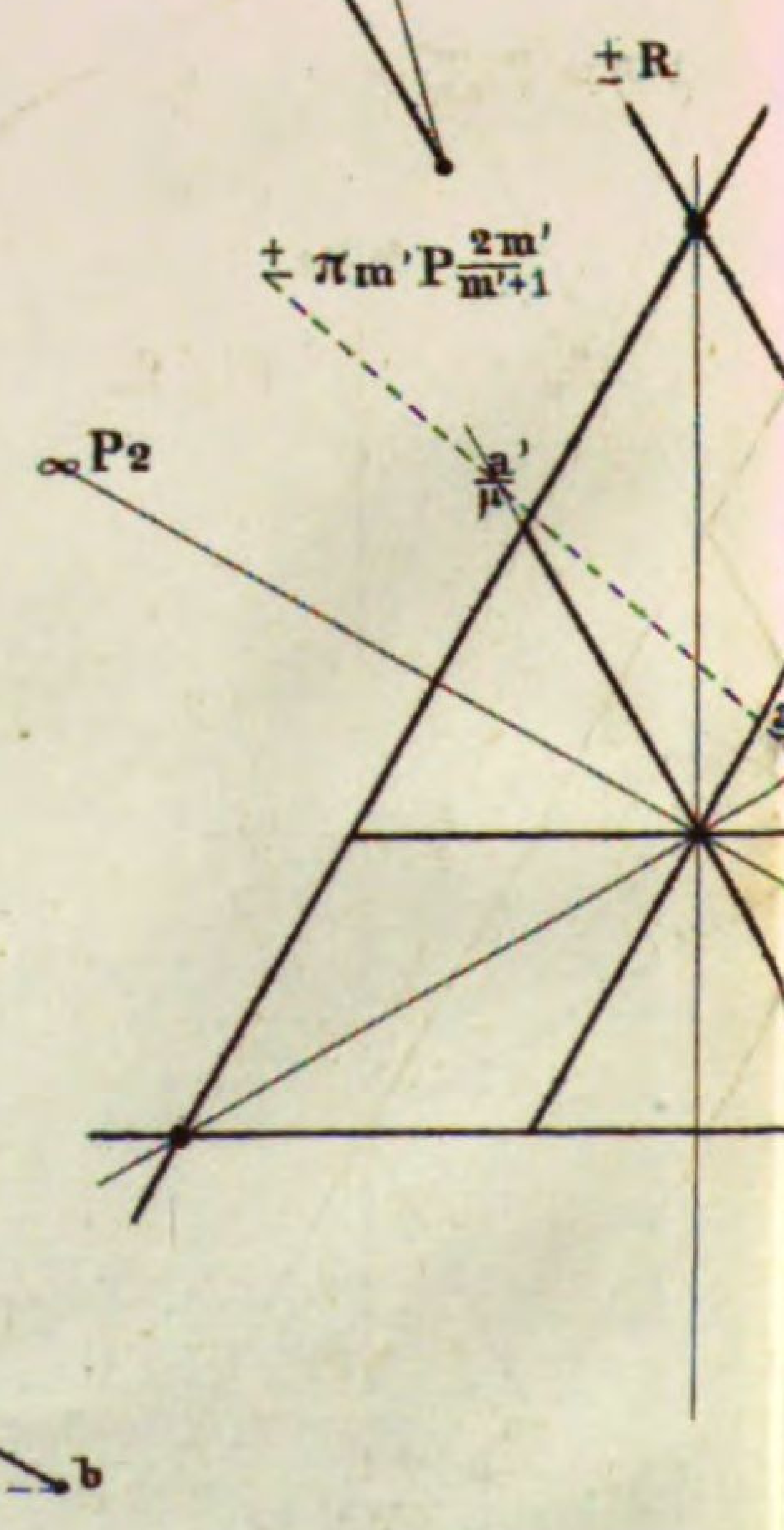
± n''' R
∓ n'''/2 R
∓ π m'P m'/(n'''-m')
± π m'P m'/(2m'-n''')
± π m'P 2m'/(m'+n''')
2n'''/3 P2
± ν - 2μ R
(μ = 0)
(ν - 2μ - n''')
∞P2
(± π m P n)

Fig. 1.



-b
-a''
a''
b
a' = d/2

Fig. 4.



± R
± π m'P 2m'/(m'+1)
∞P2



Fig. 3.

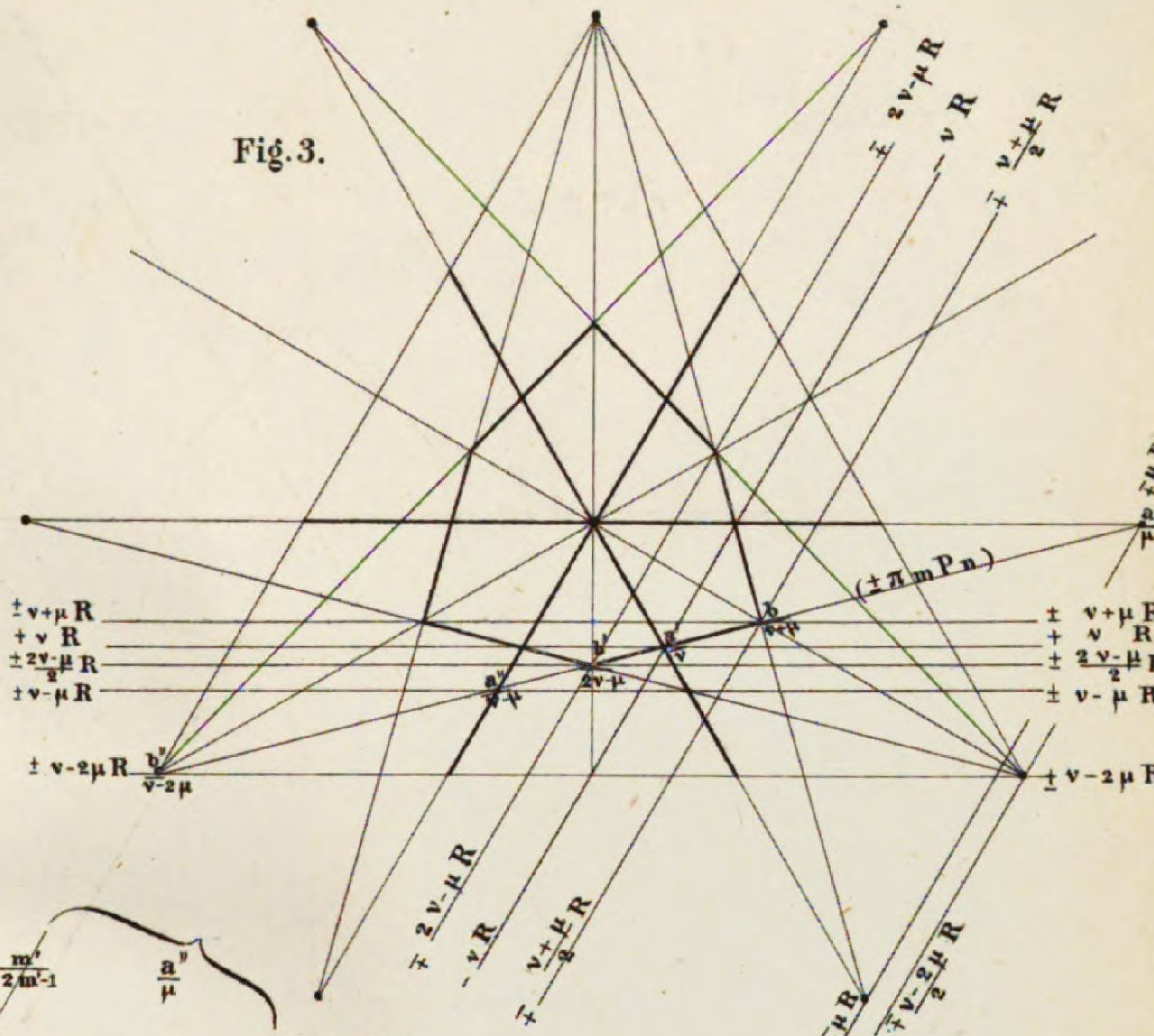


Fig. 2.

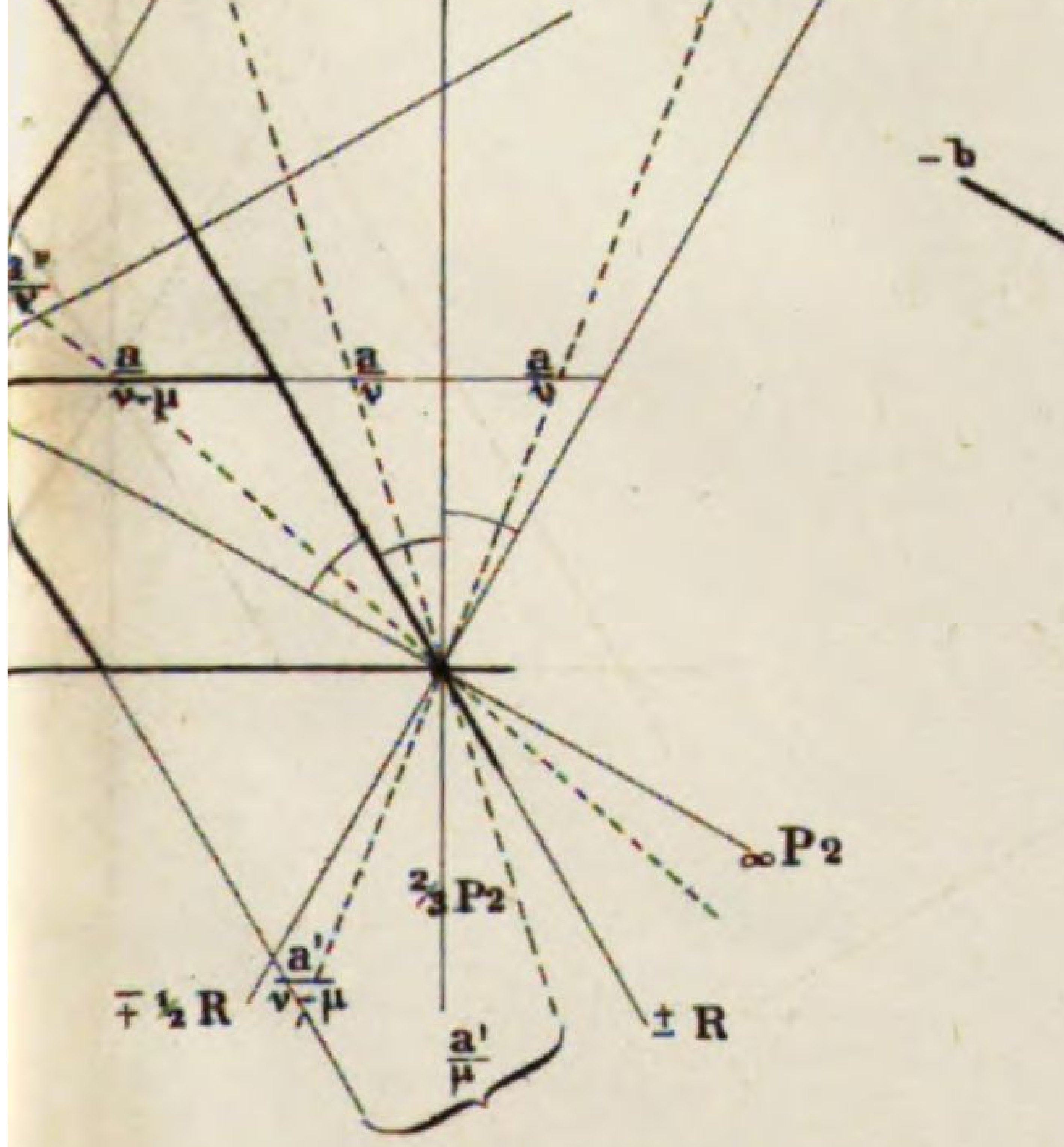
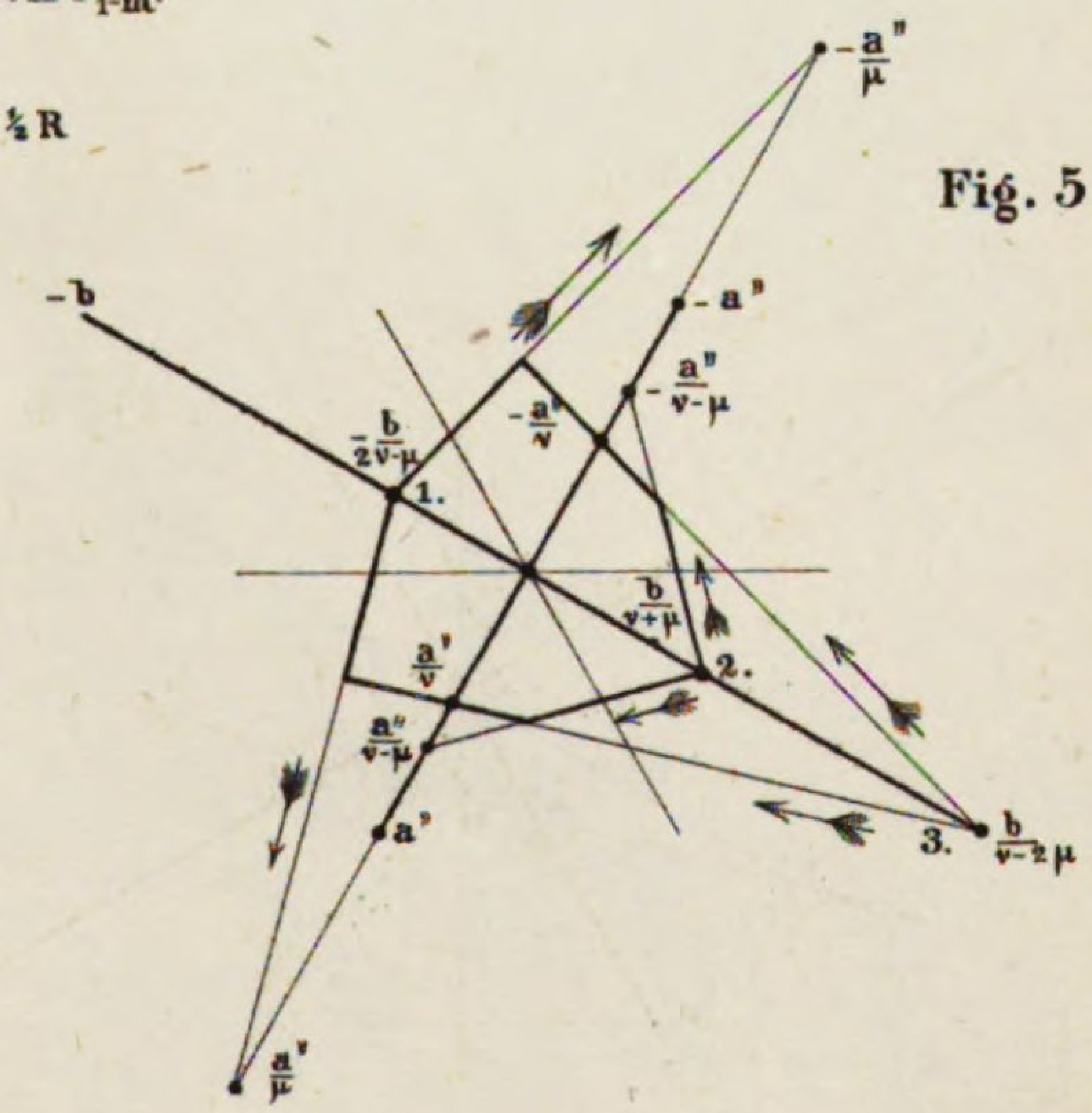


Fig. 5.



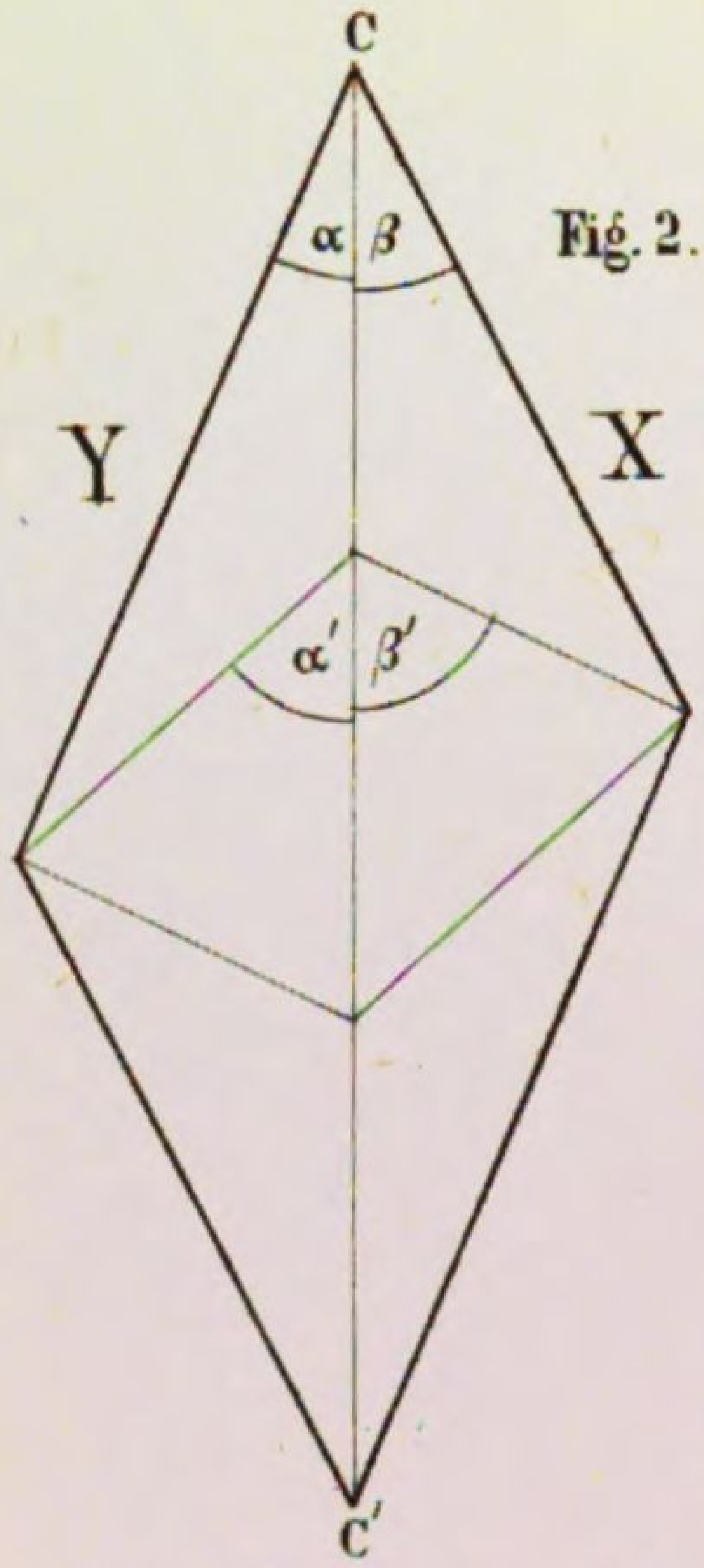


Fig. 2.

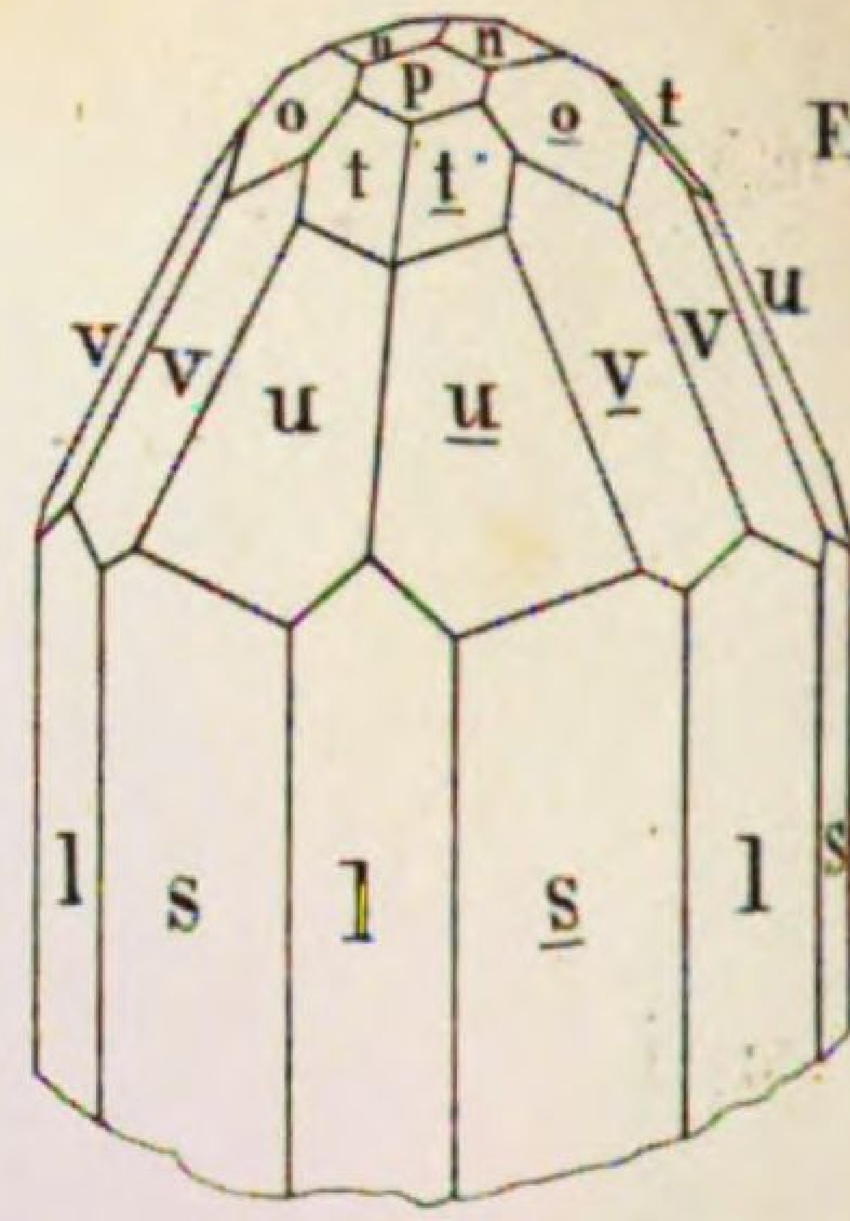


Fig. 3.

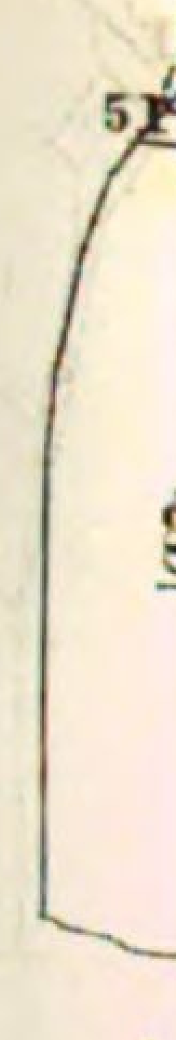


Fig. 1.

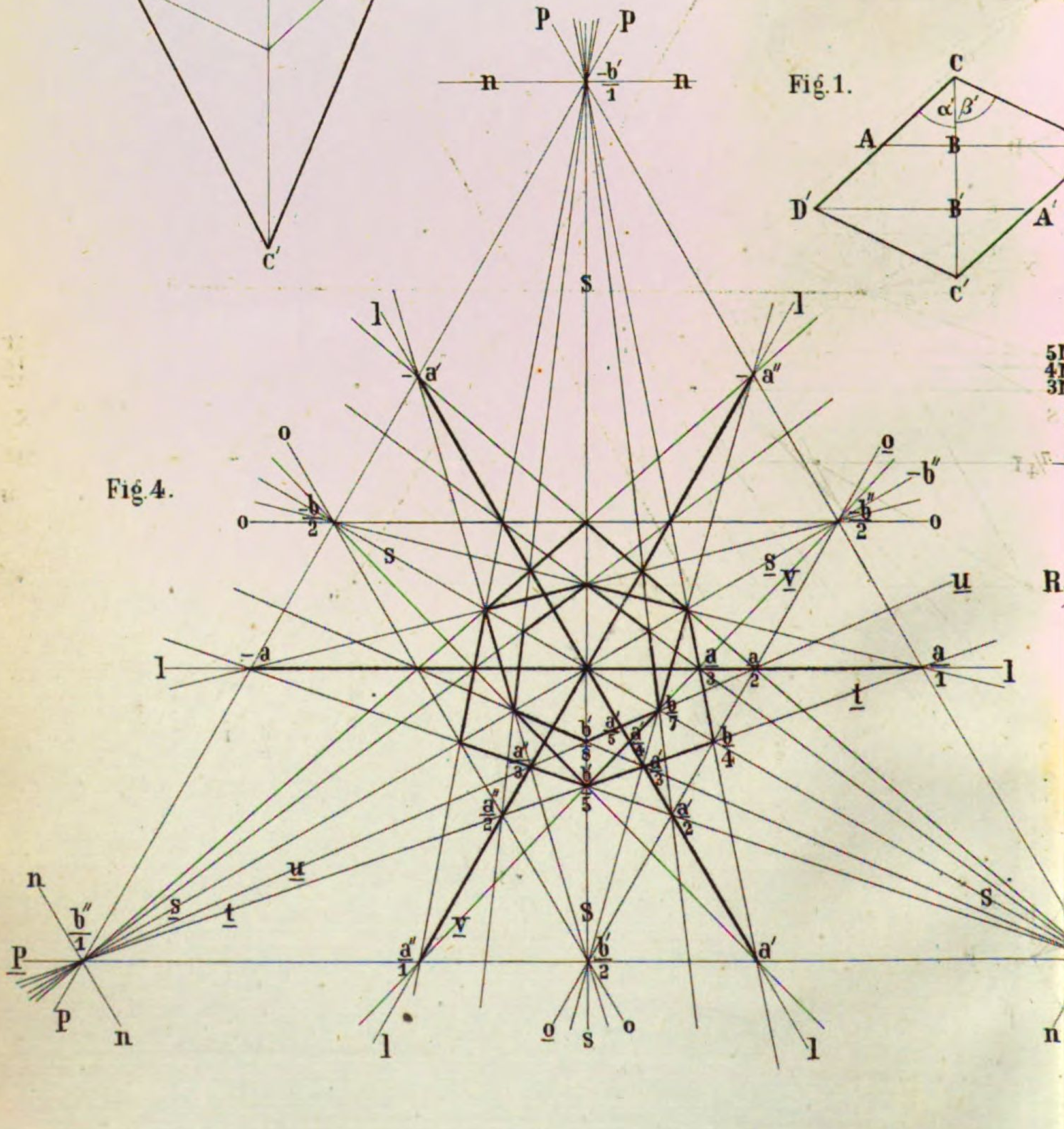


Fig. 4.

Fig. 5.

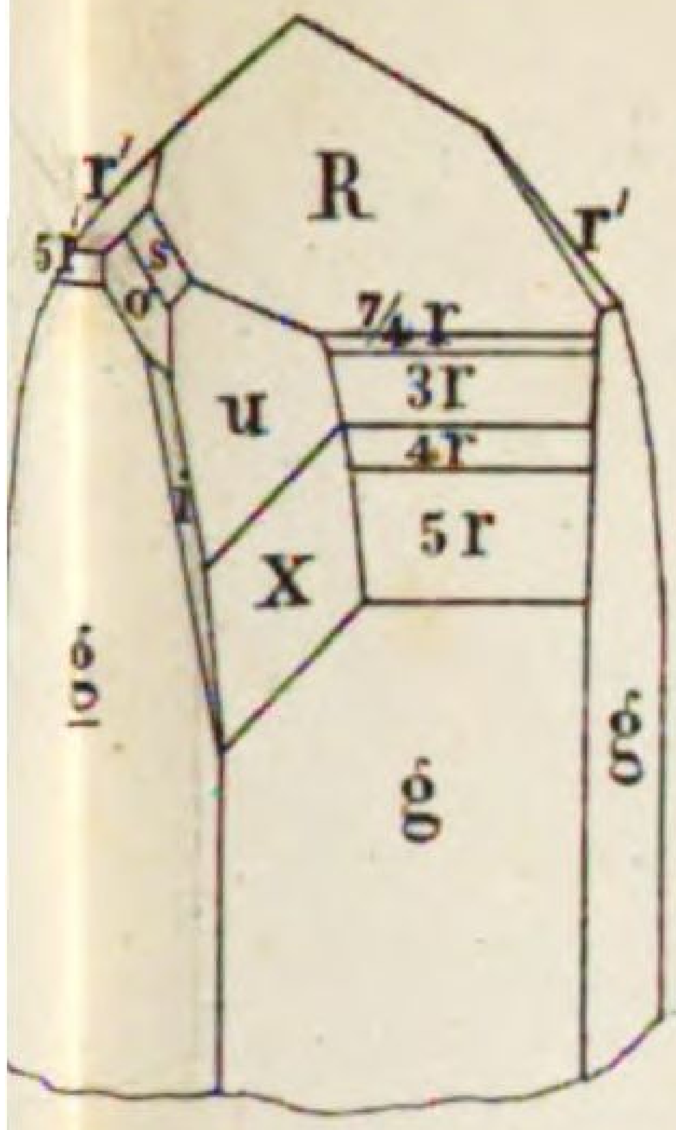
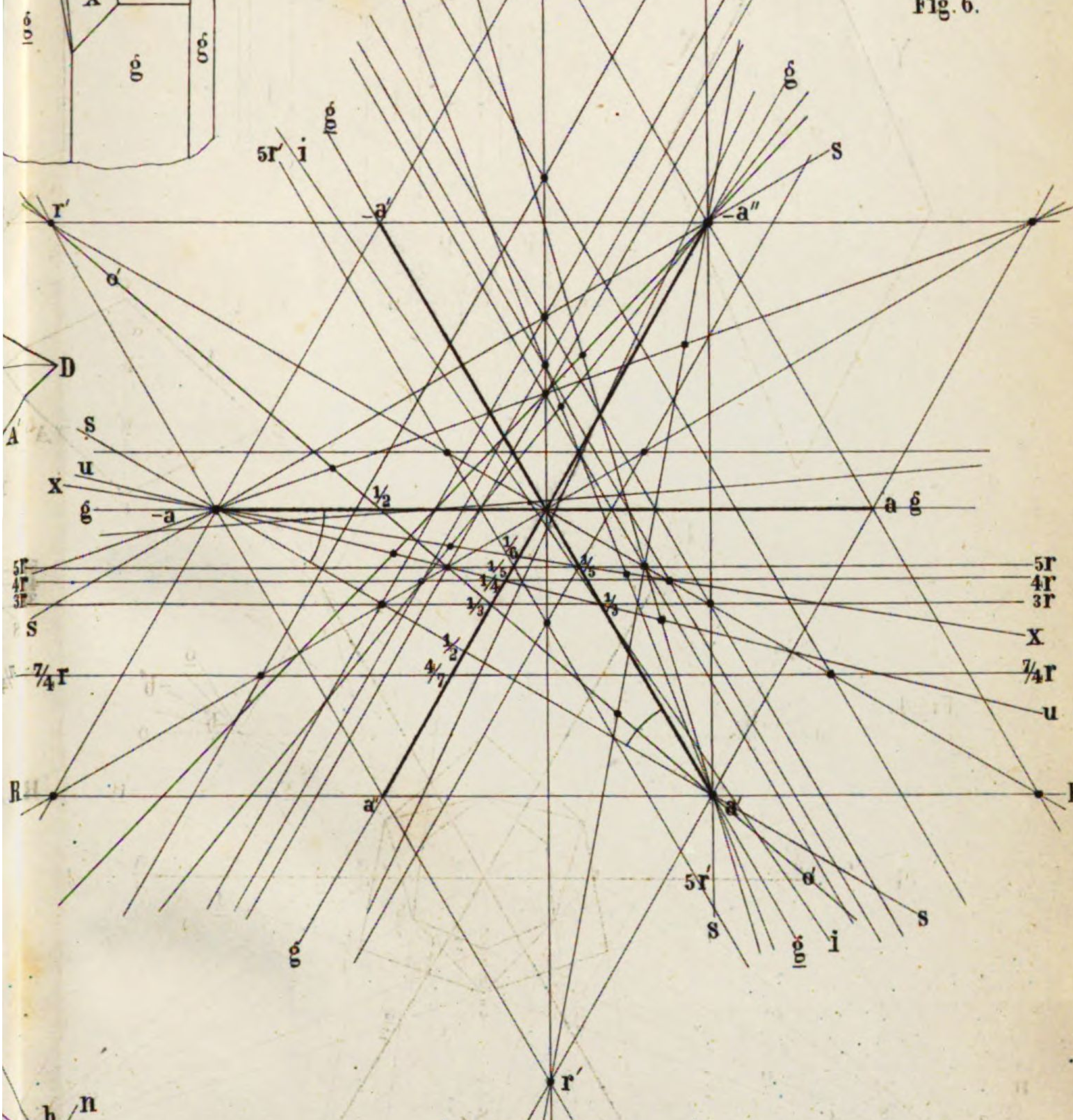
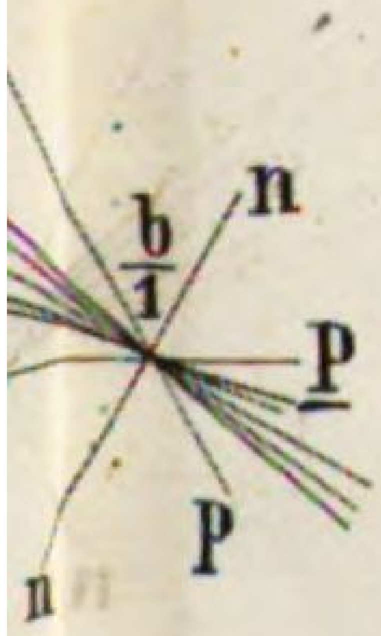


Fig. 6.





Lit. G. Ebenhusen, vorm. W. G. Baisch, Stuttgart.

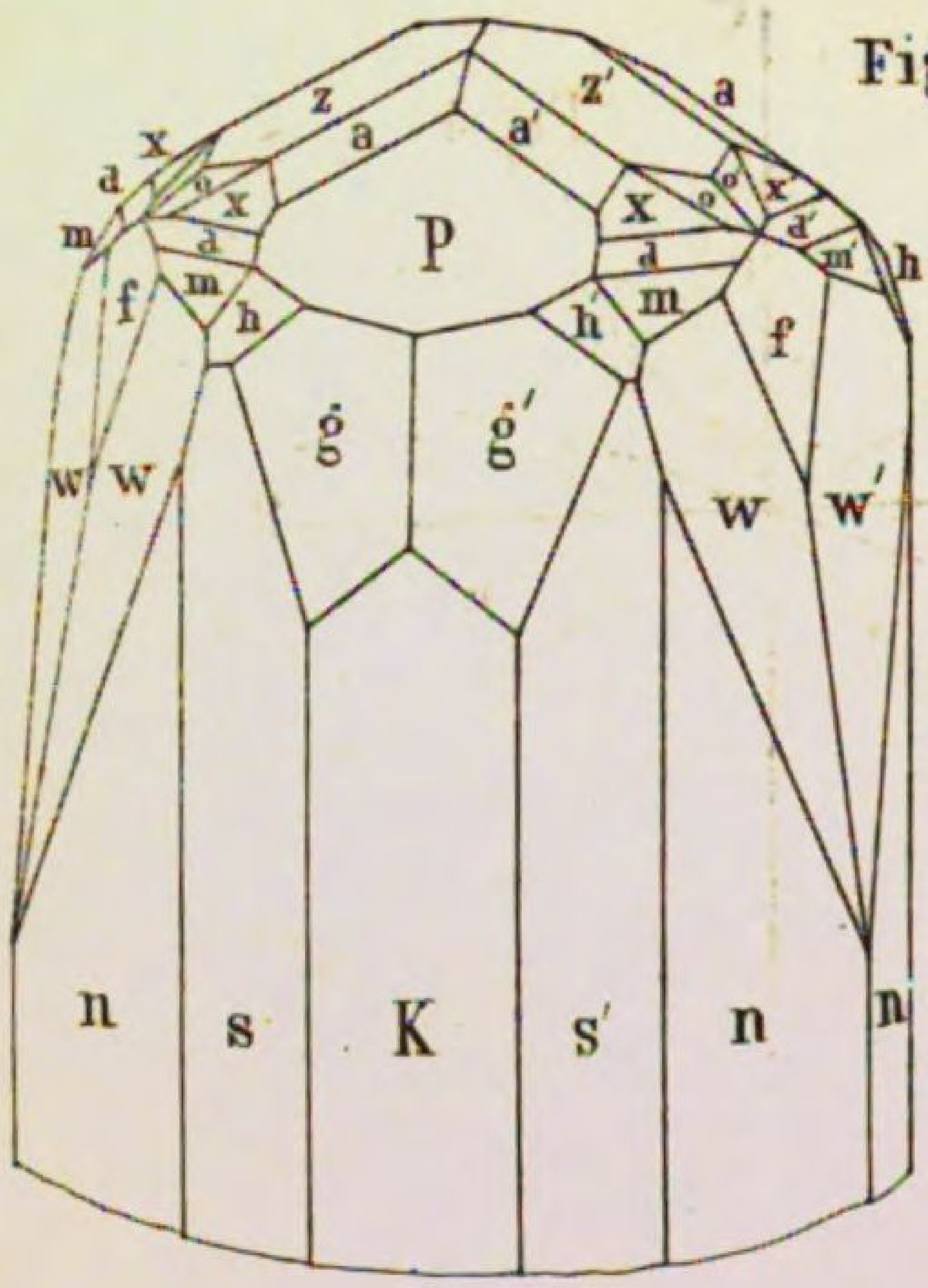


Fig. 1.

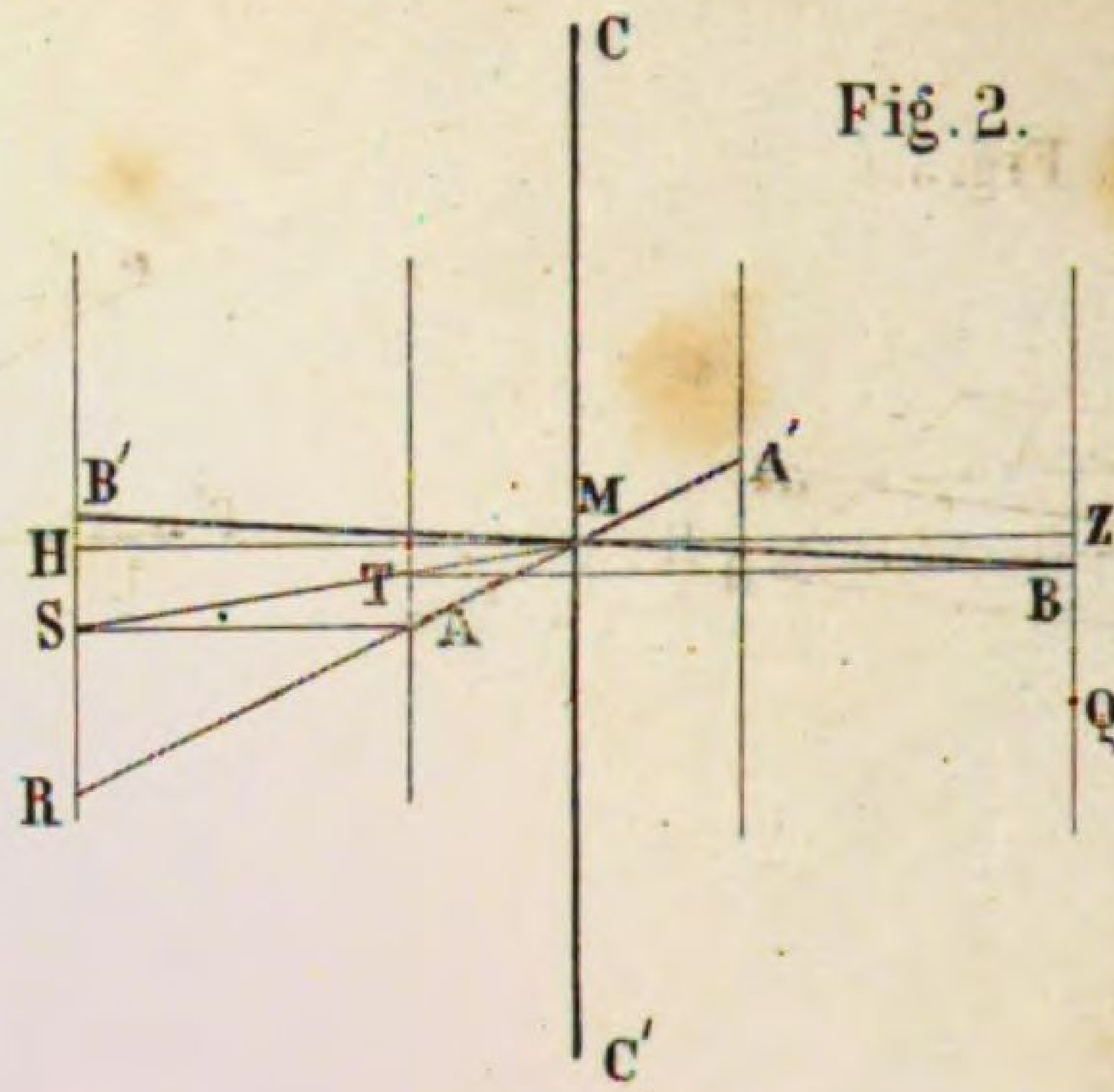
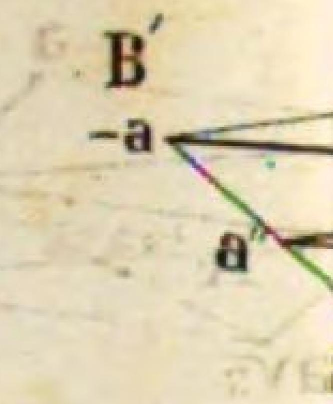


Fig. 2.



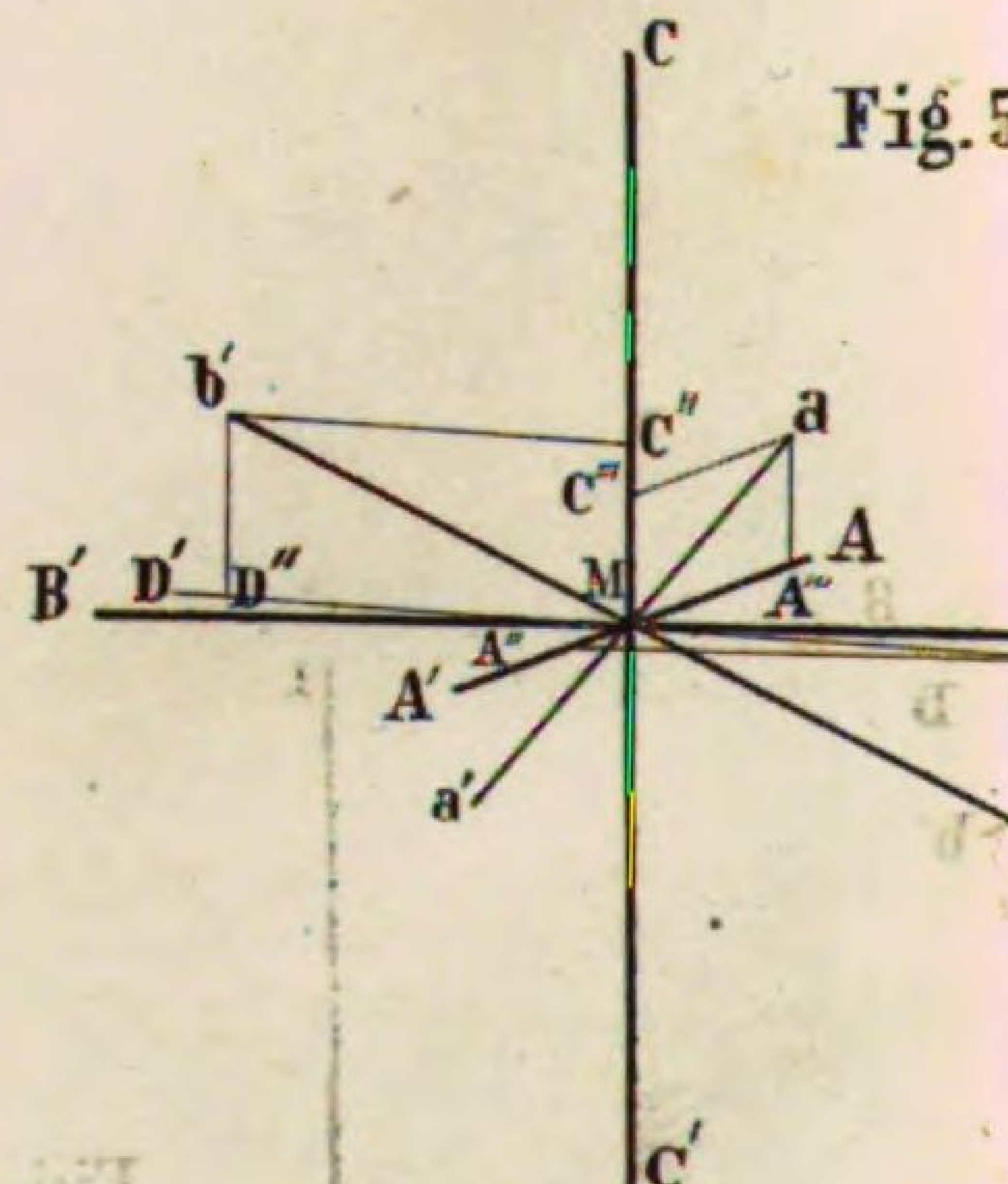


Fig. 5

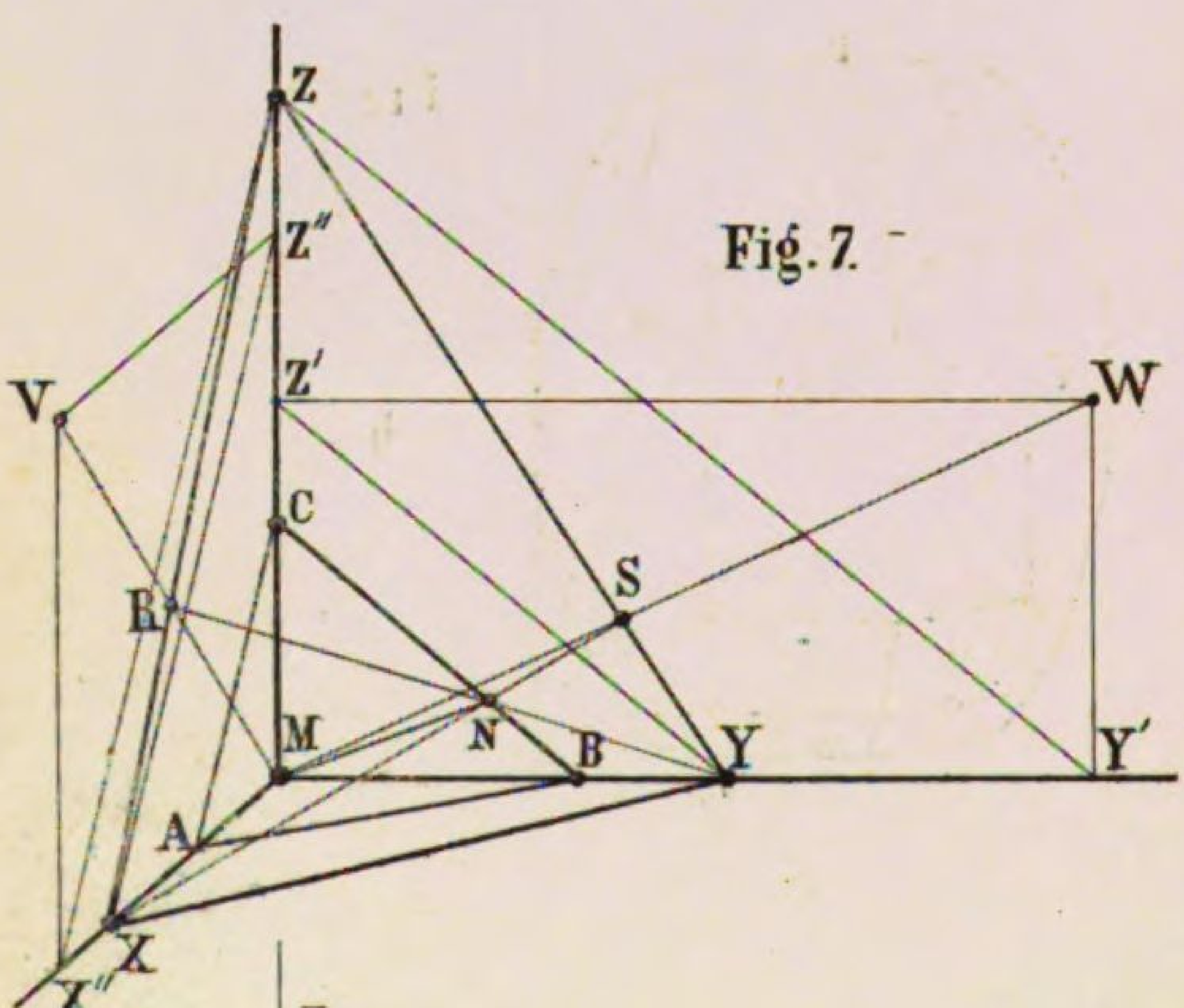


Fig. 7.

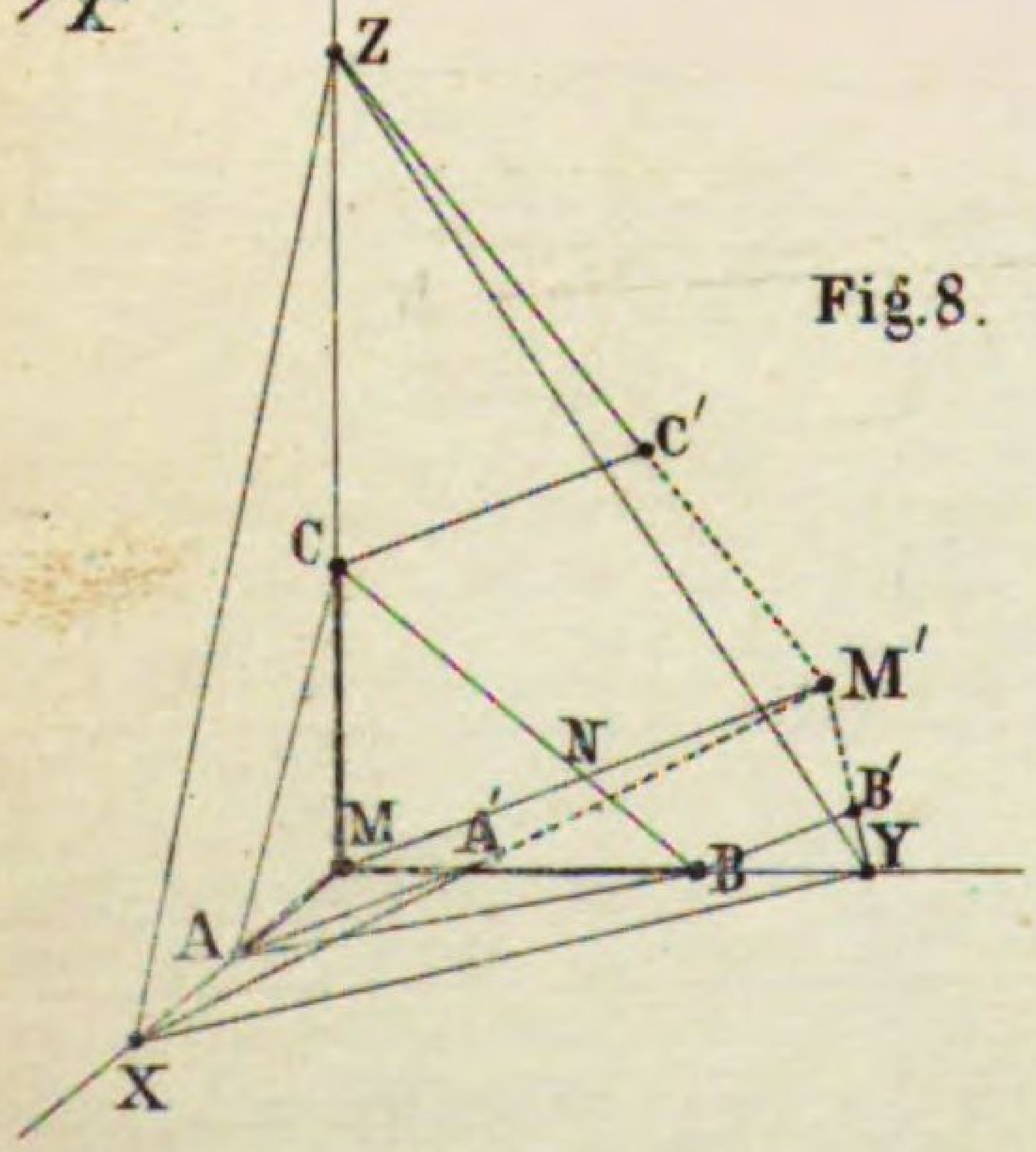
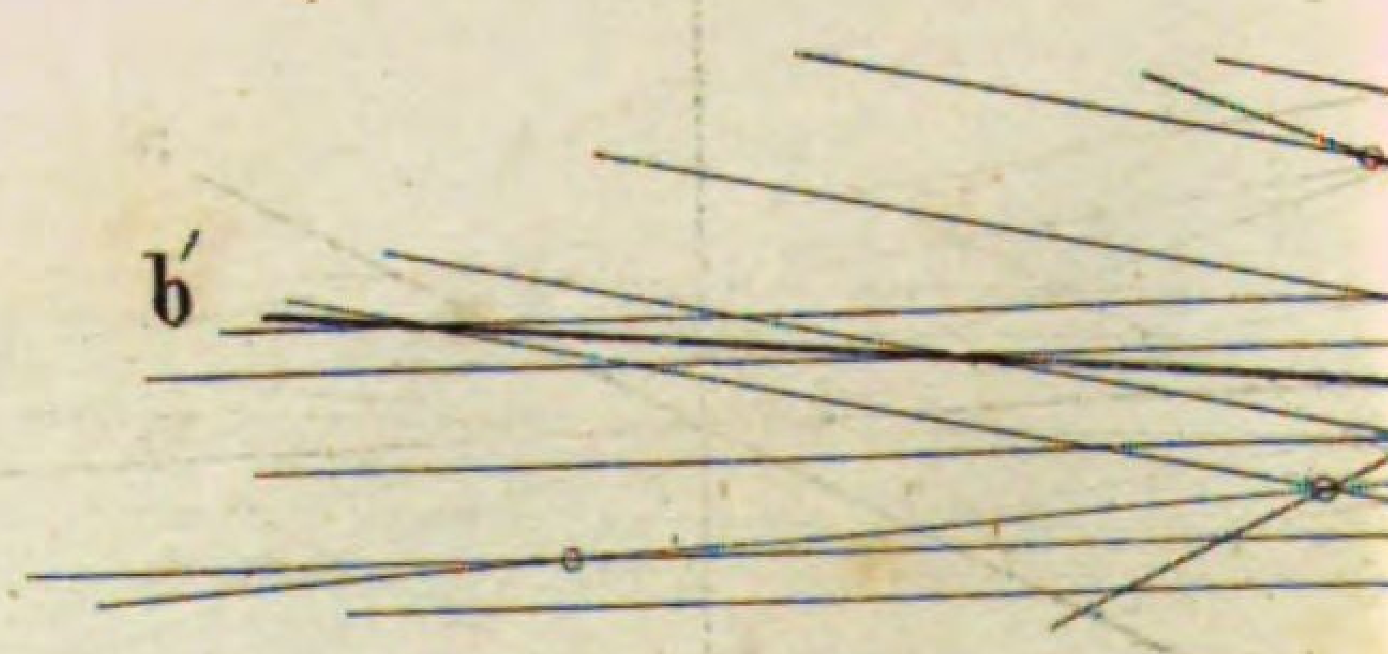


Fig. 8.



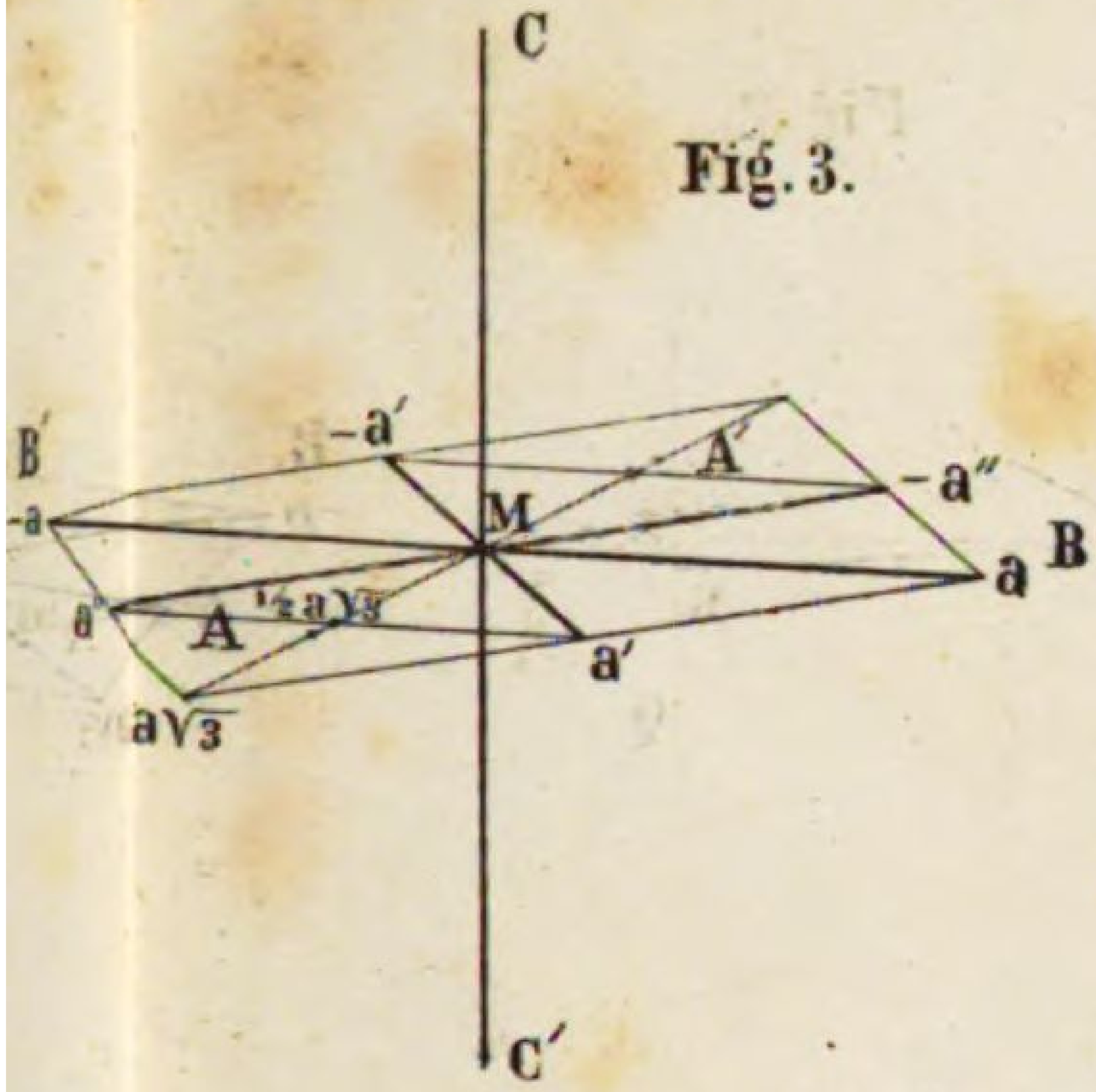


Fig. 3.

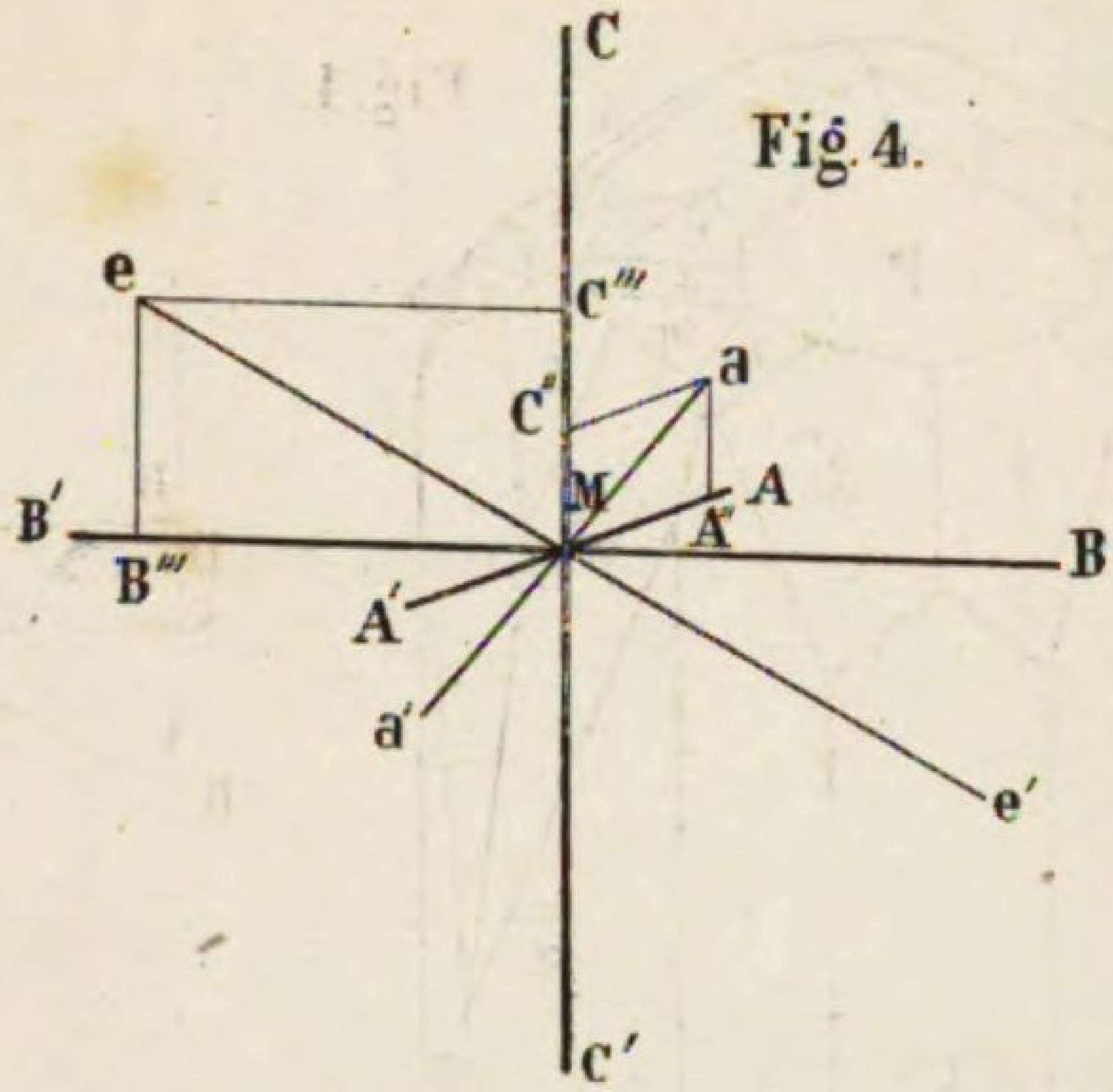


Fig. 4.

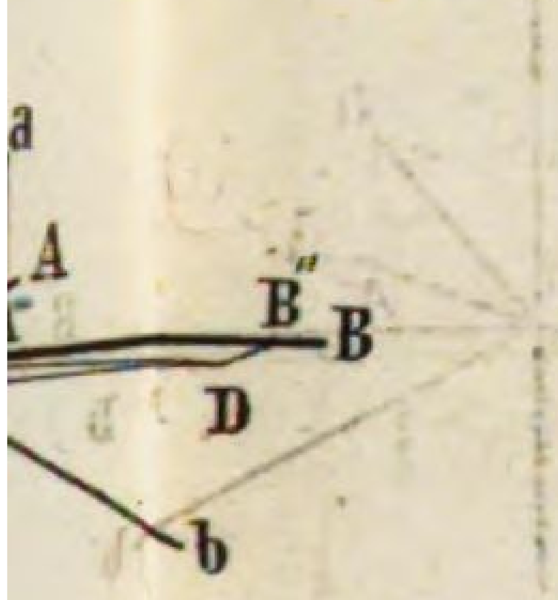


Fig. 5.

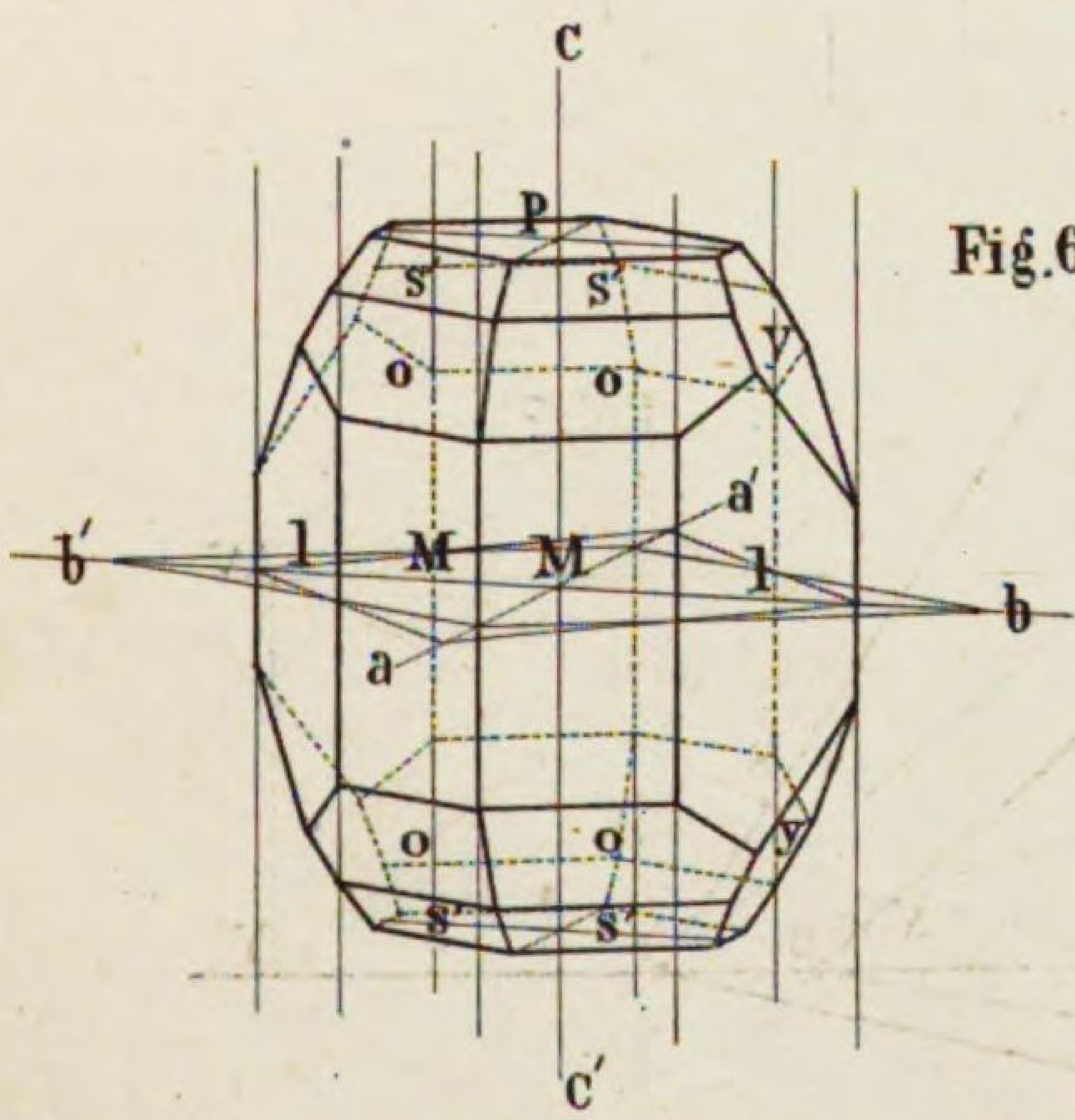


Fig. 6b.

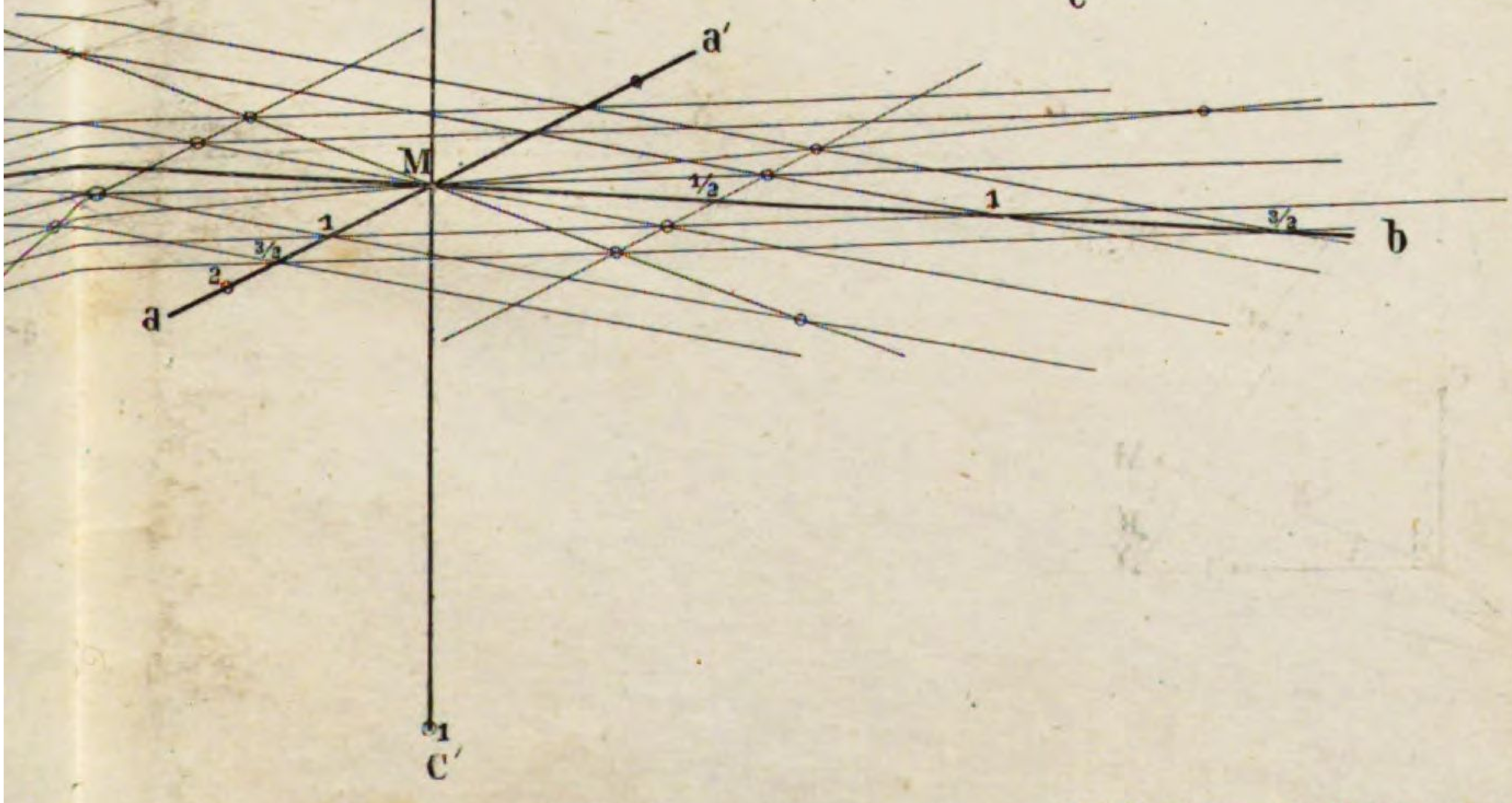


Fig. 6a.

Lit. G. Ebenhusen, vorm. W. C. Baisch, Stuttgart.

ier

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Klein, Carl

Einleitung in die Krystallberechnung

Stuttgart 1876

Lith. 251 gd
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11318200-4